



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

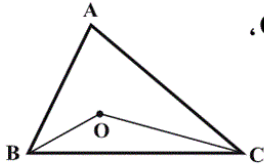


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

هندسه ۱ دهم - ۱۰ سوال

۱۳۱- چند مثلث متساوی‌الساقین با طول اضلاع صحیح و محیط ۱۶ واحد می‌توان رسم کرد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

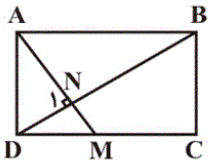


۱۳۲- در مثلثی به اضلاع $AB=4$ ، $AC=5$ و $BC=7$ ، نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C در نقطه O ،

یکدیگر را قطع می‌کنند. نسبت مساحت مثلث BOC به مساحت چهارضلعی $ABOC$ کدام است؟

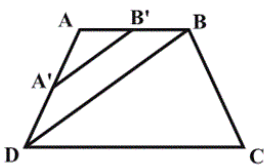
- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ ۲ (۲) $\frac{4}{7}$ ۳ (۳) $\frac{7}{9}$ ۴ (۴) $\frac{5}{11}$

۱۳۳- در مستطیل $ABCD$ مطابق شکل زیر، اگر $AB=3AD$ و $\hat{N}_1=90^\circ$ باشد، طول ضلع AB چند برابر طول MC است؟



- ۱ (۱) $\frac{4}{3}$ ۲ (۲) $\frac{8}{7}$ ۳ (۳) $\frac{9}{8}$ ۴ (۴) ۲

۱۳۴- در دوزنقه $ABCD$ ، نقاط A' و B' وسط اضلاع AD و AB هستند. اگر $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ باشد،



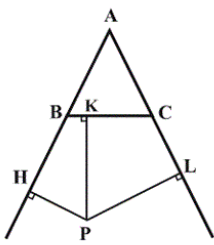
مساحت چهارضلعی $A'B'DD$ چه کسری از مساحت دوزنقه $ABCD$ است؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{5}$ ۲ (۲) $\frac{1}{8}$ ۳ (۳) $\frac{3}{8}$ ۴ (۴) $\frac{3}{10}$

۱۳۵- کدام مورد مثال نقض ندارد؟

- (۱) چهارضلعی‌ای که قطرهای آن نیمساز زوایا باشند، لوزی است.
- (۲) چهارضلعی‌ای که قطرهايش بر هم عمود باشند، لوزی است.
- (۳) چهارضلعی‌ای که قطرهايش با هم برابر باشند، مستطیل است.
- (۴) چندضلعی‌ای که زوایایش با هم برابر باشند، منتظم است.

۱۳۶- در شکل مقابل ABC متساوی الاضلاع، $PH = 3\sqrt{3}$ ، $PK = 4\sqrt{3}$ و $PL = 5\sqrt{3}$ است. طول هر



ضلع مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۲

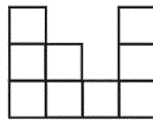
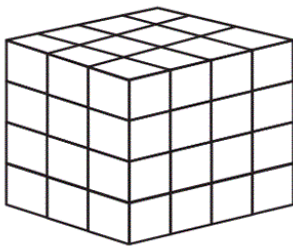
۱۳۷- دو صفحه متقاطع P و Q برهم عمودند و فصل مشترک آنها خط d است. گزینه نادرست کدام است؟

- (۱) هر صفحه موازی با P ، بر صفحه Q عمود است.
(۲) هر صفحه عمود بر P ، با صفحه Q موازی است.
(۳) هر صفحه عمود بر خط d ، بر دو صفحه P و Q عمود است.
(۴) صفحه گذرنده از خط d و عمود بر P ، بر صفحه Q منطبق است.

۱۳۸- دو خط متناظر d و d' با صفحه P متقاطع هستند. چند خط یافت می شود که این دو خط را قطع کند و با صفحه P موازی باشد؟

- (۱) بی شمار
(۲) یک
(۳) دو
(۴) هیچ

۱۳۹- تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب هایی که باید برداشته شود تا نمای بالای شکل A به صورت شکل B باشد، کدام است؟



A

B

- (۱) ۲۷
(۲) ۲۱
(۳) ۱۸
(۴) ۱۲

۱۴۰- اگر صفحه P ، کره ای به شعاع R را در فاصله $\frac{R}{2}$ از مرکز کره قطع کند و مساحت سطح مقطع حاصل 18π باشد، شعاع کره

کدام است؟

- (۱) $\sqrt{6}$
(۲) $2\sqrt{6}$
(۳) $3\sqrt{6}$
(۴) $4\sqrt{6}$

۱۲۱- عدد $A = a^23b5c$ بر ۹۹۰ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم A بر ۸ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۲۲- ۳۶ متر پارچه به قیمت $xy39y$ تومان خریداری شده است. اگر قیمت هر متر پارچه کمتر از هزار تومان و عددی طبیعی بر حسب تومان باشد، آن گاه قیمت هر متر پارچه چند تومان است؟

- (۱) ۷۶۱ (۲) ۸۳۱ (۳) ۶۷۱ (۴) ۹۵۱

۱۲۳- هرگاه سال نو با روز جمعه آغاز شود، چهارشنبه سوری همان سال چندم اسفند است؟ (منظور از چهارشنبه سوری، آخرین سه شنبه سال است.)

- (۱) ۲۵ اسفند (۲) ۲۶ اسفند (۳) ۲۷ اسفند (۴) ۲۸ اسفند

۱۲۴- چند عدد پنج رقمی به صورت $a82b5$ وجود دارد که باقی مانده تقسیم آن بر ۳۳ برابر ۱ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۲۵- معادله هم نهشتی $11x \equiv 33 \pmod{22}$ ، در مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲

۱۲۶- معادله $24x \equiv 100 \pmod{19}$ در کدام یک از بازه های زیر جواب ندارد؟ $(x \in \mathbb{Z})$

- (۱) $[0, 10]$ (۲) $[5, 15]$ (۳) $[10, 20]$ (۴) $[15, 25]$

۱۲۷- می خواهیم ۵۱ کیلو شکر را در کیسه های ۲ کیلویی و ۵ کیلویی بسته بندی کنیم. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۲۸- مجموع ارقام بزرگ ترین عدد طبیعی دو رقمی y که در معادله سیاله $8x + 11y = 9$ صدق می کند، کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۱۲۹- اگر $3x \equiv 6 \pmod{21}$ و $2x + 3y \equiv 1 \pmod{7}$ باشند، بیش ترین مقدار باقی مانده تقسیم عدد x^213y بر ۹ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۴

۱۳۰- معادله $\Delta x + 10y + n = n^2$ ، به ازای چند مقدار n از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ در \mathbb{Z} دارای جواب است؟

۳۰ (۴)

۴۰ (۳)

۵۰ (۲)

۶۰ (۱)

آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۴۱- اگر گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ نادرست باشد، آنگاه کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

(۱) p ، q و r همگی نادرست هستند.

(۲) p و r درست و q نادرست است.

(۳) p درست و q و r نادرست هستند.

(۴) p و q درست و r نادرست است.

