سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حسابان 1 - 20 سوال

۸۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۶=۰$ باشند و ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+mx+n=۰$ برابر با $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند، حاصل $m-n$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۱۱ ۴) -۱۱

۸۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳|x+۶|-\sqrt{۴-۴x+x^۲}=۰$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۱۴ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۸۳- ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}+\frac{x-۲}{x^۲+x-۲}=\frac{۶x}{x^۲+۳x+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸۴- نقطهٔ $P(۴m\ ,\ ۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطهٔ $A(۰\ ,\ m)$ و $B(۶\ ,\ ۱۵)$ قرار دارد. m کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۸۵- دو ضلع مجاور یک مستطیل بر خطوط $y=x+۵$ و $x+y=۷$ واقع‌اند. اگر مبدأ مختصات یکی از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴/۵

۸۶- در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۴ جمله، مجموع تمام جملات ۳۶۰ و مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ است. جملهٔ بیست و سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۸۷- جواب معادلهٔ $(۳-\sqrt{-x})^۲=\sqrt{x^۲}$ در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $(۱\ ,\ ۲)$ ۲) $(۰\ ,\ ۱)$ ۳) $(-۲\ ,\ ۰)$ ۴) $(-۳\ ,\ -۲)$

۸۸- چند عدد حقیقی داریم که فاصلهٔ آن‌ها از عدد یک، با فاصلهٔ مربع آن‌ها از عدد یک برابر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹- مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y=\sqrt{x^2-2|x|+1}$ و $y=2-|x|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{9}{4}$

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{11}{4}$

۹۰- برای کدام محدودهٔ k، دو تابع $y=kx+1$ و $y=|x-2|+|x+1|$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $\mathbb{R}-(-3,2)$

۳) $(-3,2)$ ۴) $\mathbb{R}-(-2,1)$

۹۱- مجموعهٔ جواب معادلهٔ $x^2=|x+2|+|x^2-x+2|$ با شرط $x<1$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۹۲- اگر تعداد جواب‌های معادلهٔ $a=|-2|-1||x^2-1||$، ۶ عدد باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $1<a<3$ ۲) $1<a<2$ ۳) $2<a<3$ ۴) $3<a<4$

۹۳- در مثلث ABC با مختصات رئوس $A\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$، $B\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}6\\2\end{vmatrix}$، طول پاره‌خطی که از رأس A بر ضلع مقابل آن رسم می‌شود تا مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت یکسان تقسیم کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۹۴- خط $d_1: 3x-y=1$ معادلهٔ قطری از دایره و $d_2: 2y=6x+3$ بر دایره مماس است. مساحت این دایره کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{8}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۹۵- طول وتری که خط $y=2x-6$ در دایره‌ای به مرکز $(3,2)$ و شعاع ۳ ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

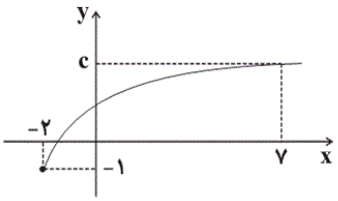
۹۶- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴ , ۰)$ از نمودار تابع $f(x) = ||x-۱|-۱|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۹۷- چند تابع از مجموعهٔ $A = \{a , b , c\}$ به $B = \{m , n , p , q\}$ می‌توان نوشت به‌طوری که تعداد اعضای دامنه و برد آن برابر باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۶۴

۹۸- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ به صورت مقابل است. $a+b+c$ کدام است؟



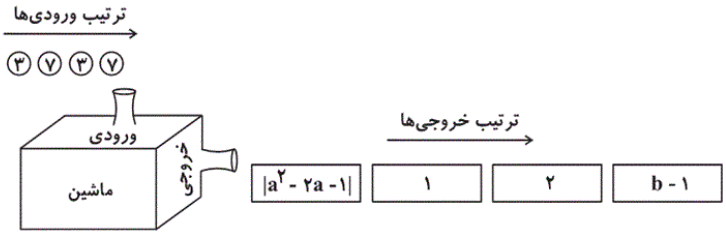
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۹۹- شکل زیر، نشانگر یک ماشین است که ورودی‌هایی را تحویل گرفته و متناظراً خروجی‌هایی را تحویل داده است. اگر این ماشین یک تابع باشد، حداکثر مقدار ممکن برای ab کدام است؟



۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

۱۰۰- دو تابع $f(x) = \frac{b}{x+۳}$ و $g(x) = \frac{x-a}{x^۲+cx+d}$ برابرند. حاصل $\frac{abc}{d}$ کدام است؟

۱) ۱-

۲) ۲-

۳) ۱

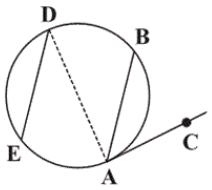
۴) ۲

هندسه‌ي 2 - 10 سوال

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۱- در شکل زیر، $AB \parallel DE$ ، AC مماس بر دایره و $\overset{\frown}{AE} = 110^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ BAC کدام است؟ (AD قطر دایره است.)



