



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

جبر و احتمال - ۱۰ سوال

۱۳۱- طبق اصل استقرای تعمیم یافته، کوچک‌ترین مقدار طبیعی  $m$  برای این که عبارت « $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{n}{4}$ » به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $(n \geq m)$ ، درست باشد، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۲- عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، خود یک قضیه شرطی است؟ ( $n$  یک عدد طبیعی است)

- (۱) اگر  $n^2$  مضرب ۱۸ باشد، آنگاه  $n$  مضرب ۳ است.  
(۲) اگر  $n^2$  مضرب ۲۰ باشد، آنگاه  $n$  مضرب ۵ است.  
(۳) اگر  $n^2$  مضرب ۲۴ باشد، آنگاه  $n$  مضرب ۴ است.  
(۴) اگر  $n^2$  مضرب ۳۲ باشد، آنگاه  $n$  مضرب ۸ است.

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۳- از اعداد مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$  حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا همواره مطمئن باشیم که تفاضل دو عدد از میان آن‌ها برابر ۶ است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۲ (۴) ۱۱

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۴- هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  که دارای ۶ عضو باشد، حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر  $n$  است.  $n$  کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۵- فرض کنید  $A, B, C$  زیرمجموعه‌های مجموعه  $S = \{1, 2, 3\}$  باشند. به گونه‌ای که  $A \subseteq B, B \subseteq C, A \not\subseteq B, 1 \notin A$  و  $2 \notin B, 3 \notin C$ . کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

- (۱)  $A = \{3\}$  (۲)  $B = \{1\}$  (۳)  $A = \emptyset$  (۴)  $C = \{1, 2\}$

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۶- سه مجموعه  $A, B, C$  طوری مفروض‌اند که  $(A \cap B)' \cap (A \cup B') \cap C = C$ ، کدام گزینه الزاماً درست است؟

- (۱)  $B \cap C = \emptyset$  (۲)  $B \cap C' = \emptyset$  (۳)  $A \cap C = \emptyset$  (۴)  $A \cap C' = \emptyset$

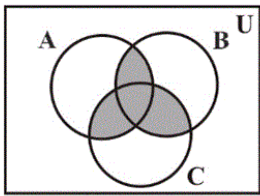
آزمون ۳۰ آذر

۱۳۷- اگر  $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$  باشد، آنگاه تعداد عضوهای  $P(P(A) - A)$  کدام است؟ ( $P(A)$  مجموعه توانی  $A$  است)

- (۱) ۶۴ (۲) ۲۵۶ (۳) ۳۲ (۴) ۱۲۸

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۸- کدام یک از گزینه‌های زیر، ناحیه هاشورزده در نمودار ون را نشان می‌دهد؟



(1)  $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

(2)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(3)  $(A \Delta B) \cap (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$

(4)  $A \cap B \cap C$

آزمون ۳۰ آذر

۱۳۹- اگر  $(A \cup B') \subseteq (A \cap C)$  باشد، آنگاه کدام گزاره همواره درست است؟

(1)  $B \subseteq A$

(2)  $A \subseteq B'$

(3)  $A \subseteq B$

(4)  $B' \subseteq A$

آزمون ۳۰ آذر

۱۴۰- حاصل  $(A - B) \cap [(C \cup A) \cap (B - C)']$  همواره برابر کدام است؟

(1)  $B$

(2)  $A - B$

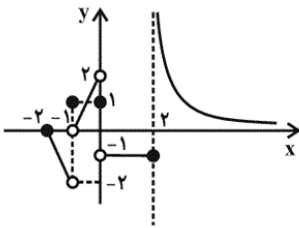
(3)  $A$

(4)  $B - A$

آزمون ۳۰ آذر

دیفرانسیل و انتگرال - ۲۰ سوال -

۸۱- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f \circ f)(x)$  کدام است؟



(1) ۱

(2) ۲

(3) صفر

(4) -۱

آزمون ۳۰ آذر

۸۲- اگر  $f$  تابعی فرد باشد و داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ، حاصل عبارت  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^2(x) - f(-x) + 1}{x^2 - 2x + 5}$  کدام است؟

(1)  $\frac{1}{5}$

(2)  $\frac{3}{5}$

(3)  $\frac{2}{5}$

(4)  $\frac{3}{7}$

آزمون ۳۰ آذر

۸۳- در بازه  $(0, 2\pi)$  تابع  $y = [\sin x][\cos x]$  در چند نقطه دارای حد نیست؟ (علامت جزء صحیح است.)

(1) صفر

(2) ۱

(3) ۲

(4) ۳

آزمون ۳۰ آذر

۸۴- اگر  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x}$  باشد، مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ( [ ] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) صفر - وجود ندارد. (۲) ۱ - صفر  
(۳) صفر - (-۱) (۴) وجود ندارد - وجود ندارد.

آزمون ۳۰ آذر

۸۵- حد کسر  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|9 - x^2|}{1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{6}$  (۲)  $-\frac{1}{6}$  (۳) -۶ (۴) ۶

آزمون ۳۰ آذر

۸۶- حاصل حد  $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\tan 3x \cot x - \tan x \cot 3x)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱  
(۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{8}{3}$

آزمون ۳۰ آذر

۸۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{ax - 4}{x^2 - 2x} - \frac{x + 2}{x^2 + x} \right) = 1$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

آزمون ۳۰ آذر

۸۸- تابع  $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \sin x & ; x \in \mathbb{Q} \\ (x^2 - 1) \cos x & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  در بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه حد دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

آزمون ۳۰ آذر

۸۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ |x^2 + ax| & ; x < -1 \end{cases}$  پیوسته است؟

- (۱)  $\{1, \sqrt{2}\}$  (۲)  $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$   
(۳)  $\emptyset$  (۴)  $\mathbb{R}$

آزمون ۳۰ آذر

۹۰- در بازه  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  همواره  $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} \leq \frac{\tan \pi x}{1-x} \leq g(x)$  است، اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) - \frac{\tan \pi x}{1-x}) = 0$  باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام

است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{\pi+1}{\pi-1}$  (۳)  $\frac{\pi-1}{\pi+1}$  (۴) -۱