۱۴۲- مجموعه $A - (B \cup C)$ لزوماً با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر نیست؟

(۱) $(A - B) - C$

(۲) $(A - B) \cap (A - C)$

(۳) $(A - C) - B$

(۴) $A - (B - C)$

۱۴۳- اگر A و B دو زیرمجموعه به ترتیب ۴ و ۷ عضوی از مجموعه مرجع و ۱۰ عضوی U باشند، مجموعه $(A' \times B')$ چند عضو

دارد؟

۴۸ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

۱۴۴- ۴ فرد a ، b ، c و d در یک مسابقه شرکت کرده‌اند که فقط یک برنده دارد. شانس برنده شدن آنها به صورت

$P(a) = \frac{P(b)}{3} = P(c) = \frac{P(d)}{2}$ است. احتمال آنکه a یا d برنده شوند، کدام است؟

$\frac{5}{7}$ (۴)

$\frac{4}{7}$ (۳)

$\frac{3}{7}$ (۲)

$\frac{2}{7}$ (۱)

۱۴۵- دو عضو از مجموعه $D = \{3k \mid k \in \mathbb{N}, k < 10\}$ را به تصادف و با هم انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع دو عدد انتخاب شده زوج

باشد، با چه احتمالی هر دو عدد فرد هستند؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

۱۴۶- در کیسه‌ای ۵ کارت با شماره‌های ۳، ۴، ۶، ۹ و ۱۰ وجود دارد. از این کیسه ۳ کارت با جایگذاری خارج می‌کنیم. اگر بدانیم

که دقیقاً ۲ بار کارت با عدد ۳ خارج شده است، با کدام احتمال مجموع سه عدد ظاهر شده برابر با ۱۵ می‌باشد؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{1}{7} \quad (4)$$

۱۴۷- جعبه A دارای ۳ مهره قرمز و ۱ مهره سفید و جعبه B دارای ۱ مهره سفید و ۱ مهره قرمز است. از جعبه A سه مهره به

تصادف انتخاب کرده و در جعبه B می‌ریزیم و سپس از جعبه B، دو مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این دو مهره قرمز

هستند؟

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{5}{8} \quad (4)$$

۱۴۸- دو ظرف داریم که در ظرف اول، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم، ۵ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. از اولی

۲ مهره و از دومی ۳ مهره به تصادف برداشته و در ظرف جدیدی می‌ریزیم. سپس از ظرف جدید یک مهره بیرون می‌آوریم و

مشاهده می‌کنیم که سفید است. با کدام احتمال این مهره متعلق به ظرف اول بوده است؟

$$\frac{2}{7} \quad (1) \quad \frac{3}{7} \quad (2) \quad \frac{3}{8} \quad (3) \quad \frac{5}{8} \quad (4)$$

۱۴۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم، $P(B-A) = 0/2$ و $P(A \cap B) = 0/3$ باشند، حاصل $P(A' \cap B')$ کدام است؟

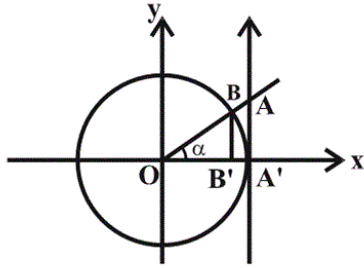
$$0/4 \quad (1) \quad 0/3 \quad (2) \quad 0/2 \quad (3) \quad 0/1 \quad (4)$$

۱۵۰- دانش‌آموزی به ۳ تست سه‌گزینه‌ای به طور تصادفی پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال حداقل به دو تست، به طور صحیح پاسخ

می‌دهد؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7}{27} \quad (3) \quad \frac{2}{9} \quad (4)$$



۸۱- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار OB' کدام است؟

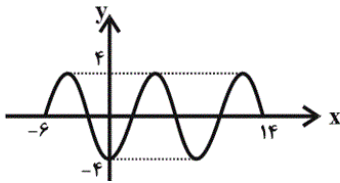
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\sqrt{3}$

۸۲- دوره تناوب تابع با ضابطه $y = 3 \sin cx - 2$ برابر π است. قدرمطلق مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع با ضابطه

$y = \pi \sin(-x) + c$ کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۸۳- اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f\left(-\frac{32}{3}\right)$ کدام است؟



- (۱) $2\sqrt{3}$
- (۲) $-2\sqrt{3}$
- (۳) ۲
- (۴) -۲

۸۴- اگر $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{18}\right)$ و $\tan 3\alpha = 5k - 1$ باشد، k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۸۵- اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، $\tan(3\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$
- (۲) $\frac{2}{11}$
- (۳) $\frac{5}{11}$
- (۴) $-\frac{3}{4}$

۸۶- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ برابر T باشد، تابع f در بازه‌های $(0, \frac{T}{2})$ و $(\frac{T}{2}, T)$ به ترتیب چگونه است؟

(۲) صعودی - نزولی

(۱) صعودی - صعودی

(۴) نزولی - نزولی

(۳) نزولی - صعودی

۸۷- جواب کلی معادله $\tan 4x = \frac{1}{\tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۲) $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{24}$

(۱) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{24}$

(۴) $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$

(۳) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$

۸۸- معادله $2\sin^2 x + 3\cos x = 3$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۸۹- تعداد جواب‌های معادله $\sin x(1 - 2\sin^2 x) = 1 - \sin 2x \cos x$ در بازه $(-2\pi, 3\pi)$ کدام است؟

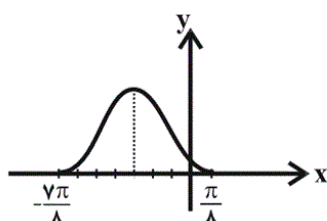
(۲) ۷

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۸

۹۰- نمودار زیر، تابع $y = \sin^2(ax + b\pi)$ را در یک دوره تناوب نمایش می‌دهد. $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{3}{8}$

(۴) $\frac{7}{8}$

(۳) $\frac{5}{8}$

۱۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} |A|^2 & |A| \\ ۳ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر $|A|$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) صفر
(۴) -۱

۱۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $\frac{1}{۲}A^2$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۱
(۳) ۴
(۴) -۴

۱۱۳- اگر $|A| = ۴$ و A یک ماتریس ۲×۲ باشد، آنگاه $\left| \frac{|A|}{۲} A \right| + \left| \frac{۲}{|A|} A \right|$ کدام است؟

- (۱) ۱۸
(۲) ۱۶
(۳) ۱۷
(۴) ۱۵

۱۱۴- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ و $A^2 = -I$ باشد، آنگاه $|I - A|$ کدام می تواند باشد؟ ($|A| > ۰$)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۱۵- معادله $\begin{vmatrix} ۰ & x-a & x-b \\ a-x & ۰ & x-c \\ b-x & c-x & ۰ \end{vmatrix} = ۰$ دارای چند جواب حقیقی است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بی شمار

۱۱۶- با افزودن یک واحد به کدام درایه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند؟

(۱) a_{22}

(۲) a_{33}

(۳) a_{23}

(۴) a_{32}

۱۱۷- یک رویه مخروطی مفروض است. اگر صفحه P با مولد این رویه موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، فصل مشترک این

صفحه و سطح مخروطی کدام است؟

(۱) سهمی

(۲) بیضی

(۳) هذلولی

(۴) دو خط موازی

۱۱۸- پاره خط AB و خط d در صفحه مفروض‌اند. اگر امتداد AB بر خط d عمود نباشد، آنگاه چند نقطه در صفحه وجود دارد که

از A و B به یک فاصله باشند و فاصله آنها از خط d برابر با طول پاره خط AB باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی‌شمار

۱۱۹- تعداد نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت A و خط ثابت d به ترتیب به فاصله‌های ثابت r و s باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۲۰- نقطه A داخل زاویه xOy قرار دارد. تعداد نقاطی از ناحیه داخل زاویه xOy که از دو ضلع زاویه به یک فاصله و از نقطه A