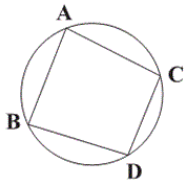
۱) 35°

۲) 70°

۳) 40°

۴) 45°

۱۲۲- در شکل زیر، وترهای AB و CD با هم موازیند. اگر $\overset{\frown}{AC} = 80^\circ$ و تفاضل کمان‌های AB و CD برابر با 100° باشد، کوچک‌ترین کمان دایره چند درجه است؟



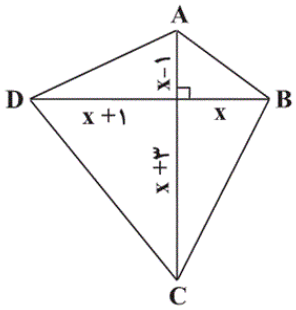
۱) ۴۰

۲) ۵۰

۳) ۶۰

۴) ۷۰

۱۲۳- رئوس چهارضلعی $ABCD$ روی محیط یک دایره قرار دارند. با توجه به اندازه‌های مشخص شده، مساحت چهارضلعی کدام است؟



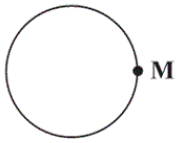
۱) ۵۶

۲) ۴۸

۳) ۲۸

۴) ۲۴

۱۲۴- از نقطهٔ M مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و روی آن نقاط A و B را طوری مشخص می‌کنیم که $AM = BM = 3$. سپس از هر یک از نقاط A و B مماس دیگری بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C (در طرف دیگر دایره) قطع کنند. اگر $\hat{C} = 2\hat{A}$ باشد، مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ کدام است؟



۱) ۹

۲) ۱۸

۳) ۶

۴) ۱۳/۵

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۵- دو دایرهٔ $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ متخارج‌اند. اگر اختلاف طول مماس مشترک داخلی و خارجی آن‌ها ۲ و مجموع آن‌ها ۶ باشد، حاصل r_1r_2 کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۶- شعاع دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر رأس A از $\overset{\Delta}{ABC}$ به ترتیب برابر ۲/۵ و ۷/۵ می‌باشد. اگر طول مماس مرسوم از نقطهٔ A بر دایرهٔ محاطی داخلی برابر ۵ باشد، طول مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ مفروض کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

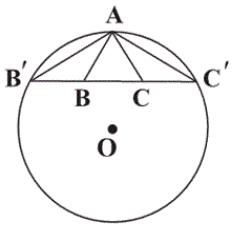
۱۲۷- در یک پنج ضلعی محیطی، مجموع طول دو ضلع غیرمجاور چه کسری از محیط است؟

۱) کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) بیش‌تر از $\frac{۱}{۲}$ ۴) مشخص نیست.

۱۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر ۱۰، اگر نسبت اضلاع قائمه برابر با $\frac{۳}{۴}$ باشد، آن‌گاه مجموع فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازها از این دو ضلع کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲۹- در مثلث ABC ضلع BC را از طرف B به اندازهٔ AB تا نقطهٔ B' و از طرف C به اندازهٔ AC تا نقطهٔ C' امتداد می‌دهیم. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه لزوماً صحیح نمی‌باشد؟



۱) AO نیمساز زاویهٔ BAC است.

۲) $O\hat{A}B = O\hat{B'}B$

۳) $O\hat{A}C = O\hat{C'}C$

۴) AO عمودمنصف $B'C'$ است.

۱۳۰- در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، نسبت مساحت کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی به مساحت دایرهٔ محاطی داخلی کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۶ ۳) $\frac{۶۴}{۹}$ ۴) ۶۴

هندسه 2- اعتبارسنجي - 10 سوال

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

حسابان1 - سوالات موازي - 20 سوال

۱۰۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(x-۶)^۲ = ۳۲$ باشند، حاصل عبارت $|\frac{۱}{\sqrt{\beta}} - \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $|x+۶| - \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = ۳$ کدام است؟

۱) ۱۰− ۲) ۱۴− ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۳- ریشهٔ کوچک‌تر معادلهٔ $\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}+\frac{x-۲}{x^۲+x-۲}=\frac{۶x}{x^۲+۳x+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۱۰۴- نقطهٔ $P(۴m\ ,\ ۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطهٔ $A(۰\ ,\ m)$ و $B(۶\ ,\ ۱۵)$ قرار دارد. m کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) -۳

۱۰۵- دو ضلع مجاور یک مستطیل بر خطوط $y=x+۵$ و $x+y=۷$ واقع‌اند. اگر مبدأ مختصات یکی از رئوس این مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۷/۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴/۵

۱۰۶- در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۴ جمله، مجموع تمام جملات ۳۶۰ و مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ است. جملهٔ بیست و سوم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۰۷- جواب معادلهٔ $\sqrt{x^۲}=(۳-\sqrt{-x})^۲$ در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

۱) $(۱\ ,\ ۲)$ ۲) $(۰\ ,\ ۱)$

۳) $(-۲\ ,\ ۰)$ ۴) $(-۳\ ,\ -۲)$

۱۰۸- چند عدد حقیقی داریم که فاصلهٔ آن‌ها از عدد یک، با فاصلهٔ مربع آن‌ها از عدد یک برابر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۹- مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y=\sqrt{x^۲-۲|x|+۱}$ و $y=۲-|x|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۴}$

۱۱۰- برای کدام محدودهٔ k، دو تابع $y=kx+۱$ و $y=|x-۲|+|x+۱|$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند؟

۱) $(-۲\ ,\ ۱)$ ۲) $\mathbb{R}-(-۳\ ,\ ۲)$

۳) $(-۳\ ,\ ۲)$ ۴) $\mathbb{R}-(-۲\ ,\ ۱)$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۱- مجموعهٔ جواب معادلهٔ $x^۲ = |x+۲| + |x^۲ - x + ۲|$ با شرط $x < ۱$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۲- اگر تعداد جواب‌های معادلهٔ $a = |۲ - |۱ - |x^۲ - ۱||$، ۶ عضو باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $۱ < a < ۳$ ۲) $۱ < a < ۲$ ۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۳ < a < ۴$

۱۱۳- کدام گزینه دربارهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $\sqrt{۲ + \frac{۱}{x}} + \sqrt{\frac{۴x}{۲x+۱}} = ۳$ صحیح است؟

۱) مجموع ریشه‌های آن $-\frac{۱}{۲}$ است. ۲) فقط یک ریشه دارد که علامت آن منفی است.