آزمون ۳۰ آذر

۹۱- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \left( \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x} \right)$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

آزمون ۳۰ آذر

۹۲- اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = +\infty$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3bx-2}{x^2+ax}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{9}{2}$

آزمون ۳۰ آذر

۹۳- تابع  $f$  در بازه  $(0, 2)$  پیوسته است. با توجه به اطلاعات جدول زیر، معادله  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$  در بازه  $(0, 2)$  حداقل چند جواب دارد؟

$x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	(۱) ۱
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-۱	۲	-۱	(۳) ۳

آزمون ۳۰ آذر

۹۴- به ازای چند مقدار برای  $a$ ، تابع  $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+ax}$  دارای دو مجانب قائم است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

آزمون ۳۰ آذر

۹۵- نمودار تابع  $y = x \tan \frac{1}{x}$  در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟



۹۶- اگر مجانب مایل نمودار تابع  $y = (3x+1)\sqrt{\frac{ax+1}{x+2}}$  با خط  $y = 2x+5$  موازی باشد، مقدار عددی  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{4}{9}$       (۴)  $\frac{9}{4}$

۹۷- حاصل  $A = \lim_{x \rightarrow 0} (\pi x \tan \frac{\pi}{2(x+1)})$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) -۲      (۳) -۱      (۴)  $\frac{1}{2}$

۹۸- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+bx}{x^2-1} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$  در نقطه  $x=1$  پیوسته باشد،  $a-b$  کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۹۹- فاصله خطوط مجانب افقی تابع  $f(x) = \log_7 \left( \frac{9^{x+1}+1}{9^x+27} \right)$  از یکدیگر، کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

۱۰۰- مجانب‌های مایل دو منحنی  $f(x) = ax(3e^{-x}+2)$  و  $g(x) = \frac{x}{\pi} \tan^{-1}(1-x^2)$  با هم موازی‌اند.  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $-\frac{1}{4}$       (۴)  $-\frac{3}{4}$

### هندسه‌ی تحلیلی - ۱۰ سوال

۱۱۱- معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه  $A(1,0)$ ، برابر فاصله آنها از خط  $x=2$  باشد، کدام است؟

(۱)  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$       (۲)  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$

(۳)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$       (۴)  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

۱۱۲- مرکز یک بیضی، مبدأ مختصات و محور کانونی آن منطبق بر محور  $x$  هاست. اگر نمودار این بیضی از نقطه  $(-\sqrt{2}, -1)$  بگذرد و

محور طولها را در نقطه  $(2, 0)$  قطع کند، خروج از مرکز آن کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (4) \qquad \frac{1}{2} \quad (3)$$

۱۱۳- بیضی ای درون یک مستطیل محاط شده است، به گونه‌ای که قطرهای کوچک و بزرگ بیضی موازی با ضلع‌های مستطیل‌اند. اگر

اندازه قطر این مستطیل برابر  $2\sqrt{3}$  و خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  باشد، آنگاه فاصله بین دو کانون این بیضی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (2) \qquad \sqrt{2} \quad (1)$$

$$2\sqrt{2} \quad (4) \qquad \sqrt{6} \quad (3)$$

۱۱۴- کانون‌های بیضی به معادله  $x^2 + 2y^2 - 2x - 15 = 0$ ، دو سر قطری از یک دایره هستند. این دایره و بیضی نسبت به هم چه

وضعیتی دارند؟

(۱) فقط در یک نقطه بر هم مماس‌اند.

(۲) در دو نقطه بر هم مماس‌اند.

(۳) در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

(۴) یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

۱۱۵- فرض کنید  $AA'$  و  $BB'$  به ترتیب بلندترین و کوتاه‌ترین قطرهای بیضی  $x^2 + 2y^2 - 2x = 3$  باشند. طول پاره خط  $AB$  کدام

است؟

$$2\sqrt{2} \quad (2) \qquad \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\sqrt{6} \quad (4) \qquad 2\sqrt{3} \quad (3)$$

۱۱۶- معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط  $x = -1$  و نقطه  $(2, -3)$  به یک فاصله هستند، کدام است؟

$$(1) (x+2)^2 = 4(y-2)^2$$

$$(2) (y-2)^2 = 4(x+2)^2$$

$$(3) (y-2)^2 = -4(x+2)^2$$

$$(4) (x+2)^2 = -4(y-2)^2$$

آزمون ۳۰ آذر

۱۱۷- نقاط  $F(-4, 5)$  و  $S(2, m)$  به ترتیب کانون و رأس یک سهمی هستند که محور تقارن آن با یکی از محورهای مختصات موازی

است. معادله خط هادی این سهمی کدام است؟

$$(1) y = -4$$

$$(2) x = -4$$

$$(3) y = 8$$

$$(4) x = 8$$

آزمون ۳۰ آذر

۱۱۸- سهمی  $y^2 + 4y - 4x = 0$  مفروض است. شعاع دایره‌ای که مرکز آن، مبدأ مختصات بوده و بر خط هادی سهمی مماس باشد،

کدام است؟

$$(1) 2$$

$$(2) \frac{3}{2}$$

$$(3) 1$$

$$(4) \frac{1}{2}$$

آزمون ۳۰ آذر

۱۱۹- اگر نقطه  $A(-3, 3)$  روی یک سهمی قائم با کانون  $F(1, 0)$  قرار داشته باشد، آنگاه کدام یک از خطوط زیر می‌تواند خط هادی این

سهمی باشد؟

$$(1) y = 6$$

$$(2) y = 5$$

$$(3) y = -1$$

$$(4) y = -2$$

آزمون ۳۰ آذر

۱۲۰- از کانون سهمی  $x^2 - 4y - 2x = 3$ ، چند مماس می‌توان بر منحنی  $4x^2 + y^2 = 16$  رسم کرد؟

$$(1) 0$$

$$(2) 1$$

$$(3) بی‌شمار$$

$$(4) 2$$

آزمون ۳۰ آذر

## ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال

۱۲۱- برای تعیین اول بودن یک عدد طبیعی، آن عدد را بر عامل‌های اول مشخصی تقسیم می‌کنیم. در کدام یک از گزینه‌های زیر،