به فاصله r هستند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) صفر

(۴) ۱

۹۱- اگر $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل A^{-12} کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۹۲- حاصل عبارت $\sqrt{4 - \frac{3\sqrt{7}}{2}} + \sqrt{2 - \frac{\sqrt{7}}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-2 + \sqrt{7}$ (۲) $2 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ (۳) $-1 + \sqrt{7}$ (۴) ۱

۹۳- در یک دنباله حسابی $a_7 - a_4 = 20$ است. اگر جمله هفتم سه برابر جمله پنجم باشد، حاصل $a_8 - a_5$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

۹۴- در یک دنباله هندسی $\frac{a_7 + a_8}{a_6 + a_5} = 16$ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[3]{16}$ (۴) $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

۹۵- در یک دنباله حسابی، جمله هشتم سه برابر جمله سوم است. در این دنباله حاصل $\frac{S_{10}}{S_5}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۹

۹۶- عنكبوتی مسیری را مطابق شکل با شروع از نقطه O طی می‌کند، به طوری که طول هر پاره خطی که طی می‌کند، دو برابر طول پاره خط قبلی است. این عنكبوت چه تعداد از این پاره خطها را باید طی کند

تا به اندازه 1022cm حرکت کرده باشد؟ ($OA = 2\text{cm}$)

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰



۹۷- اگر $f = \{(1, -a + \sqrt{-2a}), (a, b), (1, 4), (-8, 3), (-2, 3)\}$ نمایش یک تابع باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۵ (۴) -۵

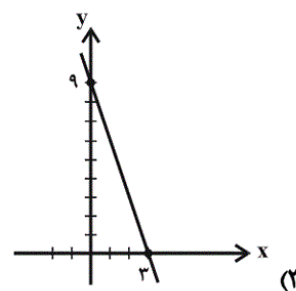
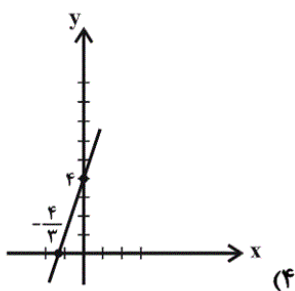
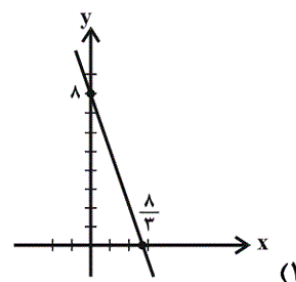
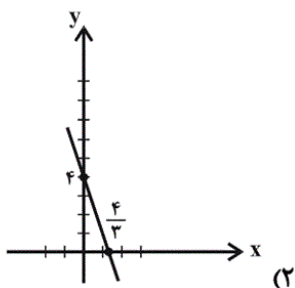
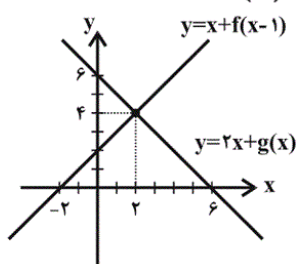
۹۸- اگر تابع $f = \{(1, -2), (2, 4), (a+1, -2), (6, a), (b+2, 0), (c, b+a)\}$ یک به یک باشد، حاصل $\frac{b}{c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۹- اگر $\frac{13}{2} < [x] < \frac{17}{3}$ باشد، حاصل $[-2x]$ چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- نمودار توابع $y = x + f(x-1)$ و $y = 2x + g(x)$ در شکل زیر رسم شده اند. نمودار تابع $y = f(x) + g(x)$ کدام است؟



۱۰۱- اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = \sqrt{4-x} + 1$ باشند، برد تابع $f \circ g(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 1]$ (۴) \mathbb{R}

۱۰۲- اگر f تابعی یک به یک، $f(-2) = \frac{5}{3}$ و $g(x) = 2 - 3f(5x-1)$ باشد، حاصل $g^{-1}(-3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۱۰۳- نمودار وارون تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، در چند نقطه خط $y = 3x$ را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۰۴- طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ به صورت $a = 3\sqrt{2}$ و $b = 4$ و زاویه بین آن‌ها θ است. اگر θ را 75° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{6}$

۱۰۵- نقطه A روی محیط بیرونی چرخ کامیونی که با سرعت ثابت $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ در حال حرکت است، قرار دارد. این نقطه پس از گذشت ۱

دقیقه n دور به علاوه $\frac{2}{3}$ دور کامل را طی می‌کند. n کدام است؟ (شعاع چرخ ۱ متر است و $\pi \simeq 3$)

- (۱) ۱۶۷ (۲) ۱۳۳ (۳) ۱۹۰ (۴) ۱۶۶

۱۰۶- مقدار عبارت $\frac{2 \sin 20^\circ + \cos 29^\circ}{\sin 16^\circ + 2 \cos 7^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) -3 (۴) ۱

۱۰۷- اگر $\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان θ در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) $-\frac{1}{3}$

۱۰۸- حاصل $\frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}{\sqrt{2 \tan x} + 2 \cot x}$ به ازای $x = 10^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sin 55^\circ$ (۴) $\cos 55^\circ$

۱۰۹- اگر $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ کدام است؟

۹ (۴)

۱۲ (۳)

۱۸ (۲)

۲۷ (۱)

۱۱۰- کمترین مقدار عبارت $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 1$ کدام است؟

$-\frac{5}{4}$ (۲)

-۲ (۱)

$-\frac{3}{2}$ (۴)

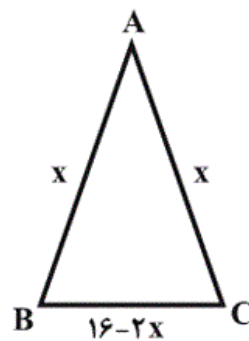
-۱ (۳)

(رضا عباسی اصل)

۱۳۱- www.riazisara.ir

فرض کنیم طول ساق مثلث برابر x باشد. در این صورت طول قاعده مثلث

برابر با $16 - 2x$ خواهد بود.



حال بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:

$$\left. \begin{array}{l}
 x + x > 16 - 2x \Rightarrow 4x > 16 \Rightarrow x > 4 \\
 x + (16 - 2x) > x \Rightarrow 2x < 16 \Rightarrow x < 8
 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 < x < 8$$

بنابراین تنها مقادیر صحیح ممکن برای x ، ۵، ۶ و ۷ هستند.

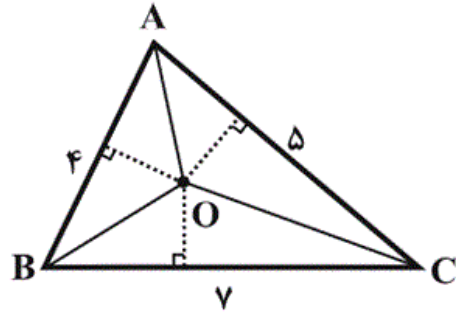
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۱، ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱



نقطه برخورد نیمسازهای هر مثلث، از سه ضلع آن به یک فاصله‌اند. این

فاصله را h می‌نامیم. داریم:

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABOC}} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC}} = \frac{\frac{1}{2}h \times \gamma}{\frac{1}{2}h \times ۴ + \frac{1}{2}h \times ۵} = \frac{\frac{\gamma}{2}h}{\frac{9}{2}h} = \frac{\gamma}{9}$$