۳) دو ریشهٔ هم‌علامت دارد. ۴) معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۱۱۴- خط $d_۱ : ۳x - y = ۱$ معادلهٔ قطری از دایره و $d_۲ : ۲y = ۶x + ۳$ بر دایره مماس است. مساحت این دایره کدام است؟

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۸}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۱۵- طول وتری که خط $y = ۲x - ۶$ در دایره‌ای به مرکز $(۳ , ۲)$ و شعاع ۳ ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) ۴

۱۱۶- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴ , ۰)$ از نمودار تابع $f(x) = ||x-۱| - ۱|$ کدام است؟

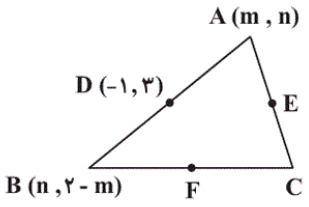
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۱۷- معادلهٔ $\sqrt{x+۱} = |x-۱| + x$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- در شکل زیر، نقاط D ، E و F وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند. با توجه به مقادیر مشخص شده، طول EF کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۲}$

۲) ۴

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) ۲

۱۱۹- کدام نقطه روی خط $y = ۲x + ۱$، از دو نقطهٔ $A(۳ , ۰)$ و $B(-۱ , ۰)$ به یک فاصله است؟

۱) $(\frac{۱}{۲} , ۲)$

۲) $(۲ , ۵)$

۳) $(۰ , ۱)$

۴) $(۱ , ۳)$

۱۲۰- معادلهٔ قطرهای یک دایره $mx + (m-۱)y = m + ۲$ است. اگر این دایره بر خط $۳x - ۴y - ۲ = ۰$ مماس باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

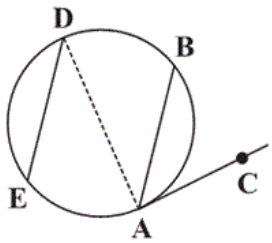
۴) ۶

هندسه2- سوالات موازي - 10 سوال

۱۴۱- دایره‌ای به شعاع ۱۵ مفروض است. در صورتی که فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۹ باشد، طول وتر AB کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۱۴۲- در شکل روبه‌رو $AB \parallel DE$ ، AC مماس بر دایره و $\overset{\frown}{AE} = ۱۱۰^\circ$ می‌باشد، در این صورت اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ کدام است؟ (AD قطر دایره است.)



۱) ۳۵°

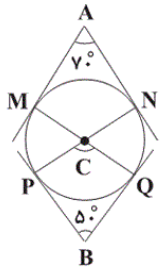
۲) ۷۰°

۳) ۴۰°

۴) ۴۵°

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۳- در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایرهٔ مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟



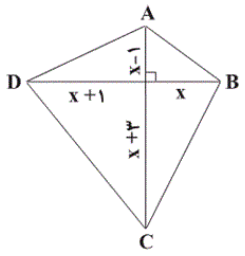
۱) ۱۰۰°

۲) ۱۲۰°

۳) ۸۰°

۴) ۱۴۰°

۱۴۴- رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند. با توجه به اندازه‌های مشخص شده، مساحت چهارضلعی کدام است؟



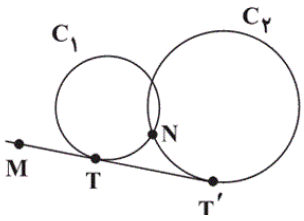
۱) ۵۶

۲) ۴۸

۳) ۲۸

۴) ۲۴

۱۴۵- در شکل زیر، خط MN دایرهٔ C_1 را در نقطهٔ P و امتداد آن دایرهٔ C_2 را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. اگر $۲MT = TT' = ۸$ و $MP = ۲$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط NQ کدام است؟



۱) ۸

۲) ۱۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۱۴۶- اگر دو دایرهٔ $C(O , a)$ و $C'(O' , ۲a)$ با طول خط‌المرکزین $OO' = ۴ - ۲a$ دارای تنها یک مماس مشترک باشند، a برابر با کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۱۴۷- دو دایرهٔ $C_1(O_1 , r_1)$ و $C_2(O_2 , r_2)$ متخارج‌اند. اگر اختلاف طول مماس مشترک داخلی و خارجی آن‌ها ۲ و مجموع آن‌ها ۶ باشد، r_1r_2 کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۴۸- اگر مجموع طول مماس مشترک‌های خارجی دو دایرهٔ $C(O , ۸)$ و $C'(O' , ۳)$ برابر ۲۴ باشد، طول مماس مشترک داخلی آن‌ها کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۶}$

۱۴۹- در یک پنج ضلعی محیطی، مجموع طول دو ضلع غیرمجاور چه کسری از محیط است؟

۱) کم‌تر از $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) بیش‌تر از $\frac{۱}{۲}$ ۴) مشخص نیست.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول وتر ۱۰، اگر نسبت اضلاع قائم برابر با $\frac{۳}{۴}$ باشد، آن گاه مجموع فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازها از این دو ضلع کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