تعداد عامل‌های اول مورد بررسی برای اول بودن هر سه عدد، یکسان است؟

$$(1) 87, 67, 47$$

$$(2) 53, 43, 23$$

$$(3) 89, 79, 59$$

$$(4) 137, 127, 107$$



۱۲۲- چند جفت عدد اول  $p$  و  $q$  وجود دارد که در رابطه  $q^2 - 13p = 16$  صدق کنند؟

- (۱) بی‌شمار (۲) دو (۳) یک (۴) هیچ

۱۲۳- عدد  $16!$  را به صورت  $q \times 12^k = 16!$  نوشته‌ایم. بیش‌ترین مقدار  $k$ ، کدام است؟ ( $k, q \in \mathbb{N}$ )

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۲۴- عدد  $45000$ ، چند مقسوم‌علیه طبیعی مضرب  $18$  دارد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰

۱۲۵- اگر اعداد صحیح  $a$ ،  $b$  و  $c$  مفروض باشند به طوری که  $a^2b \mid c^2$  و  $5a + 3c = 1$ ، آنگاه کوچک‌ترین عضو مثبت

مجموعه  $A = \{mb + nc \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  کدام است؟

- (۱)  $c$  (۲)  $c^2$  (۳)  $|b|$  (۴)  $|c|$

۱۲۶- به ازای چند عدد صحیح  $n$ ، ب.م.م دو عدد  $n^2 - n$  و  $n^2 + n$  برابر  $9$  است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) هیچ

۱۲۷- اگر  $p$  و  $q$  دو عدد اول متمایز و  $A$  و  $B$  به ترتیب مجموعه مضرب‌های طبیعی  $p$  و  $q$  باشند، آنگاه کوچک‌ترین عضو

مجموعه  $A \cap B$  چند شمارنده طبیعی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۸- اگر  $(a, 84) = 12$  و  $(a, 75) = 15$  باشد، آنگاه حداکثر مقدار ممکن برای  $(a, 180)$  کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۳۶۰

۱۲۹- اگر دو عدد  $1 + n^2$  و  $4 + n^3$  نسبت به هم اول نباشند، آنگاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۷ (۳) ۱۹ (۴) ۲۳

۱۳۰- اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۶۸ و کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد، ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها باشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۱۷ (۴)

آزمون ۳۰ آذر

### ریاضی پایه - ۱۰ سوال

۱۰۱- به‌ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - mx + m - 3} = 0$  فقط یک ریشه دارد؟

- ۶ (۱)      -۶ (۲)      ۱۲ (۳)      -۱۲ (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۲- معادله  $\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} + \frac{3x + 3}{2x^2 + x + 1} = 4$  چند جواب دارد؟

- ۱ صفر (۱)      ۲ یک (۲)      ۳ دو (۳)      ۴ سه (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۳- مجموعه جواب معادله  $|5 + x|(x - 2) = |x - 2|(5 + x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ۸ (۱)      ۷ (۲)      ۳ (۳)      ۴ بی‌شمار (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۴- اگر مجموعه جواب نامعادله  $|x - 2| - |x - 1| + x \geq 4$  به‌صورت  $[a, +\infty)$  باشد، حاصل  $2a - 3$  کدام است؟

- ۵ (۱)      -۷ (۲)      ۷ (۳)      ۵ (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۵- در کدام بازه، نمودار تابع  $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  زیر منحنی  $y = |x + 1| - 2$  قرار دارد؟

- (۱)  $(1 + \sqrt{2}, 3]$       (۲)  $(1 - \sqrt{3}, 3)$       (۳)  $(1, 1 + \sqrt{2})$       (۴)  $(1, 1 + \sqrt{3})$

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۶- معادله  $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$  دارای چند ریشه صحیح است؟

- ۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۴ بی‌شمار (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۷- جواب معادله  $\cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x = \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، چند نقطه را روی دایره مثلثاتی نشان می‌دهد؟

- ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۸ (۳)      ۱۶ (۴)

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۸- جواب کلی معادله  $\frac{1 + \cos x}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

(۳)  $\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

(۲)  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

آزمون ۳۰ آذر

۱۰۹- معادله  $\sin 3x - \sin x = \cos 3x + \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۶

آزمون ۳۰ آذر

۱۱۰- مجموع ریشه‌های معادله  $\sin x - \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

(۴)  $\frac{5\pi}{2}$

(۳)  $2\pi$

(۲)  $\frac{3\pi}{2}$

(۱)  $\pi$

آزمون ۳۰ آذر

(مهمدر علی نادرپور)

۱۳۱-

از روی گزینه‌ها، ابتدا  $n = 3$  و سپس مقادیر بعدی را جایگزین می‌کنیم.  
داریم:

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{7}{8} < \frac{3}{4}$$

نادرست

$$n = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} < \frac{4}{4} \Rightarrow \frac{15}{16} < 1$$

درست

واضح است که با افزایش مقدار  $n$ ، هر بار به سمت راست نامساوی به اندازه

$\frac{1}{4}$  و به سمت چپ نامساوی، مقداری کم‌تر از  $\frac{1}{4}$  افزوده می‌شود. بنابراین

نامساوی به‌ازای تمامی مقادیر  $n \geq 4$  برقرار است و  $m = 4$  خواهد بود.

(بیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(امیرحسین ابومحبوب)

۱۳۲-

(۱) برای این که  $n^2$  مضرب ۱۸ باشد، لازم است  $n$  مضرب ۲ و ۳ باشد.

(۲) برای این که  $n^2$  مضرب ۲۰ باشد، لازم است  $n$  مضرب ۲ و ۵ باشد.

(۳) برای این که  $n^2$  مضرب ۲۴ باشد، لازم است  $n$  مضرب ۳ و ۴ باشد.

(بیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

حداکثر تعداد اعدادی که می‌توان انتخاب کرد طوری که تفاضل هیچ دو عددی برابر ۶ نشود، ۱۲ عدد است. به عنوان مثال از مجموعه‌های  $\{1, 7, 13, 19\}$  و  $\{2, 8, 14, 20\}$  و  $\{3, 9, 15\}$  و  $\{4, 10, 16\}$  و  $\{5, 11, 17\}$  و  $\{6, 12, 18\}$  اعداد مشخص شده انتخاب شوند. لذا با انتخاب حداقل ۱۳ عدد از این مجموعه، همواره تفاضل دو تا از اعداد برابر ۶ است.

(بیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲✓

۱

آزمون ۳۰ آذر

اگر مجموعه  $S$  را به صورت  $\{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), 5\}$  دسته‌بندی کنیم، طبق اصل لانه کبوتری، هر زیرمجموعه ۶ عضوی از این مجموعه، دست کم دو عضو دارد که مربوط به یک زوج مرتب باشد و چون مجموع تمام زوج مرتب‌ها برابر ۱۰ است. پس در هر زیرمجموعه ۶ عضوی دست کم دو عضو داریم که مجموع آن‌ها ۱۰ باشد.

اگر مجموعه  $S$  را به صورت  $\{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), 9\}$  دسته‌بندی کنیم، در یک زیرمجموعه ۶ عضوی، دست کم ۲ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها ۹ است.

اگر مجموعه  $S$  را به صورت  $\{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), 1\}$  دسته‌بندی کنیم، در یک زیرمجموعه ۶ عضوی، دست کم ۲ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها ۱۱ است.

(بیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱✓

آزمون ۳۰ آذر

(امیرحسین ابومصوب)

با توجه به این که  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$ ، می‌توان نتیجه گرفت  $A \subseteq C$ .  
بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \notin C \Rightarrow 3 \notin A \\ 2 \notin B \Rightarrow 2 \notin A \end{array} \right. \xrightarrow{3 \notin A} A = \emptyset$$

(ببر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(مهمدر علی نادرپور)

$$(A' \cup B') \cap (A \cup B) \cap C = C \Rightarrow [(A' \cap A) \cup B'] \cap C = C$$

$$\Rightarrow B' \cap C = C \Rightarrow C \subseteq B' \Rightarrow C \cap B = \emptyset$$

(ببر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

(امیرحسین ابومصوب)

مجموعه  $P(A)$  دارای ۸ عضو است که دو عضو  $\{a\}, \{\{a\}\}$  از آن با  
مجموعه  $A$  مشترک می‌باشد، پس  $(P(A) - A)$  دارای ۶ عضو بوده و  
مجموعه توانی آن  $2^6 = 64$  عضو دارد.

(ببر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

(هنریک سرکیسیان)

اگر ناحیه‌ها را مطابق شکل زیر شماره‌گذاری کنیم، داریم:

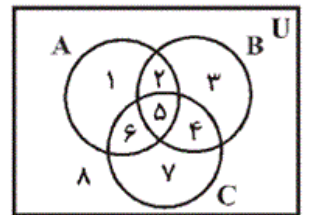
$$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2, 5, 4, 6\}$$

$$(A \Delta B) \cap (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$$

$$= \{1, 6, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 7\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \emptyset$$

$$A \cap B \cap C = \{5\}$$



فقط گزینه «۲» با شکل مطابقت دارد.

(ببر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

۱۳۹ -

$$(A \cup B') \subseteq (A \cap C) \Rightarrow \begin{cases} (A \cup B') \subseteq A \\ (A \cup B') \subseteq C \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} (A \cup B') \subseteq A \\ A \subseteq (A \cup B') \text{ از طرفی} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B' = A \Rightarrow B' \subseteq A$$

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۳۶ تا ۵۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علیرضا کلانتری)

۱۴۰ -

$$\begin{aligned} & (A - B) \cap [(C \cup A) \cap (B - C)'] \\ &= (A - B) \cap [(C \cup A) \cap (B \cap C)'] \\ &= (A - B) \cap [(C \cup A) \cap (B' \cup C)] \\ &= (A - B) \cap [C \cup (A \cap B')] \\ &= (A - B) \cap [C \cup (A - B)] = A - B \end{aligned}$$

تذکر: طبق مثال ۲ صفحه ۵۴ کتاب درسی می‌دانیم  $A \cap (A \cup B) = A$  (قانون جذب)، در این سؤال به جای  $A$ ، مجموعه  $A - B$  و به جای  $B$ ، مجموعه  $C$  قرار داده شده است.

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میلاد منصوری)

۸۱ -

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کیا مقدس نیاک)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \xrightarrow[\text{فرداست.}]{\text{تابع } f} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^2(x) - f(-x) + 1}{x^2 - 2x + 5} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x))^2 - (\lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x)) + 1}{(\lim_{x \rightarrow 2^+} x)^2 - 2(\lim_{x \rightarrow 2^+} x) + 5}$$

$$= \frac{(1)^2 - (-1) + 1}{(2)^2 - 2(2) + 5} = \frac{3}{5}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

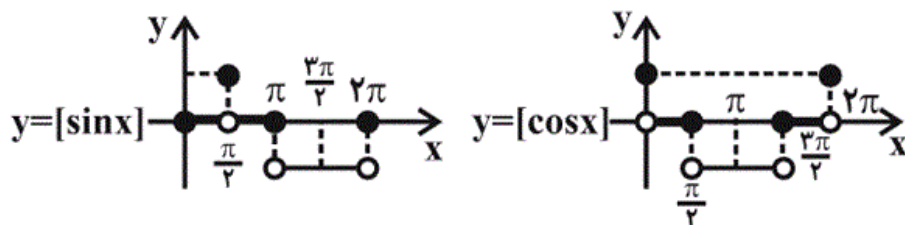
۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر





در بازه  $(0, 2\pi)$  نقاطی که دارای شرایط حد نداشتن می‌باشد را بررسی

می‌کنیم:

$$x = \frac{\pi}{2} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [\sin x][\cos x] = 0 \times (-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sin x][\cos x] = 0 \times 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \pi : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x][\cos x] = (-1) \times (-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x][\cos x] = 0 \times (-1) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} [\sin x][\cos x] = (-1) \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} [\sin x][\cos x] = (-1) \times (-1) = 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع در نقاط  $x = \pi$  و  $x = \frac{3\pi}{2}$  حد ندارد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0 \quad \text{می دانیم:}$$

همچنین اگر  $x \rightarrow +\infty$  آن گاه  $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x} < 1$  و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

ولی اگر  $x \rightarrow -\infty$  آن گاه  $-1 < \frac{\cos^2 x}{x} \leq 0$  و در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  وجود ندارد.