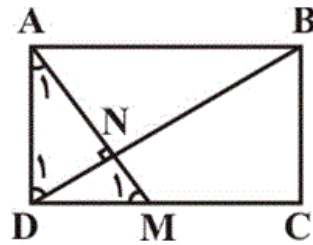
(هندسه ۱- ترسیم‌های هندسی و استدلال: صفحه‌های ۱۱، ۱۲ و ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle ADN : \hat{D}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ \\ \triangle ADM : \hat{M}_1 + \hat{A}_1 = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{M}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{D}_1 = \hat{M}_1 \\ \hat{D} = \hat{A} = 90^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle BAD$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}AB}{DM} = \frac{AB}{\frac{1}{3}AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DM} = 9 \Rightarrow \frac{AB}{AB - DM} = \frac{9}{9 - 1} \Rightarrow \frac{AB}{CD - DM} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MC} = \frac{9}{8}$$

(هندسه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{AA'}{A'D} = \frac{AB'}{B'B} = 1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} A'B' \parallel BD$$

$$\Rightarrow \triangle AA'B' \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{S_{\triangle AA'B'}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{AA'}{AD}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در صورت}} \frac{S_{A'B'BD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'BD} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABD} \quad (1)$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و BCD به دلیل برابر بودن ارتفاع،

برابر با نسبت قاعده‌های آنها است. بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{5}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{2}{5} S_{ABCD} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S_{A'B'BD} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} S_{ABCD} = \frac{3}{10} S_{ABCD}$$

(هنر سه ۱- قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷ و ۴۵ تا ۵۱)

 ۴ ✓

 ۳

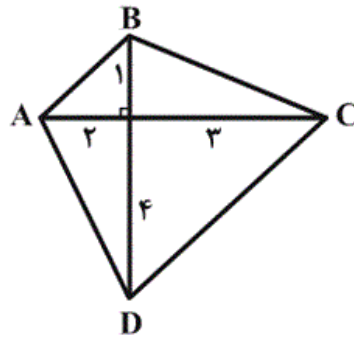
 ۲

 ۱

مثال نقض گزینه‌های «۲» و «۳»:

چهارضلعی شکل زیر هم قطرهای برابر دارد و هم قطرهای عمود بر هم، ولی

نه مستطیل است و نه لوزی!



مثال نقض گزینه «۴»: مستطیل چهار زاویه برابر دارد ولی منتظم نیست.

گزینه ۱ قابل اثبات است و هیچ مثال نقضی ندارد.

(هندسه ۱ - چند ضلعی‌ها: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

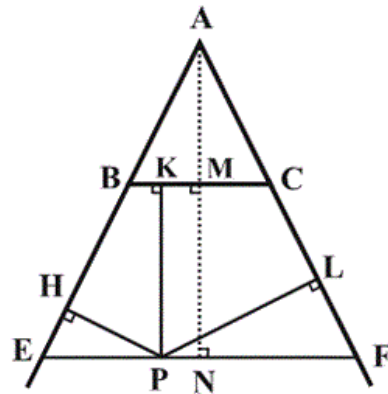
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از نقطه P خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا امتداد اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند.



از نقطه A، عمودی بر BC (و در نتیجه EF) رسم می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الاضلاع است، زیرا سه زاویه 60° دارد و در نتیجه طول ارتفاع‌های این مثلث برابر یکدیگر است. بنا به فعالیت ۱ صفحه ۶۸ کتاب درسی هندسه ۱ داریم:

$$PH + PL = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AN \Rightarrow ۸\sqrt{۳} = AM + MN$$

$$\xrightarrow{MN=PK} ۸\sqrt{۳} = AM + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow AM = ۴\sqrt{۳}$$

اگر طول هر ضلع مثلث ABC را a فرض کنیم، داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۸$$

(هندسه ۱- چند ضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

دو صفحه عمود بر یک صفحه، لزوماً با یکدیگر موازی نیستند، پس گزینه «۲» در حالت کلی درست نیست.

(هندسه ۱- تبسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحه موازی با صفحه P، دو خط d و d' را قطع می‌کند و خط واصل بین دو نقطه تلاقی، شرایط مسئله را داراست.

(هندسه ۱- تبسم فضایی: صفحه‌های ۷۸ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱

(فرشاد فرامرزی)

مکعب بزرگ از $4 \times 4 \times 3 = 48$ مکعب کوچک تشکیل شده است. حداکثر مکعب‌هایی که می‌تواند برداشته شود برابر است با: $48 - 9 = 39$ که در این صورت تنها یک ردیف به شکل B باقی می‌ماند.

همچنین حداقل باید $3 \times 4 = 12$ مکعب از شکل برداشته شود (۳ ردیف مکعب از بالا به پایین که هر کدام شامل ۴ مکعب هستند). در نتیجه تفاضل حداقل و حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شود، برابر است با:

$$39 - 12 = 27$$

(هندسه ۱- تبسم فضایی: صفحه‌های ۱۷ تا ۹۱)

۴

۳

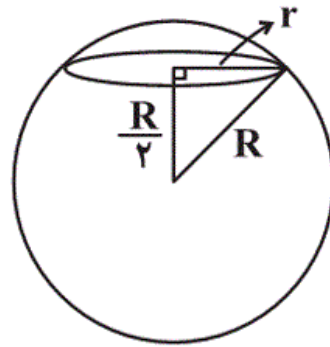
۲

۱

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

$$S = \pi r^2 = \frac{3}{4} \pi R^2 = 18\pi \text{ (سطح مقطع)}$$

$$\Rightarrow R^2 = 24 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}$$



(هندسه ۱- تجسم فضایی: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

A بر ۹، ۱۰ و ۱۱ بخش پذیر است $\Rightarrow 990 = 9 \times 10 \times 11$

$$A \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow A = \overline{a23b50}$$

$$A \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + 2 + 3 + b + 5 + 0 \equiv 0 \pmod{9} \Rightarrow a + b \equiv 8 \pmod{9} \Rightarrow a + b = 8 \text{ یا } 17$$

$$A \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 0 - 5 + b - 3 + 2 - a \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow b - a \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow b - a = 6 \text{ یا } (-5)$$

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ b - a = 6 \end{cases} \Rightarrow b = 7, a = 1 \Rightarrow A = \overline{123750} \equiv \overline{750} \equiv 6 \pmod{8}$$

مسئله به ازای حالت‌های دیگر جواب ندارد.

توجه: باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۸ با باقی‌مانده تقسیم سه رقم آخر آن بر

۸ برابر است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳

۲

۱

$$36 \mid x739y \Rightarrow x739y \equiv 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x739y} \equiv 0 \Rightarrow 9y \equiv 0 \Rightarrow 90 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 2 \\ \overline{x739y} \equiv 0 \Rightarrow x + y + 19 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv 8 \end{array} \right.$$

اگر $y = 2$ ، آنگاه $x + 2 \equiv 8$ ، پس $x \equiv 6$ یعنی $x = 6$ و از آنجا که قیمت

۳۶ متر پارچه ۶۷۳۹۲ تومان است، پس قیمت هر متر پارچه بیش از هزار تومان (۱۸۷۲ تومان) خواهد بود که قابل قبول نیست.

اگر $y = 6$ ، آنگاه $x + 6 \equiv 8$ ، پس $x \equiv 2$ یعنی $x = 2$ و از آنجا که قیمت

۳۶ متر پارچه ۲۷۳۹۶ تومان است؛ یعنی هر متر $\frac{27396}{36} = 761$ تومان

می‌شود.