آمار و احتمال - 10 سوال

۱۶۱- اگر گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ دارای ارزش درست باشد، ارزش کدام گزاره لزوماً نادرست است؟

۱) $p \Rightarrow q$ ۲) $p \wedge q$ ۳) $p \vee q$ ۴) $p \wedge \sim q$

۱۶۲- ارزش درستی و نقیض گزارهٔ «$\exists y \in Z \; ; \; y < ۰ \wedge y^۲ < ۱$» به‌ترتیب کدام است؟

۱) درست- $\exists y \in Z \; ; \; y \geq ۰ \wedge y^۲ \geq ۱$

۲) درست- $\exists y \in Z \; ; \; y \geq ۰ \vee y^۲ \geq ۱$

۳) نادرست- $\forall y \in Z \; ; \; y \geq ۰ \wedge y^۲ \geq ۱$

۴) نادرست- $\forall y \in Z \; ; \; y \geq ۰ \vee y^۲ \geq ۱$

۱۶۳- اگر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A از تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A \cap B$، ۱۰۱۶ واحد بیش‌تر و تعداد اعضای مجموعهٔ $A - B$ برابر ۷ عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۵۱۲ ۳) ۲۰۴۸ ۴) ۲۵۶

۱۶۴- فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۱۰ \leq x \leq ۱۰\}$ و $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$ باشد. کدام یک از حالت‌های زیر، افرازی برای مجموعهٔ A است؟

۱) $A_{۱۰} - A_۸$ ، $A_۷ - A_۵$ ، $A_۴ - A_۲$

۲) $A_{۱۰} - A_۷$ ، $A_۷ - A_۴$ ، $A_۴ - A_۲$

۳) $A_{۱۰} - A_۷$ ، $A_۷ - A_۵$ ، $A_۵ - A_۳$ ، $A_۳$

۴) $A_{۱۰} - A_۸$ ، $A_۷ - A_۴$ ، $A_۳ - A_۱$ ، $A_۱$

۱۶۵- کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

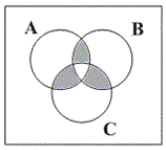
۱) $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ C \subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$

۲) $\left.\begin{matrix} A \subseteq C \\ B \subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$

۳) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$

۴) $\left.\begin{matrix} C \subseteq A \\ C \subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow C \subseteq (A \cap B)$

۱۶۶- بخش هاشورخورده در شکل مقابل، متناظر با کدام مجموعه می‌باشد؟



۱) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

۲) $[(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$

۳) $[(A \cup B) \cap C] \cup (A \cap B)$

۴) $[(A \cap C) \cup B] - (B \cap C)$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

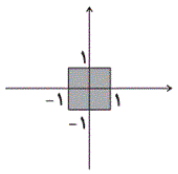
۱۶۷- اگر A ، B و C مجموعه‌هایی دلخواه باشند، حاصل $(A-(B\cup C))\cup(A\cap(B-C))$ کدام است؟

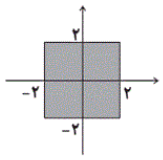
۱) $A-B$ ۲) $A-C$ ۳) $B-A$ ۴) $C-B$

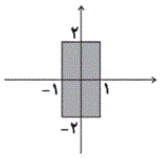
۱۶۸- اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل عبارت $[A-(A\cap B')]\cup[B\cup(A'\cap B)]$ همواره برابر کدام است؟

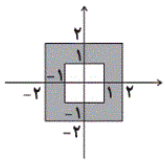
۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $\varnothing$

۱۶۹- اگر $A=[-۱,۱]$ و $B=[-۲,۲]$ باشد، در این صورت مجموعهٔ $(A\times B)\cap(B\times A)$ متناظر با کدام یک از نمودارهای زیر است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۷۰- برای سه مجموعهٔ ناتهی A ، B و C ، اگر $A\times B=B\times C$ باشد، آن‌گاه کدام گزینهٔ زیر نادرست است؟

۱) $A\times C=B\times C$

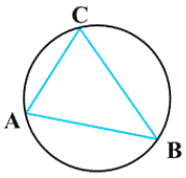
۲) $B^۲=C^۲-A^۲$

۳) $(A\cup C)\times(A\cup B)=A^۲$

۴) $(B\cap C)\times(B\cap A)=B^۲$

هندسه 2 - گواه - 10 سوال

۱۳۱- در شکل زیر، $\hat{A}=۷۰^\circ$ و $\hat{B}=۵۰^\circ$ است. از نقطهٔ O مرکز دایره، بر اضلاع AB ، AC و BC به‌ترتیب عمودهای OP ، OQ و OR رسم می‌شود. کدام مورد درست است؟



۱) $OP>OR>OQ$

۲) $OQ>OR>OP$

۳) $OP>OQ>OR$

۴) $OQ>OP>OR$

۱۳۲- در شکل زیر، نقطهٔ D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C=۱۰۰^\circ$ ، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟

۱) ۲۰

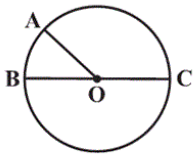
۲) ۸۰

۳) ۶۰

۴) ۴۰

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۳- در شکل زیر، O مرکز دایره است. اگر طول کمان AB و مساحت قطاع AOB به‌ترتیب $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$ و π باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟



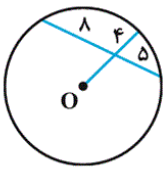
۱) ۱/۵

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۱۲

۱۳۴- در شکل مقابل، O مرکز دایره است. شعاع دایره کدام است؟



۱) ۷

۲) ۷/۵

۳) ۸

۴) ۸/۵

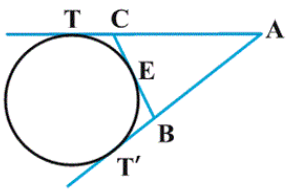
۱۳۵- طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ برابر $۲\sqrt{۱۵}$ است. طول قسمتی از خط‌المرکزین که بین دو دایره محصور است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۱۳۶- دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع‌های $r_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $r_۲ = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = \frac{۱}{۲}$ می‌باشند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۷- از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT و AT′ بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره‌خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری که نقطهٔ B همواره روی AT′ و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC ، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}AT$

۲) AT

۳) $\frac{۳}{۲}AT$

۴) $۲AT$

۱۳۸- در مثلث ABC به اضلاع $a = ۲\sqrt{۳}$ و $b = ۳$ ، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تا ضلع a برابر یک واحد است. مجموع فاصله‌های این نقطه تا سه رأس مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۱۳}$ ۲) ۶ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۵ + ۲\sqrt{۳}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- در دایره‌ای به مساحت $۴\pi\sqrt{۳}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. مساحت مثلث کدام است؟

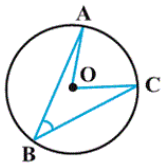
۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۴۰- اندازهٔ شعاع کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب برابر ۱ و ۶ است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

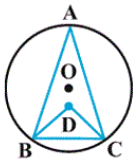
هندسه2- گواه-سوالات موازي - 10 سوال

۱۵۱- مطابق شکل مقابل، دایرهٔ $C(O\ ,\ ۲)$ مفروض است. اگر طول کمان AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ ABC کدام است؟



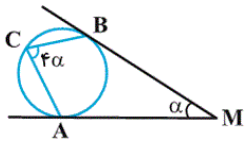
۱) $۲۲/۵^\circ$
۲) ۴۵°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۱۵۲- در شکل زیر، نقطهٔ D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ B و C است. اگر $B\hat{D}C = ۱۰۰^\circ$، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



۱) ۲۰
۲) ۸۰
۳) ۶۰
۴) ۴۰

۱۵۳- در شکل زیر، MA و MB بر دایره مماس‌اند و اندازهٔ زوایای M و C به‌ترتیب برابر α و ۴α است. مقدار α چند درجه است؟

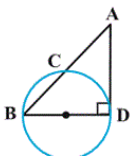


۱) ۲۰
۲) ۲۵
۳) ۳۰
۴) ۱۵

۱۵۴- فاصلهٔ دورترین نقطهٔ دایره‌ای از نقطهٔ P برابر ۹ سانتی‌متر و فاصلهٔ P تا مرکز این دایره $\frac{۱۳}{۲}$ سانتی‌متر است. طول مماس رسوم از نقطهٔ P بر این دایره کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۵۵- در شکل زیر، BD قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر شعاع دایره برابر ۳ و طول وتر BC برابر ۴ باشد، اندازهٔ AB کدام است؟



۱) ۹
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۱۲

۱۵۶- اگر شعاع دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ به‌ترتیب $R_۱ = ۷$ و $R_۲ = ۱$ و طول خط‌المرکزین $d = ۲$ باشد، اندازهٔ شعاع بزرگترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس باشد کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

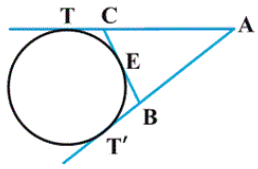
۱۵۷- طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۶ برابر $۲\sqrt{۱۵}$ است. طول قسمتی از خط‌المرکزین که بین دو دایره محصور است، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۱۵۸- دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع‌های $r_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $r_۲ = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = \frac{۱}{۲}$ می‌باشند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۵۹- از نقطهٔ ثابت A دو مماس AT و AT' بر دایره‌ای ثابت رسم شده‌اند و پاره خط متغیر BC بر دایره مماس است، به‌طوری که نقطهٔ B همواره روی AT' و نقطهٔ C همواره روی AT قرار دارد. محیط مثلث ABC ، کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}AT$

۲) AT

۳) $\frac{۳}{۲}AT$

۴) $۲AT$

۱۶۰- در مثلث ABC به اضلاع $a = ۲\sqrt{۳}$ و $b = ۳$ ، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تا ضلع a برابر یک واحد است. مجموع فاصله‌های این نقطه تا سه رأس مثلث کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۱۳}$ ۲) ۶ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۵ + ۲\sqrt{۳}$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۸۱- (محمدرضا ابراهیمی)

$$x^۲-۲x-۶=۰\Rightarrow\begin{cases}S=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=۲\\ P=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=-۶\end{cases}$$

S' و P' جدید را حساب می‌کنیم:

$$S'=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۲^۲-۲(-۶)}{-۶}=-\frac{۱۶}{۶}=-\frac{۸}{۳}$$

$$P'=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=۱$$

معادلهٔ جدید را می‌نویسیم:

$$x^۲-S'x+P'=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۸}{۳}x+۱=۰\xrightarrow{\times ۳}۳x^۲+۸x+۳=۰$$

پس داریم: $m=۸$ و $n=۳$

در نتیجه: $m-n=۸-۳=۵$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۸ و ۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۲- (سینا محمدپور)