زیرا وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ، مقدارهای  $f(x)$  گاهی صفر هستند که در این صورت

$[f(x)] = 0$  و گاهی مقدارهای  $f(x)$  در بازه  $(-1, 0)$  هستند که در

این صورت  $[f(x)] = -1$ ، پس  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  وجود ندارد. برای اثبات عدم

وجود حد مورد نظر می‌توانید دنباله‌های  $a_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2}$  و  $b_n = -2n\pi$  را

در نظر بگیرید. ( $n \in \mathbb{N}$ )

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|9-x^2|}{1-\sqrt{x^2-4x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|9-x^2|}{1-|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(9-x^2)}{1-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-9}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = -6 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 3x}{\tan x} - \frac{\tan x}{\tan 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x \cos x}{\sin x \cos 3x} - \frac{\sin x \cos 3x}{\sin 3x \cos x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} \\
 &= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ و ۸۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

(کاظم اجلالی)

-۸۷

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{ax-4}{x(x-2)} - \frac{x+2}{x(x+1)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax-4)(x+1) - (x+2)(x-2)}{x(x-2)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-1)x^2 + (a-4)x}{x(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a-1)x + a-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{a-4}{-2} \\
 \frac{a-4}{-2} = 1 &\Rightarrow a-4 = -2 \Rightarrow a = 2
 \end{aligned}$$

بنابراین:

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

فرض می‌کنیم  $g(x) = \begin{cases} \sin x & ; x \in Q \\ \cos x & ; x \notin Q \end{cases}$ ، تابع در نقاطی حد دارد که

$\sin x = \cos x$  باشد، یعنی  $\tan x = 1$ . بنابراین تابع  $g$  در  $[-1, 1]$  فقط

در  $x = \frac{\pi}{4}$  حد دارد. تابع  $h(x) = x^2 - 1$  در همه نقاط  $R$  حد دارد ولی

تابع  $f(x) = h(x)g(x)$  در نقاطی حد دارد که هم  $g$  و هم  $h$  در آن نقاط حد داشته باشند و یا تابع  $h(x)$  در این نقاط صفر باشد.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس  $f$  در نقاط  $\{-1, 1, \frac{\pi}{4}\}$  حد دارد.

(دیفرانسیل - ص ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

برای این که تابعی در یک نقطه مشخص پیوسته باشد، باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در آن نقطه با یکدیگر برابر باشند. حالا این شرط را در مورد تابع داده شده در  $x = -1$  بررسی می‌کنیم:

$$\text{مقدار تابع: } f(-1) = \frac{1}{a-1}$$

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{a-1}$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + ax) = 1 - a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-1} = 1 - a \Rightarrow \frac{1}{a-1} = -(a-1) \Rightarrow (a-1)^2 = -1$$

که هیچ جوابی ندارد. پس به ازای هیچ مقدار  $a$ ، تابع نمی‌تواند پیوسته باشد.

(دیفرانسیل - ص ۵ و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

(فریدون ساعتی)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( g(x) - \frac{\tan \pi x}{1-x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1-x}$$

$$\left( \begin{array}{l} 1-x=t \Rightarrow x=1-t \\ (x \rightarrow 1) \Rightarrow (t \rightarrow 0) \end{array} \right) \quad \text{با تغییر متغیر } 1-x=t \text{ داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi(1-t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi - \pi t)}{t}$$

$$= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{-\pi t}{t} = -\pi$$

$$\xrightarrow[\text{فشرده‌گی}]{\text{طبق قضیه}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = -\pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-\pi f(x) + \pi) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + \pi f(x)) = \pi - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi - 1}{\pi + 1}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(رضا نیازی)

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-} = \infty - \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos 3x + \cos x}{\cos x \cos 3x} \xrightarrow[\text{به ضرب}]{\text{تبدیل جمع}} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2(\cos 2x \cos x)}{\cos x \cos 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2 \cos 2x}{\cos 3x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

نکته: در رفع ابهام  $\infty - \infty$  توابع کسری از مخرج مشترک گیری استفاده می‌کنیم.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(علی یوسفی)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = +\infty$$

چون حد صورت برابر ۳ است، برای اینکه حاصل حد  $+\infty$  باشد، باید

$$\Rightarrow x^2+ax+b = (x-1)^2 \quad \text{ریشه مضاعف مخرج باشد.}$$

$$x^2+ax+b = x^2-2x+1 \Rightarrow a = -2, b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{9}{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(کاظم ابلالی)

تابع  $g(x) = f(x) - \cos \frac{\pi}{x}$  را در نظر می‌گیریم. جدول مقادیر تابع به شکل

زیر است:

$x$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{3}{2}$	$g(\frac{1}{3})g(\frac{1}{2}) < 0$
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$-2$	$3$	$-\frac{1}{2}$	$\Rightarrow g(\frac{1}{2})g(1) < 0$
					$g(1)g(\frac{3}{2}) < 0$

از آن جا که تابع  $g$  در بازه  $(0, 2)$  پیوسته است، پس تابع  $g$  در هر کدام از

بازه‌های  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ;  $(\frac{1}{2}, 1)$  و  $(1, \frac{3}{2})$  حداقل یک ریشه دارد. پس  $g$  در بازه

$(0, 2)$  حداقل ۳ ریشه دارد. در نتیجه  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$  حداقل ۳ جواب دارد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(رضا نیازی)

$$x^3 + ax = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 : x = 0 \Rightarrow \text{فقط یک ریشه} \\ a < 0 : x = 0, x = \pm\sqrt{-a} \Rightarrow \text{مخرج سه ریشه دارد.} \end{cases}$$

$$\text{ریشه‌های صورت: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \text{ دو مجانب قائم}$$

$$a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ دو مجانب قائم}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر

(یواد اساقی)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ چون } y = 1 \text{ تابع افقی تابع } \frac{1}{x}$$

حال باید حد تابع را در  $+\infty$  و  $-\infty$  محاسبه کنیم:

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x} = u} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که  $u \rightarrow 0^+$  باشد،  $\tan u > u$  است، پس عبارت از یک بیشتر است.