توجه: باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۴ با باقی‌مانده تقسیم ۲ رقم آخر آن بر

۴ برابر است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

بنابراین ابتدا اختلاف اول اسفند با اول فروردین همان سال را حساب می‌کنیم:

$$30 + \underbrace{5 \times 31}_{\text{اردیبهشت تاشهریور}} + \underbrace{5 \times 30}_{\text{مهر تابهمن}} + 1 = 336$$

↓ فروردین
 ↓ اول اسفند

حال اگر اول فروردین را که روز جمعه است، به عنوان مبدأ در نظر بگیریم،

مطابق جدول زیر متوجه می‌شویم که اول اسفند آن سال نیز جمعه است:

$$336 \equiv 0 \pmod{7}$$

جمعه	شنبه	۱شنبه	۲شنبه	۳شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

با توجه به آنکه اول اسفند جمعه است، ۸، ۱۵ و ۲۲ اسفند نیز جمعه خواهد

بود، در نتیجه سه‌شنبه آخر سال ۲۶ اسفندماه خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۲۴)

۴

۳

۲

۱

باقی مانده این عدد پنج رقمی بر ۱۱ و ۳ برابر با ۱ است، پس داریم:

$$\overline{a\lambda^3 b\delta^{11}} \equiv \delta - b + 3 - \lambda + a \equiv a - b \equiv 1$$

با توجه به این که a و b رقم هستند، پس $a - b = 1$ و در نتیجه $a = b + 1$.

$$\overline{a\lambda^3 b\delta^3} \equiv \delta + b + 3 + \lambda + a \equiv a + b + 16 \equiv a + b + 1 \equiv 1$$

$$\Rightarrow a + b \equiv 0 \Rightarrow (b + 1) + b \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv -1 \Rightarrow 2b \equiv 2 \Rightarrow b \equiv 1$$

با توجه به این که b رقم است، مقدار آن ۱، ۴ و ۷ می تواند باشد. بنابراین

مقادیر a و b عبارت اند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 2 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} b = 4 \\ a = 5 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} b = 7 \\ a = 8 \end{array} \right\}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۲۲ و ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$11x \equiv 33 \xrightarrow{\div 11} x \equiv 3 \Rightarrow x = 32k + 3$$

$$\xrightarrow{x \text{ سه رقمی است}} 100 \leq 32k + 3 \leq 999$$

$$\Rightarrow 97 \leq 32k \leq 996 \Rightarrow 4 \leq k \leq 31$$

$$\text{تعداد جوابها} : 31 - 4 + 1 = 28$$

۲۸ مقدار برای k به دست می آید، پس ۲۸ مقدار هم برای x وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه های ۲۴ و ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

$$24x \equiv 100 \pmod{19} \xrightarrow[\substack{\div 4 \\ (19,4)=1}]{\div 4} 6x \equiv 25 \pmod{19} \xrightarrow[\substack{\div 6 \\ (19,6)=1}]{\div 6} 6x \equiv 25 \pmod{19} - 19 \equiv 6 \pmod{19}$$

$$x \equiv 1 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 1 \in [0,10] \\ k=1 \Rightarrow x=20 \Rightarrow 20 \in [10,20], 20 \in [15,25] \end{cases}$$

ولی همان طور که می بینیم هیچ جوابی از این معادله در بازه $[5,15]$ قرار

ندارد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه های ۲۴ و ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$2x + 5y = 51 \Rightarrow 5y \equiv 51 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 2k + 1$$

$$2x + 5(2k + 1) = 51 \Rightarrow 2x = -10k + 46 \Rightarrow x = -5k + 23$$

چون تعداد کیسه‌ها عددی صحیح و نامنفی است، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow -5k + 23 \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{23}{5} \\ y \geq 0 \Rightarrow 2k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} \\ \rightarrow 0 \leq k \leq 4 \end{array}$$

پس k می‌تواند مقادیر صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ را بپذیرد، یعنی بسته‌بندی شکر به ۵ طریق امکان‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

$$8x + 11y = 9 \Rightarrow 11y \equiv 9 \Rightarrow 3y \equiv 9 \xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (8, 3)=1}]{y \equiv 3} y \equiv 3$$

$$\Rightarrow y = 8k + 3$$

$$y < 100 \Rightarrow 8k + 3 < 100 \Rightarrow k \leq 12 \Rightarrow y_{\max} = 8 \times 12 + 3 = 99$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 9 = 18$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیوان دارایی)

$$3x \equiv 6 \xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (21,3)=3}]{21} x \equiv 2 \Rightarrow x = 7k + 2$$

$$2x + 3y \equiv 1 \Rightarrow 2(2) + 3y \equiv 1 \Rightarrow 3y \equiv -3$$

$$\xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (7,3)=1}]{7} y \equiv -1 \equiv 6 \Rightarrow y = 7k' + 6$$

با توجه به این که x و y ، ارقام یک عدد هستند، پس برای x ، دو مقدار ۲

و ۹ برای y ، تنها مقدار ۶ قابل قبول است. داریم:

$$x = 2, y = 6 \Rightarrow 22136 \equiv 2 + 2 + 1 + 3 + 6 \equiv 5$$

$$x = 9, y = 6 \Rightarrow 92136 \equiv 9 + 2 + 1 + 3 + 6 \equiv 3$$

بنابراین بیشترین مقدار باقی مانده در این تقسیم، برابر ۵ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

شرط وجود جواب برای معادله $n^3 - n = 5x + 10y = 5n$ در \mathbb{Z} ، آن است

که $n^3 - n \equiv 0 \pmod{5}$. بنابراین داریم:

$$n^3 - n \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n = 5k & (k \in \mathbb{Z}) \\ n-1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n = 5k+1 & (k \in \mathbb{Z}) \\ n+1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow n = 5k+4 & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

با توجه به این که از هر یک از فرم‌های $5k$ ، $5k+1$ و $5k+4$ ، 20 عدد

در مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ وجود دارد، پس به ازای 60 مقدار n ،

معادله مورد نظر در \mathbb{Z} دارای جواب است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرحسین ابومصوب)

گزاره شرطی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ تنها در حالتی نادرست است که گزاره $(p \Rightarrow q)$ درست و گزاره $(p \Rightarrow r)$ نادرست باشد. با توجه به نادرستی $(p \Rightarrow r)$ ، لزوماً p درست و r نادرست است.

از طرفی با توجه به درستی $(p \Rightarrow q)$ و p ، نیز لزوماً درست خواهد بود.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C')$$

با توجه به تساوی فوق، داریم:

$$\text{گزینه «۱» : } A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

$$\text{گزینه «۲» : } A \cap (B' \cap C') = (A \cap A) \cap (B' \cap C')$$

$$= (A \cap B') \cap (A \cap C') = (A - B) \cap (A - C)$$

$$\text{گزینه «۳» : } A \cap (B' \cap C') = A \cap (C' \cap B') = (A \cap C') \cap B'$$

$$= (A - C) - B$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$n(A' \times B') = n(A') \times n(B')$$

$$= (n(U) - n(A)) \times (n(U) - n(B)) = (10 - 4) \times (10 - 7) = 18$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1$$

$$P(a) + 2P(a) + P(a) + 2P(a) = 1 \Rightarrow P(a) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(d) = \frac{2}{7}$$

$$P(\{a, d\}) = P(a) + P(d) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۱ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$D = \{3, 6, 9, \dots, 27\}$$

پنج عضو از D فرد و چهار عضو دیگر آن زوج هستند. می‌دانیم مجموع دو عدد زمانی زوج است که هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند، بنابراین فضای نمونه‌ای کاهش یافته شامل حالت‌هایی است که هر دو عدد زوج و یا هر دو عدد فرد هستند.

$$n(S) = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$$

تعداد اعضای پیشامد A که در آن هر دو عدد انتخابی فرد باشند، برابر

$$n(A) = \binom{5}{2} = 10 \quad \text{است با:}$$

بنابراین احتمال وقوع این پیشامد برابر $P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ است.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

تعداد حالاتی که دقیقاً دو بار عدد سه خارج شده باشد، برابر است با:

$$n(S) = \binom{3}{2} \times 4 = 3 \times 4 = 12$$

حالات مطلوب عبارت‌اند از $(9, 3, 3)$ ، $(3, 9, 3)$ و $(3, 3, 9)$

۴

۳

۲

۱ ✓

برای انتخاب ۳ مهره از جعبه A دو حالت داریم:

الف) هر سه مهره قرمز باشند.