ابتدا معادلهٔ داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم.

$$۳|x+۶|-\sqrt{۴-۴x+x^۲}=۰\Rightarrow ۳|x+۶|-\sqrt{(x-۲)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۳|x+۶|-|x-۲|=۰\Rightarrow ۳|x+۶|=|x-۲|$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳(x+۶)=x-۲\Rightarrow x=-۱۰\\ ۳(x+۶)=-(x-۲)\Rightarrow x=-۴\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله عبارت است از: $-۴-۱۰=-۱۴$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۳- (علی شهرابی)

با تجزیهٔ مخرج‌ها و بعد از آن با مخرج مشترک‌گیری، معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۱}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{x-۲}{(x+۲)(x-۱)}=\frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)}$$

$$\Rightarrow \frac{(۲x-۱)(x+۲)+(x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۲)}=\frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)} \xrightarrow{x\neq -۱,-۲,۱}$$

$$\frac{۲x^۲+۳x-۲+x^۲-x-۲}{x-۱}=۶x \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۴=۶x(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۴=۶x^۲-۶x \Rightarrow ۳x^۲-۸x+۴=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۸\pm۴}{۶} \Rightarrow x_۱=۲\ ,\ x_۲=\frac{۲}{۳}$$

پس ریشهٔ کوچک‌تر این معادله، $x=\frac{۲}{۳}$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۸۴- (امیرهوشنگ خمسه)

طبق تعریف عمودمنصف، باید فاصلهٔ نقطهٔ P از نقاط A و B یکسان باشد. $|AP|=|BP|$

$$\Rightarrow \sqrt{(۴m-۰)^۲+(۱۱-m)^۲}=\sqrt{(۴m-۶)^۲+(۱۱-۱۵)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶m^۲+(۱۱)^۲-۲۲m+m^۲=۱۶m^۲-۴۸m+۳۶+۱۶$$

$$\Rightarrow m^۲+۲۶m+۶۹=۰ \Rightarrow (m+۳)(m+۲۳)=۰ \Rightarrow m=-۳ \text{ یا } -۲۳$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲ و ۲۹ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۵- *(شروین سیاح‌نیا)*

واضح است که مبدأ مختصات روی هیچ کدام از دو خط مذکور قرار ندارد. بنابراین سه رأس مستطیل روی دو خط مذکور و رأس چهارم مبدأ مختصات است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از دو خط $x+y-۷=۰$ و $x-y+۵=۰$ طول و عرض مستطیل را مشخص می‌کنند:

$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ مبدأ از } x+y-۷=۰ = \dfrac{|۰+۰-۷|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \dfrac{۷\sqrt{۲}}{۲} \\ \text{فاصلهٔ مبدأ از } x-y+۵=۰ = \dfrac{|۰-۰+۵|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}} = \dfrac{۵\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۷\sqrt{۲}}{۲} = ۱۷/۵$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۶- *(آیدا آریانفر)*

مجموع ۲۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۲۴} = \frac{۲۴}{۲}(a_۱ + a_{۲۴}) \Rightarrow S_{۲۴} = ۱۲(a_۱ + a_{۲۴})$$

چون $۲۳+۲ = ۲۴+۱$، پس $a_۱ + a_{۲۴} = a_۲ + a_{۲۳}$ است و در نتیجه:

$$S_{۲۴} = ۱۲(a_۲ + a_{۲۳})$$

از طرفی مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ است، پس:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۱۵ \Rightarrow ۳a_۲ = ۱۵ \Rightarrow a_۲ = ۵$$

با جای‌گذاری در $S_{۲۴}$ داریم:

$$S_{۲۴} = ۱۲(a_۲ + a_{۲۳}) \Rightarrow ۳۶۰ = ۱۲(۵ + a_{۲۳}) \Rightarrow a_{۲۳} = ۲۵$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۸۷- *(محمدمصطفی ابراهیمی)*

$$\sqrt{x^۲} = (۳-\sqrt{-x})^۲ \Rightarrow |x| = (۳-\sqrt{-x})^۲$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، یعنی $-x \geq ۰$ پس $x \leq ۰$ می‌شود، بنابراین $|x| = -x$ می‌شود.

$$-x = (۳-\sqrt{-x})^۲ \Rightarrow -x = ۹ + (-x) - ۶\sqrt{-x} \Rightarrow ۶\sqrt{-x} = ۹$$

$$\sqrt{-x} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = -\frac{۹}{۴}$$

این عدد در بازهٔ $(-۲, -۳)$ قرار می‌گیرد.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۸- (علی شهرابی)

اعداد مورد نظر را x می‌گیریم. فاصلهٔ x از یک برابر با $|x-1|$ است.

فاصلهٔ مربع x از یک برابر با $|x^2-1|$ و اگر این دو فاصله برابر باشند، داریم:

$$|x^2-1|=|x-1| \Rightarrow |x-1||x+1|-|x-1|=0$$

$$\Rightarrow |x-1|(|x+1|-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x+1|=1 \Rightarrow x=0\ ,\ -2 \end{cases}$$

پس سه عدد ۱، ۰ و ۲- با این ویژگی داریم.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

مختصات رأس D را از تقاطع دو خط $y=x-1$ و $y=2-x$ پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow D\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

پس مساحت مثلث BDC برابر است با:

$$S_{\Delta BDC}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{1}{4}$$

حالا مساحت ذوزنقهٔ $AEDB$ را پیدا می‌کنیم:

$$S_{AEDB}=S_{\Delta OEC}-(S_{\Delta OAB}+S_{\Delta BDC})$$

$$\Rightarrow S_{AEDB}=\frac{2\times 2}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