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x} = u} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که  $u \rightarrow 0^-$  باشد،  $\tan u < u$  است، پس:

$$\tan u < u \xrightarrow{u < 0} \frac{\tan u}{u} > 1$$

از طرفی تابع از یک بیشتر است. پس تابع در  $\pm\infty$  با مقادیر بیشتر از یک به آن نزدیک می‌شود.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(یواد اساقی)

وقتی مجانب مایل با خطی موازی است، یعنی شیب مجانب مایل با شیب خط

برابر است. شیب مجانب مایل هم که از رابطه  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  به دست

می آید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{\frac{ax+1}{x+2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x\sqrt{a}}{x} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{a} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{9}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\pi x \tan \frac{\pi}{2(x+1)}) = 0 \times \infty \text{ مبهم}$$

چون با ابهام  $0 \times \infty$  مواجه هستیم، لازم است عامل بی‌نهایت شونده را

معکوس کرده و آن را در مخرج بنویسیم تا به ابهام  $\frac{0}{0}$  برسیم.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\tan \frac{\pi}{2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\cot \frac{\pi}{2(x+1)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi x}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(x+1)})}$$

کمان  $\tan$  در مخرج را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{2} (1 - \frac{1}{x+1}) = \frac{\pi}{2} (\frac{x}{x+1})$$

۴

۳

۲

۱



باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

برای این که حد  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx}{x^2 - 1}$  موجود باشد، باید  $x = 1$

ریشه صورت باشد. زیرا در غیر این صورت حاصل حد فوق، بی نهایت خواهد بود. پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - ax}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax}{x+1} = \frac{a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a - b = 4$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

خطوط مجانب افقی تابع در  $+\infty$  و  $-\infty$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3 \left( \frac{9^{x+1} + 1}{9^x + 27} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3 \left( \frac{9^{x+1}}{9^x} \right) = \log_3 9 = 2$$

پس  $y = 2$  مجانب افقی است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_3 \left( \frac{9^{x+1} + 1}{9^x + 27} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_3 \left( \frac{0 + 1}{0 + 27} \right) = \log_3 \left( \frac{1}{27} \right) = -3$$

پس خط  $y = -3$  مجانب افقی است.

بنابراین فاصله خطوط مجانب افقی ۵ واحد است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

(شیب شیبی)

شیب مجانب مایل تابع  $y = f(x)$  از رابطه  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}$  به دست

می آید.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax(3e^{-x} + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(3e^{-x} + 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \Rightarrow m_1 = a(0 + 2) = 2a \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow m'_1 = +\infty \text{ غ ق ق} \end{array} \right.$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x}{\pi} \tan^{-1}(1 - x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(1 - x^2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow 2a = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(مهندس رضا دلورنژاد)

اگر  $M = (x, y)$  نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد، آنگاه مطابق فرض

داریم:

$$MA = \frac{\sqrt{2}}{2} MH \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} |x-2|$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۴ صفحه ۶۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

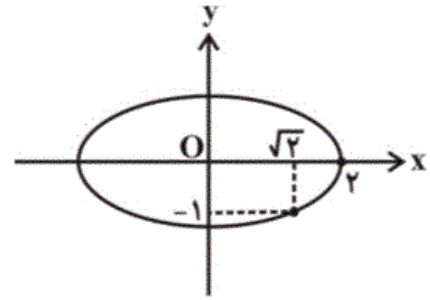
آزمون ۳۰ آذر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{رأس کانونی: } A = (a, 0) = (2, 0) \Rightarrow a = 2$$

چون نقطه  $(\sqrt{2}, -1)$  روی نمودار این بیضی قرار دارد، پس:

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} + \frac{(-1)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 2$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{4a^2}{3} = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\text{فاصله دو کانون بیضی} = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{6}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

۲

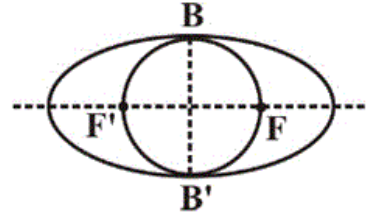
۱

آزمون ۳۰ آذر

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 2y^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + 2y^2 = 16 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$



$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 8 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}$$

مطابق شکل چون  $c = b$  است، پس دایره به قطر  $FF'$  در رئوس

ناکانونی  $B$  و  $B'$  بر بیضی مماس است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

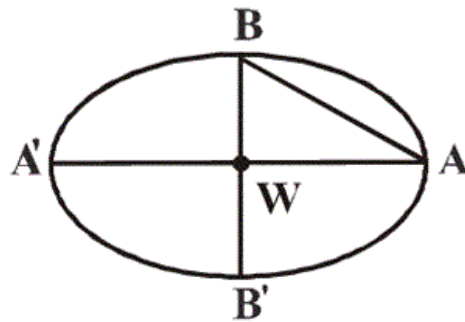
۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر

$$x^2 + 2y^2 - 2x = 3 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases}$$



مطابق شکل بالا، اگر W مرکز بیضی باشد، داریم:

$$AB = \sqrt{AW^2 + BW^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

مکان هندسی مورد نظر، یک سهمی است که نقطه  $F = (-۳, ۲)$  کانون و  $x = -۱$  معادله خط هادی آن است. وسط پاره‌خطی که از کانون بر خط هادی عمود می‌شود، رأس سهمی است، لذا  $S = (-۲, ۲)$  رأس این سهمی است؛ از طرفی سهمی افقی است و با توجه به طول کانون، دهانه آن به سمت چپ باز می‌شود. داریم  $a = x_F - x_S = -۱$ ، پس معادله سهمی به صورت زیر است:

$$(y - 2)^2 = 4(-1)(x + 2) \Rightarrow (y - 2)^2 = -4(x + 2)$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