ب) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد.

احتمال آن که دو مهره خارج شده از جعبه B قرمز باشند به تفکیک

حالت‌های «الف» و «ب» عبارت‌اند از:

$$\text{الف) } \frac{\binom{3}{3} \binom{4}{2}}{\binom{4}{3} \binom{5}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} = \frac{6}{40}$$

$$\text{ب) } \frac{\binom{3}{2} \binom{1}{1} \binom{3}{2}}{\binom{4}{3} \binom{5}{2}} = \frac{3 \times 1}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{40}$$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{6}{40} + \frac{9}{40} = \frac{6+9}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از قاعده بیز داریم:

$$P(\text{سفید بودن} | \text{ظرف اول}) = \frac{P(\text{ظرف اول}) \times P(\text{سفید بودن} | \text{ظرف اول})}{P(\text{سفید بودن})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عزیزاله علی اصغری)

$$P(B - A) = P(B \cap A') = P(B)P(A')$$

$$\Rightarrow P(B)P(A') = 0/2 \quad (۱)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow P(A)P(B) = 0/3 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{P(B)P(A')}{P(B)P(A)} = \frac{0/2}{0/3} \Rightarrow \frac{1 - P(A)}{P(A)} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 3 - 2P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} = 0/75 \xrightarrow{(۲)} P(B) = 0/5$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0/4 \times 0/5 = 0/2$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سروش موثینی)

احتمال درست پاسخ دادن به طور تصادفی به یک تست سه گزینه‌ای $\frac{1}{3}$

است، پس $p = \frac{1}{3}$ و $1 - p = \frac{2}{3}$ است. اگر پیشامد پاسخ صحیح دادن به حداقل دو سؤال را A بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۶۷ تا ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

$$AA' = \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha \Rightarrow OB' = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

دوره تناوب $y = 3 \sin cx - 2$ برابر $\frac{2\pi}{|c|}$ است. پس:

$$\frac{2\pi}{|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 2$$

ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \pi \sin(-x) + c$ برابر $\pi + c$ و $-\pi + c$ می‌باشد. پس:

$$-\pi + c + \pi + c = 2c \Rightarrow |2c| = 2|c| = 4$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{4}$ (یا

$$f(x) = -4 \cos\left(-\frac{\pi x}{4}\right) \text{ در می‌آید و داریم:}$$

$$f\left(-\frac{32}{3}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{-32}{3}\right) = -4 \cos\left(\frac{-8\pi}{3}\right)$$

$$= -4 \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -4 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4 \times \frac{-1}{2} = 2$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{4}$ نیز همین

است.

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{18} \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3\alpha < \frac{\pi}{6}$$

با توجه به اینکه $\tan 3\alpha$ در این بازه، تعریف شده و اکیداً صعودی است،

داریم:

$$\tan 0 \leq \tan 3\alpha < \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \tan 3\alpha < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 0 \leq \delta k - 1 < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \delta k < 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 1 \leq \delta k < \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta} \leq k < \frac{3 + \sqrt{3}}{15}$$

در نتیجه k در این بازه هیچ مقدار صحیحی ندارد.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی‌اکبر علیزاده)

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan(3\alpha) = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3} + 2}{1 - \left(-\frac{4}{3} \times 2\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{2}{11}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۴۲)

 ۴

 ۳

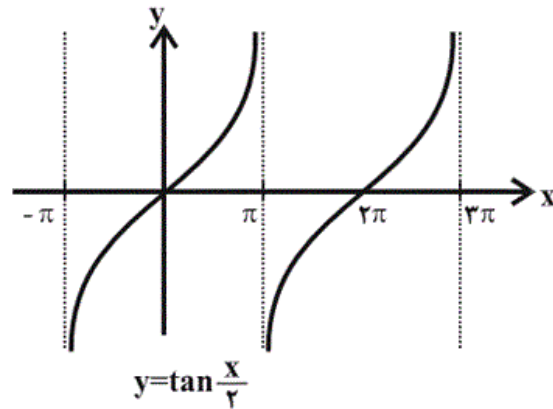
 ۲

 ۱

ابتدا ضابطه f را ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می آید:



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ است. بنابراین نمودار

تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۲۴ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید جعفری کافی آباد)

$$\tan 4x = \cot \left(\frac{\pi}{3} + 4x \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - 4x \right)$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan \left(\frac{\pi}{6} - 4x \right)$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{6} - 4x \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{48}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه های ۳۵ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 3 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

این معادله را همانند معادله درجه ۲ حل می‌کنیم و داریم:

$$\Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \cos x = 1 \text{ یا } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$

جواب‌های بازه $[-\pi, \pi]$ ، $-\frac{\pi}{3}$ ، 0 و $\frac{\pi}{3}$ هستند.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱

معادله را ساده تر می نویسیم:

$$\sin x \underbrace{(1 - 2 \sin^2 x)}_{\cos 2x} = 1 - \sin 2x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = 1$$

$$\sin(2x + x) = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{6}$$

حال جواب به دست آمده را بین -2π و 3π قرار می دهیم و مقادیر صحیح k را به دست می آوریم:

$$-2\pi < \frac{(4k+1)\pi}{6} < 3\pi \xrightarrow{\times \frac{6}{\pi}} -12 < 4k+1 < 18$$

$$\Rightarrow -3/25 < k < 4/25$$

پس مقادیر صحیح k عبارت اند از: $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

(مسابقه ۲- مثلثات: صفحه های ۳۵ تا ۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیدعادل حسینی)

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \Rightarrow \sin^2(ax + b\pi) = \frac{1 - \cos(2ax + 2b\pi)}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2ax + 2b\pi)$$

بنابراین دوره تناوب تابع این سؤال برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$. از طرفی از نمودار

مشخص است که $T = \pi$ است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حالت اول: $a = 1 \Rightarrow y = \sin^2(x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \sin^2\left(b + \frac{1}{8}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b + \frac{1}{8}$ باید عددی صحیح باشد.

حالت دوم: $a = -1 \Rightarrow y = \sin^2(-x + b\pi)$

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \sin^2\left(b - \frac{1}{8}\right)\pi = 0$$

این یعنی $b - \frac{1}{8}$ باید عددی صحیح باشد.

حال اگر اعداد صحیح $+1$ و -1 را به ترتیب با جواب‌های متناظر به دست آمده برای آن‌ها جمع کنیم، عدد حاصل صحیح باقی خواهد ماند؛ بنابراین داریم:

$$a + b \pm \frac{1}{8} = k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a + b = k \pm \frac{1}{8} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

در بین گزینه‌ها، فقط $\frac{7}{8}$ است که آن را به فرم بالا می‌توان نوشت.