کافی است مساحت به‌دست‌آمده را در ۲ ضرب کنیم تا مساحت قسمت هاشورخورده به دست آید:

$$\frac{5}{4}\times 2=2/5$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

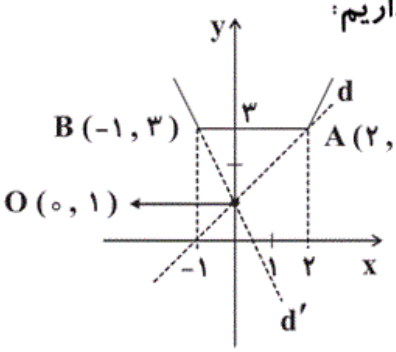
۱ ۲ ۳✓ ۴

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۰- (محمدرضا حسین‌زاده)

برای این‌که دو نمودار تقاطع نداشته باشند، باید شیب خط از شیب خط d کم‌تر و از شیب خط d' بیش‌تر باشد، لذا داریم:



$$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۰} = ۱$$

$$k < m_{OA} \Rightarrow k < ۱ \quad (۱)$$

$$m_{OB} = \frac{۳-۱}{-۱-۰} = -۲ \quad ، \quad m_{OB} < k \Rightarrow -۲ < k \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} -۲ < k < ۱$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۱- (سیدمحمدصالح ارشاد)

می‌دانیم $|a| = |-a|$ است، پس $|۲ + x - x^۲| = |x^۲ - x - ۲|$. از طرفی می‌دانیم زمانی تساوی $|a| + |b| = |a + b|$ برقرار است که $ab \geq ۰$ باشد، پس اگر $a = x^۲ - x - ۲$ و $b = x + ۲$ باشد، $a + b = x^۲$ است، در نتیجه:

$$|\underbrace{x^۲ - x - ۲}_{a}| + |\underbrace{x + ۲}_{b}| = |\overbrace{\underbrace{x^۲ - x - ۲ + x + ۲}_{x^۲}}^{a+b}| = x^۲$$

$$\xrightarrow{ab \geq ۰} (x^۲ - x - ۲)(x + ۲) \geq ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱)(x + ۲) \geq ۰$$

$$\xrightarrow{x < ۱} (x + ۱)(x + ۲) \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq -۱$$

پس مجموعه جواب معادله شامل ۲ عدد صحیح است.

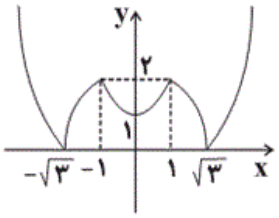
تذکر: $|x^۲| = x^۲$ (حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۲- (محمدحسین صابری)

نمودار تابع $y = ||x^۲ - ۱| - ۲|$ به صورت زیر است:

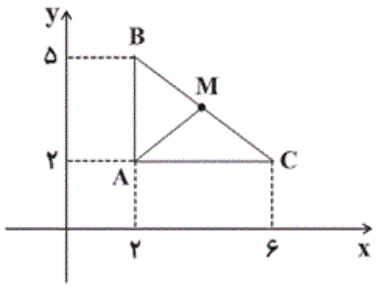


برای این‌که معادلهٔ $||x^۲ - ۱| - ۲| = a$، ۶ ریشه داشته باشد، باید $۱ < a < ۲$ باشد. (حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۳- (مهرداد اسپیدکار)

راه‌حل اول:



با توجه به شکل، میانهٔ وارد بر ضلع BC یعنی AM مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی: $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMC}$

پس نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌باشد، بنابراین:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{۲+۶}{۲} = ۴$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{۲+۵}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^۲ + (y_M - y_A)^۲} = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (\frac{۷}{۲} - ۲)^۲}$$

$$= \sqrt{۴ + \frac{۹}{۴}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

راه‌حل دوم: طول میانهٔ AM نصف وتر BC است، پس:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۶-۲)^۲ + (۲-۵)^۲} = \frac{۱}{۲}(۵) = ۲/۵$$

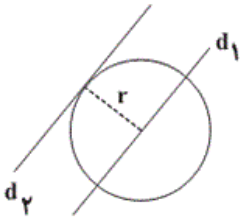
(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۴- (محمدمصطفی ابراهیمی)

دو خط $d_1 : 3x - y = 1$ و $d_2 : 2y = 6x + 3$ موازی هستند. پس فاصلهٔ این دو خط همان شعاع دایره است.



$$d_2 : 2y = 6x + 3 \Rightarrow 3x - y + \frac{3}{2} = 0$$

$$d_1 : 3x - y - 1 = 0$$

فاصلهٔ دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$r = \frac{|\frac{3}{2} - (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{10}} \qquad S = \pi r^2 = \pi \times \frac{\frac{25}{4}}{10} = \frac{5\pi}{8}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

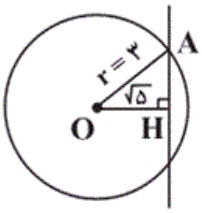
۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۵- (محمدرضا حسین‌زاده)