این سهمی نمی‌تواند یک سهمی قائم باشد زیرا  $x_F \neq x_S$ ، پس با توجه به فرض سؤال، حتماً افقی است، در این صورت  $y_F = y_S = ۵$ ، یعنی  $S = (۲, ۵)$  است و داریم:

$$a = x_F - x_S = -۴ - ۲ = -۶$$

$$x = x_S - a = ۲ - (-۶) = ۸$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(متمرکز شاعری)

$$y^2 + 4y - 4x = 0 \Rightarrow (y + 2)^2 = 4(x + 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \\ \text{رأس سهمی: } S = (-1, -2) \end{array} \right. \Rightarrow \text{خط هادی سهمی: } x = \alpha - a = -2$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط  $x = -2$ ، برابر ۲ است پس شعاع دایره،  $R = 2$

می‌باشد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

می‌دانیم هر نقطه روی سهمی، از کانون و خط هادی به یک فاصله است. پس

فاصله AF را محاسبه می‌کنیم.

$$AF = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

پس فاصله نقطه A از خط هادی باید برابر ۵ باشد و چون سهمی قائم است،

معادله خط هادی آن به صورت  $y = k$  می‌باشد، بنابراین  $|k - 3| = 5$  که در

نتیجه  $k = 8$  یا  $k = -2$  می‌باشد و در نتیجه خط هادی سهمی به صورت

$y = 8$  یا  $y = -2$  است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳

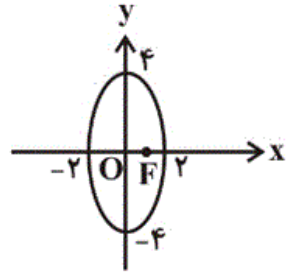
۲

۱

آزمون ۳۰ آذر



$$(x-1)^2 = 4y + 4$$



$$(x-1)^2 = 4(y+1) \Rightarrow S = (1, -1), a = 1$$

کانون:  $F = (1, 0)$  سهمی قائم

$$4x^2 + y^2 = 16 \xrightarrow{\div 16} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \text{معادله بیضی قائم است}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ O = (0, 0) \end{cases}$$

چنانچه ملاحظه می شود نقطه  $F = (1, 0)$  داخل بیضی قائم است، پس از این نقطه

هیچ مماسی نمی توان بر منحنی مفروض رسم کرد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه های ۵۵ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

سه عدد ۸۹، ۷۹، ۵۹ همگی بین  $۷^۲ = ۴۹$  و  $۱۱^۲ = ۱۲۱$  قرار دارند. بنابراین کافی است برای بررسی اول بودن، آن‌ها را به ۴ عامل اول کوچک‌تر یا مساوی ۷، یعنی ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه ۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

(نوید میدری)

$$q^2 - 13p = 16 \Leftrightarrow q^2 - 16 = 13p \Leftrightarrow (q - 4)(q + 4) = 13p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q + 4 = 13 \\ q - 4 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 9 \\ p = 5 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q - 4 = 13 \\ q + 4 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 17 \\ p = 21 \end{cases}$$

پس هیچ دو جفت مرتبی از اعداد اول با ویژگی گفته شده وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

$$۱۶! \text{ در } ۲ \text{ تعداد عامل‌های } = \left[ \frac{۱۶}{۲} \right] + \left[ \frac{۱۶}{۴} \right] + \left[ \frac{۱۶}{۸} \right] + \left[ \frac{۱۶}{۱۶} \right] = ۱۵$$

$$۱۶! \text{ در } ۳ \text{ تعداد عامل‌های } = \left[ \frac{۱۶}{۳} \right] + \left[ \frac{۱۶}{۹} \right] = ۶$$

$$\Rightarrow ۱۶! = ۲^{۱۵} \times ۳^۶ \times q = (۲^۲ \times ۳)^۶ \times ۲^۳ q = ۱۲^۶ \times q'$$

$$\Rightarrow \max(k) = ۶$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$$

در این مسئله اگر  $n$  مقسوم‌علیه ۴۵۰۰۰ باشد:

$$\left. \begin{array}{l} n \mid ۴۵۰۰۰ \\ n = ۱۸q \end{array} \right\} \Rightarrow ۱۸q \mid ۴۵۰۰۰ \Rightarrow q \mid ۲۵۰۰ = ۵^۴ \times ۲^۲$$

$$۲۵۰۰ \text{ طبیعی} \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (۴ + 1)(۲ + 1) = ۱۵$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

$$5a + 3c = 1 \Rightarrow (a, c) = 1 \Rightarrow (a^3, c^2) = 1$$

$$\text{فرض: } c^2 \mid a^3 b, (a^3, c^2) = 1 \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} c^2 \mid b$$

از طرفی می‌دانیم  $c \mid c^2$ ، پس  $c \mid b$  و در نتیجه کوچک‌ترین عضو مثبت

مجموعه  $A$  برابر است با:

$$(b, c) \stackrel{c \mid b}{=} |c|$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

نکته: اگر  $a$  یک عدد صحیح باشد:

$$(a+1, a-1) = \begin{cases} 2 & ; \text{ فرد } a \\ 1 & ; \text{ زوج } a \end{cases}$$

داریم:

$$(n^2 - n, n^2 + n) = 9 \Rightarrow |n| (n-1, n+1) = 9$$

پس  $|n| \times 2 = 9$  یا  $|n| \times 1 = 9$ . حالت اول امکان پذیر نیست، اما در حالت

دوم  $|n| = 9$  است، یعنی  $n$  عددی فرد است که با  $(n-1, n+1) = 1$  تناقض

دارد، پس معادله فاقد جواب است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

$$A = \{p, 2p, 3p, \dots\}$$

$$B = \{q, 2q, 3q, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{pq, 2pq, \dots\} \Rightarrow \min(A \cap B) = pq$$

شمارنده‌های طبیعی عدد  $pq$  عبارت‌اند از:  $1, p, q, pq$ ، یعنی ۴ شمارنده

طبیعی دارد. (توجه کنید که چون  $\emptyset \neq A \cap B \subseteq \mathbb{N}$ ، مجموعه  $A \cap B$  طبق

اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتدا است.)