(حسابان ۲- مثلثات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با محاسبه $|A|$ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A|^2 & |A| \\ 3 & 4|A| \end{vmatrix} = 4|A|^3 - 3|A|$$

$$\Rightarrow 4|A|^3 = 4|A| \Rightarrow \begin{cases} |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1 \\ |A| = 0 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر مختلف $|A|$ برابر است با:

$$0 + 1 - 1 = 0$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا با استفاده از روش ساروس، دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (3 + 0 + 6) - (-1 + 0 + 12)$$

$$= 9 - 11 = -2$$

$$\left| \frac{1}{2} A^3 \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A|^3 = \frac{1}{8} (-2)^3 = -1$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱

$$\left| \frac{|A|}{2} A \right| + \left| \frac{2}{|A|} A \right| = \frac{|A|^2}{4} |A| + \frac{4}{|A|^2} |A|$$

$$\frac{|A|^3}{4} + \frac{4}{|A|} = \frac{64}{4} + \frac{4}{4} = 16 + 1 = 17$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱

(کیوان دارابی)

$$A^2 = -I \Rightarrow |A^2| = |-I| \Rightarrow |A|^2 = (-1)^2 |I| = 1 \xrightarrow{|A| > 0} |A| = 1$$

$$|I - A|^2 = |(I - A)^2| = |I^2 - 2AI + A^2| = |I - 2A - I|$$

$$= |-2A| = (-2)^2 |A| = 4 \times 1 = 4 \Rightarrow |I - A| = \pm 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فسرو فلعت‌بری)

اگر دترمینان را بر حسب سطر اول آن بسط دهیم، داریم:

$$-(x-a) \begin{vmatrix} a-x & x-c \\ b-x & \circ \end{vmatrix} + (x-b) \begin{vmatrix} a-x & \circ \\ b-x & c-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x-a)[\circ - (x-c)(b-x)] + (x-b)[(a-x)(c-x) - \circ]$$

$$= -(x-a)(x-c)(x-b) + (x-b)(x-a)(x-c) = \circ$$

بنابراین، حاصل دترمینان به ازای تمامی مقادیر حقیقی x ، برابر صفر است و

در نتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به گزینه‌ها، اگر دترمینان ماتریس را با بسط بر حسب سطر سوم به دست آوریم، داریم:

$$|A| = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times 9 - 7 \times 0 + 1 \times (-3)$$

واضح است که با تغییر مقدار $a_{32} = 7$ ، دترمینان تغییر نمی‌کند، چون برای محاسبه دترمینان، این درایه در صفر ضرب می‌شود؛ ولی با تغییر درایه a_{33} ، حاصل دترمینان عوض می‌شود.

اگر دترمینان ماتریس را با بسط بر حسب سطر دوم به دست آوریم، داریم:

$$|A| = -4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 12 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -4 \times (-19) + 5 \times (-8) - 12 \times 1$$

همان‌طور که دیده می‌شود با تغییر درایه‌های a_{22} و a_{23} ، مقدار دترمینان عوض می‌شود.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر صفحه P با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند،

آنگاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک سهمی است.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

 ۱

 ۲

 ۳

 ۴

پاسخ مسئله اشتراک یا تلاقی دو مکان هندسی است. یکی از آنها مکان

هندسی نقاط متساوی‌فاصله از A و B است که همان عمودمنصف پاره‌خط

AB (خط Δ) می‌باشد. مکان هندسی دیگر، مجموعهٔ نقاطی است که از

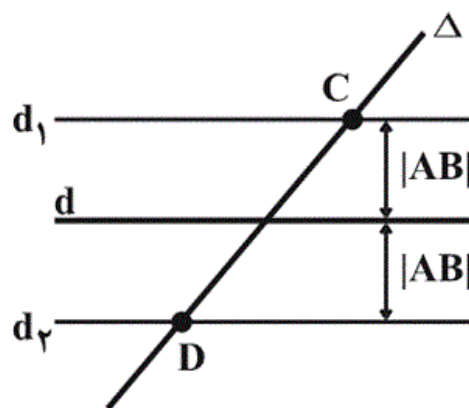
خط d به فاصله $|AB|$ قرار دارند. این مکان هندسی متشکل از دو خط

موازی با d در دو طرف آن و به فاصله $|AB|$ از آن است (خطوط d_1 و

d_2 در شکل). چون امتداد AB بر خط d عمود نیست، پس بر خطوط

موازی با آن نیز عمود نیست. در نتیجه عمودمنصف AB با این خطوط

موازی نیست و خطوط d_1 و d_2 را مطابق شکل به ترتیب در نقاط C و D



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

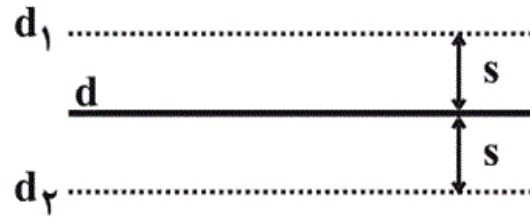
۴

۳ ✓

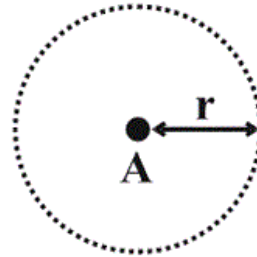
۲

۱

نقاطی که از خط d به فاصله s هستند، روی دو خط موازی با d قرار می‌گیرند.



نقاطی که از A به فاصله r هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r قرار می‌گیرند.



با توجه به محل قرار گرفتن این دو مکان هندسی در صفحه و مقادیر r و s ، اشتراک این دو مکان، ممکن است تهی باشد و یا این دو مکان هندسی، ۱، ۲، ۳ و یا ۴ نقطه اشتراک داشته باشند.

(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

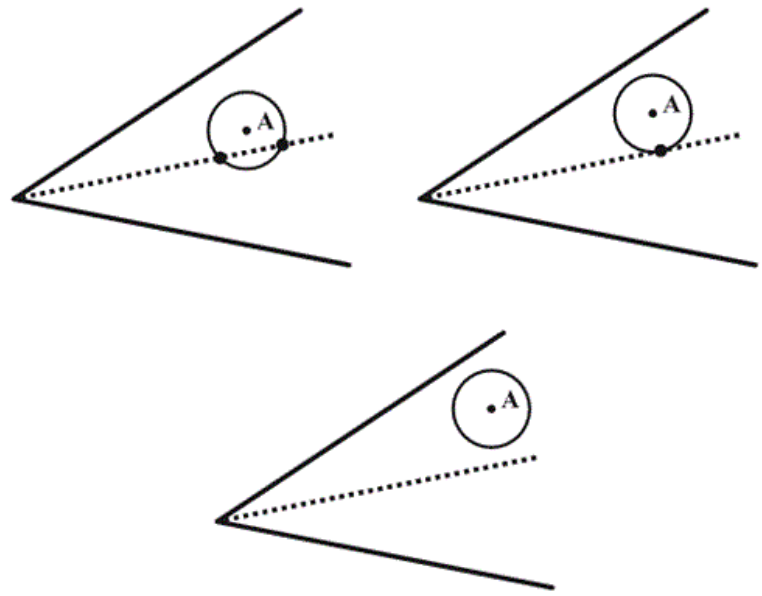
 ۲

 ۱

نقاط مطلوب از تلاقی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r ، با نیمساز زاویه

xOy به وجود می‌آید. خط و دایره ممکن است یکدیگر را در صفر، ۱ یا ۲

نقطه قطع کنند.



(هندسه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جهانبفش نیکنام)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 2^{-\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow A^{-12} = \left(2^{-\frac{1}{8}} \right)^{-12} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۵۹ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی اکبر علینزاده)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8-3\sqrt{7}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}} &= \sqrt{\frac{16-6\sqrt{7}}{4}} + \sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{7}-3)^2}{4}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{4}} = \frac{|\sqrt{7}-3|}{2} + \frac{|\sqrt{7}-1|}{2} \\ &= \frac{3-\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{7}-1}{2} = 1 \end{aligned}$$

(ریاضی ۱- توان‌های گویا و عبارت‌های جبری: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۳ و ۶۲ تا ۶۷)

۴

۳

۲

۱

(میلاد منصوری)

$$a_6^2 - a_4^2 = (a_6 - a_4)(a_6 + a_4) = 2d(2a_5) = 4a_5d = 20$$

$$\Rightarrow a_5d = 5$$

$$a_8^2 - a_6^2 = (a_8 - a_6)(a_8 + a_6) = 2d(2a_7)$$

$$= (4d)(2a_5) = 12da_5 = 12 \times 5 = 60$$

$$\Rightarrow a_8^2 - a_4^2 = (a_8^2 - a_6^2) + (a_6^2 - a_4^2) = 60 + 20 = 80$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است. یعنی:

$$a_3 + a_5 = a_1 q^2 + a_1 q^4 = a_1 q^2 (1 + q^2)$$

$$a_6 + a_8 = a_1 q^5 + a_1 q^7 = a_1 q^5 (1 + q^2)$$

$$\Rightarrow \frac{a_3 + a_5}{a_6 + a_8} = \frac{a_1 q^2 (1 + q^2)}{a_1 q^5 (1 + q^2)} = \frac{1}{q^3} = 16 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$$

(ریاضی ۱- مجموعه، الگو و دنباله: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(سید عادل حسینی)

$$a_8 = 3a_3 \Rightarrow a_1 + 7d = 3(a_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow a_1 + 7d = 3a_1 + 6d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{2a_1 - d}{2}\right)n \xrightarrow{2a_1=d} S_n = \frac{d}{2}n^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10^2}{5^2} = \frac{100}{25} = 4$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمید علیزاده)

$$2 + 2(2) + 2(2)^2 + \dots + 2(2)^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 1022$$

$$\Rightarrow -2(1-2^n) = 1022 \Rightarrow 2^n - 1 = 511$$

$$\Rightarrow 2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

(مسئله ۱- جبر و معادله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$-a + \sqrt{-2a} = 4 \Rightarrow \sqrt{-2a} = 4 + a \Rightarrow -2a = a^2 + 8a + 16$$

$$\Rightarrow a^2 + 10a + 16 = 0 \Rightarrow (a+8)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -8 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\Rightarrow f = \{(1, 4), (-2, b), (-8, 3), (-2, 3)\}$$

$$\Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = -2 + 3 = 1$$

(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید مدیر فراهانی)

$$(1, -2), (a+1, -2) \in f \Rightarrow a+1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

$$\xrightarrow{a=0} (6, 0), (b+2, 0) \in f \Rightarrow b+2 = 6 \Rightarrow b = 4$$

$$\xrightarrow{b=4} (2, 4), (c, 4+0) \in f \Rightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c} = 2$$

(مسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\frac{17}{3} < [x] < \frac{13}{2} \xrightarrow{[x] \in \mathbb{Z}} 6 \leq [x] \leq 6$$

$$\Rightarrow [x] = 6 \Rightarrow 6 \leq x < 7 \Rightarrow -14 < -2x \leq -12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14 < -2x < -13 \Rightarrow [-2x] = -14 \\ -13 \leq -2x < -12 \Rightarrow [-2x] = -13 \\ -12 \leq -2x < -11 \Rightarrow [-2x] = -12 \end{cases}$$

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۳)

۴ ✓

۳

۲

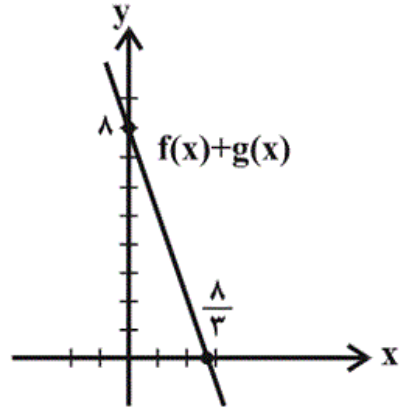
۱

(میلاد منصوری)

$$x + f(x-1) = x + 2 \Rightarrow f(x-1) = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$2x + g(x) = -x + 6 \Rightarrow g(x) = -3x + 6$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = -3x + 8$$



(ریاضی ۱- تابع: صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۰۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{4-x} + 1 \Rightarrow \begin{cases} D_g = (-\infty, 4] \\ R_g = [1, +\infty) \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{ D_g \mid g(x) \in D_f \} \Rightarrow D_{f \circ g} = D_g = (-\infty, 4]$$

$$(f \circ g)(x) = (\sqrt{4-x})^2 - 1 = 3 - x \Rightarrow R_{f \circ g} = [-1, +\infty)$$

(مسایان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

(سعید مدیر فراسانی)

102

$$g^{-1}(-3) = a \Rightarrow g(a) = -3 \Rightarrow 2 - 3f(5a-1) = -3$$

$$\Rightarrow f(5a-1) = \frac{5}{3} \Rightarrow 5a-1 = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

(مسایان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۴

۳

۲

۱

ابتدا ضابطه وارون تابع f را به دست می آوریم:

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow yx + 2y = 2x - 1 \Rightarrow x(y-2) = -2y-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+1}{2-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2-x}$$

بنابراین باید تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = \frac{2x+1}{2-x}$ و خط $y = 3x$ را

معین کنیم که برابر تعداد جواب‌های معادله $\frac{2x+1}{2-x} = 3x$ است. پس:

$$2x+1 = 6x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

مجموع ضرایب معادله بالا برابر صفر است. پس $x = 1$ و $x = \frac{1}{3}$ جواب‌های

آن هستند.

(مسئله ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

با توجه به این که می‌خواهیم θ را کاهش دهیم، این زاویه باید برابر 135°

باشد. طول اضلاع جدید را a' و b' و زاویه بین آنها را θ' می‌نامیم.

داریم:

$$a' = \sqrt{2}a = 6 \quad b' = b\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad \theta' = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ$$

۴ ✓

۳

۲

۱

طول مسیری که چرخ کامیون طی می کند، برابر محیط چرخ ضرب در تعداد

دوره های آن است که برابر با همان مسافتی است که کامیون طی می کند.

$$x \times 2\pi r = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1}{60} \text{h} \times \frac{1000 \text{m}}{1 \text{km}}$$

$$x \times 2 \times 3 \times 1 = 1000 \Rightarrow x = \frac{500}{3} = 166 \frac{2}{3}$$

چرخ ۱۶۶ دور به علاوه $\frac{2}{3}$ یک دور را طی می کند.

(مسایان ۱- مثلثات: صفحه های ۹۲ تا ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 29^\circ = \cos(36^\circ - 7^\circ) = \cos 7^\circ = \sin 20^\circ \\ \sin 16^\circ = \sin(18^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ \\ \cos 7^\circ = \sin 2^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ} = -\frac{1}{3}$$

(مسابقه ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

و چون در ربع سوم، علامت سینوس منفی است، $\sin \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ می باشد.

از طرفی:

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\cot \theta = \frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{3}$$

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$B = \sqrt{2 \tan x + 2 \cot x} = \sqrt{2 \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + 45^\circ\right)$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده، به ازای $x = 10^\circ$ ، برابر $\sin 55^\circ$

خواهد بود.

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha}$$

$$= 27(1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = 27 \times (1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2)$$

$$= 27 \left(1 - 3 \left(\frac{1}{3} \right) \right) = 27 \times \frac{2}{3} = 18$$

نکته:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶ و مسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = -(\sin^2 x - \sin x) + 1 = -\left(\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$$

(مسابقه ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