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

$$(a, 84) = 12 \Rightarrow (a, 2^2 \times 3 \times 7) = 2^2 \times 3$$

$$(a, 75) = 15 \Rightarrow (a, 3 \times 5^2) = 3 \times 5$$

بنابراین  $a$  حداقل دو عامل ۲ و یک عامل ۳ دارد ولی قطعاً فقط یک عامل ۵

دارد.

در نتیجه داریم:

$$\max(a, 1800) = \max(a, 2^3 \times 3^2 \times 5^2) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۳۰ آذر

فرض کنیم  $d = (n^2 + 1)$  و  $(n^3 + 4)$ . بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid n^2 + 1 \Rightarrow d \mid n(n^2 + 1) = n^3 + n \\ d \mid n^3 + 4 \end{array} \right\} \\ \xrightarrow{(-)} d \mid (n^3 + n) - (n^3 + 4) = n - 4 \\ \Rightarrow d \mid (n - 4)(n + 4) = n^2 - 16$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid n^2 - 16 \\ d \mid n^2 + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d \mid (n^2 + 1) - (n^2 - 16) = 17 \\ \xrightarrow{d \neq 1} d = 17$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر



اگر  $d$  بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و  $D$  کوچک‌ترین مضرب مشترک دو

عدد  $a$  و  $b$  باشد، آنگاه می‌توانیم  $a$  و  $b$  را به صورت  $a = a'd$  و  $b = b'd$

که  $(a', b') = 1$  و  $D = a'b'd$  بنویسیم. داریم:

$$D = 60d \Rightarrow a'b' = 60 \xrightarrow[(a', b')=1]{a' > b'} \begin{cases} a' = 60, b' = 1 \\ a' = 20, b' = 3 \\ a' = 15, b' = 4 \\ a' = 12, b' = 5 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$a + b = 68 \Rightarrow (a' + b')d = 68 \Rightarrow a' + b' \mid 68$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول،  $a' = 12$  و  $b' = 5$  است، یعنی  $d = 4$  می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر دوی آنها

هم‌زمان صفر باشند. بنابراین ریشه‌های معادله  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0$  را

مشخص و در دیگری قرار می‌دهیم. مقداری از  $m$  که به ازای آن رادیکال

دوم صفر باشد، جواب خواهد بود.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{(1)^3 - m + m - 3} = \sqrt{-2} \text{ غ.ق.ق}$$

$$x = 3 \Rightarrow \sqrt{(3)^3 - 3(m) + m - 3} = 0 \Rightarrow 27 - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = 12$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹ و

مسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

با فرض  $t = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$  داریم:

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Rightarrow \frac{t^2 + 3}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 3$$

$$t = 1: \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = 1 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = x + 1 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t = 3: \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = 3 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 3x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0$$

که  $\Delta > 0$ ، بنابراین معادله فوق دو جواب مخالف صفر دارد. بنابراین معادله ۳ جواب دارد.

(مسئله‌ها - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$x = 2$  نیز در معادله صدق می‌کند؛ بنابراین می‌توان مجموعه جواب

معادله سؤال مجموعه  $(-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$  است که شامل بی‌شمار عدد

صحیح است.

(مسئله‌ها - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

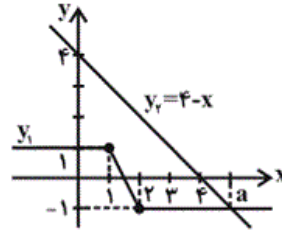
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر



$$|x-2| - |x-1| + x \geq 4$$

$$\Rightarrow \overbrace{|x-2| - |x-1|}^{y_1} \geq \overbrace{4-x}^{y_2}$$

مجموعه جواب نامعادله بالا بازه‌ای است

$\Rightarrow$  که نمودار  $y_1$  بالای نمودار  $y_2$  باشد.  $[a, +\infty)$  = مجموعه جواب  $\Rightarrow$

برای پیدا کردن عدد  $a$ ، دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$|x-2| - |x-1| = 4-x$$

$$\xrightarrow{a>4} x-2-x+1=4-x \Rightarrow x=5 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a-3=7$$

(مسئله - مسائل جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < |x+1| - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دامنه} \\ \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad (1) \\ |x+1| - 2 > 0 \Rightarrow |x+1| > 2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 2 \\ x+1 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases} \quad (2) \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 < x \leq 3 \xrightarrow[\substack{x > 1 \\ |x+1| = x+1}]{\quad} \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < (x+1) - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < x - 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x^2 + 2x + 3 < x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2 > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 > 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > \sqrt{2} \\ x-1 < -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 + \sqrt{2} \\ x < 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1 < x \leq 3} (1 + \sqrt{2}, 3]$$

(مسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱ و ۳۳ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۳۰ آذر

(کیا مقدس نیاک)

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} = |\sqrt{x-1}-2|$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

$$A = \sqrt{x-1}-2 \Rightarrow |A| + |A-1| = 1$$

وقتی  $0 \leq A \leq 1$  باشد، نمودار  $y = |A| + |A-1|$  بر خط  $y = 1$  منطبق

می‌شود. پس:

$$0 \leq \sqrt{x-1}-2 \leq 1 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10 \Rightarrow \text{جواب صحیح } 6$$

(مسئله‌ها - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۴۰)

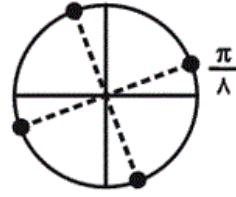
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر



$$\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos(3x - x) = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

که ۴ نقطه را مشخص می‌کند.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin x \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x (\sin x - \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ غ ق ق } , \sin x - \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 4k\pi + \pi \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر

$$2 \sin x \cos 2x = 2 \cos 2x \cos x \Rightarrow 2 \cos 2x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ جواب  $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  است.

(مسابقه - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۳۰ آذر



$$\sin x - \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x \cos x - \cos x) + (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر است با:  $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

(مسابقه - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۳۰ آذر