ابتدا باید فاصلهٔ نقطه $(3 , 2)$ را از خط $y - 2x + 6 = 0$ به‌دست آوریم:

$$OH = \frac{|3 - 2(2) + 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

چون $\sqrt{5} < 3$، بنابراین خط در دایره وتر ایجاد می‌کند. با توجه به شکل، اندازهٔ AH را با استفاده از فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



$$AH^2 = OA^2 - OH^2$$

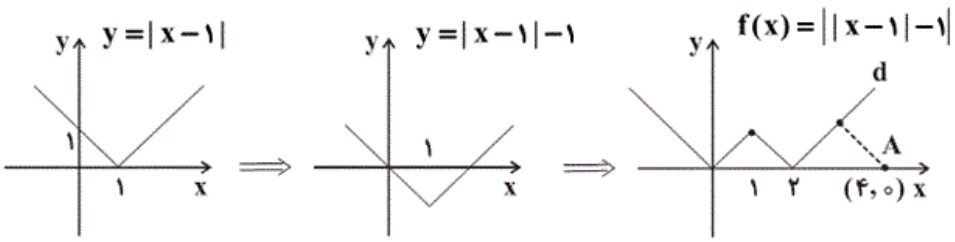
$$AH^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \Rightarrow AH = 2$$

پس طول وتر مورد نظر $2AH = 4$ است.

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا



با توجه به شکل کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از تابع f برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d است. معادلهٔ خط d به‌صورت مقابل است: $x > ۲ : f(x) = x - ۲$

که فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴ , ۰)$ از d برابر است با:

$$\begin{cases} y = x - ۲ \\ A(۴ , ۰) \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|۰ - ۴ + ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- جبر و معادله- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸ و ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۷- (سیدعادل حسینی)

دامنهٔ تابع مجموعهٔ A است که ۳ عضو دارد. واضح است که برد تابع نیز باید سه عضوی باشد؛ بنابراین سه عضو متمایز از B باید انتخاب کنیم که این سه عضو، خود به $۳!$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند (یعنی به عضوهای متفاوتی از A وصل شوند.) به بیان دیگر در تابع $f = \{(a , \square) , (b , \square) , (c , \square)\}$، $\square$ها $۲۴ = ۲ \times ۳ \times ۴$ حالت را می‌توانند بپذیرند.

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۸- (محمدحسین صابری)

دامنهٔ تابع $f(x)$ از روی ضابطه، $x \geq -a$ است و همچنین با توجه به نمودار دامنه $x \geq -۲$ است، پس: $-a = -۲ \Rightarrow a = ۲$

همچنین نقطهٔ $(-۱ , -۲)$ روی تابع است، پس داریم:

$$(-۲ , -۱) \in f \Rightarrow -۱ = \sqrt{-۲ + ۲} + b \Rightarrow b = -۱$$

ضابطهٔ f برابر است با $f(x) = \sqrt{x + ۲} - ۱$. پس داریم:

$$f(۷) = \sqrt{۷ + ۲} - ۱ = ۲ \Rightarrow c = ۲$$

$$a + b + c = ۲ - ۱ + ۲ = ۳$$

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۹ (سینا محمدپور)

طبق تعریف تابع به عنوان یک ماشین می‌دانیم باید به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی وجود داشته باشد. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ⑦ \Longrightarrow \boxed{b-۱} \\ ⑦ \Longrightarrow \boxed{۱} \end{array}\right\} \Rightarrow b-۱=۱ \Rightarrow b=۲$$

$$\left.\begin{array}{l} ③ \Longrightarrow \boxed{۲} \\ ③ \Longrightarrow \boxed{|a^۲-۲a-۱|} \end{array}\right\} \Rightarrow |a^۲-۲a-۱|=۲$$

پس:

$$\begin{cases} a^۲-۲a-۱=۲ \Rightarrow a^۲-۲a-۳=۰ \\ \Rightarrow (a-۳)(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۳ \text{ یا } a=-۱ \\ a^۲-۲a-۱=-۲ \Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰ \\ \Rightarrow (a-۱)^۲=۰ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

در نتیجه حداکثر مقدار ab برابر است با:

$$ab=۳\times ۲=۶$$

(حسابان ۱- ترکیبی- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸ و ۴۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x-a}{(x+۳)^۲}=\frac{b}{x+۳} \xrightarrow{x\neq -۳} \frac{x-a}{x+۳}=\frac{b}{۱}$$

$$\Rightarrow x-a=bx+۳b \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ a=-۳ \end{cases}$$

$$\frac{abc}{d}=\frac{(-۳)(۱)(۶)}{۹}=\frac{-۱۸}{۹}=-۲$$

پس:

(حسابان ۱- تابع- صفحه‌های ۴۱ تا ۴۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۲۱ (رحیم مشتاق‌نظم)

چون $AB \parallel DE$، پس $\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{AE}=۱۱۰^\circ$ است. لذا:

$$\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{DB}=۱۸۰^\circ-۱۱۰^\circ=۷۰^\circ$$

زاویهٔ $B\hat{A}C$ زاویه‌ای ظلی است پس:

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۲- (علیرضا نصراللهی)

اگر دو وتر از یک دایره موازی باشند کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی است، بنابراین $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = ۸۰^\circ$. پس می‌توان گفت:

۱) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = ۳۶۰^\circ$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}=۸۰^\circ} \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + ۸۰^\circ + ۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۲۰۰^\circ \qquad (I)$$

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} |\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}| = ۱۰۰^\circ \\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۲۰۰^\circ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD} \text{ با فرض}} \begin{cases} \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ \\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = ۲۰۰^\circ \end{cases}$$

$$۲\overset{\frown}{AB} = ۳۰۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{AB} = ۱۵۰^\circ \\ \overset{\frown}{CD} = ۵۰^\circ \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین کمان ۵۰° می‌باشد.

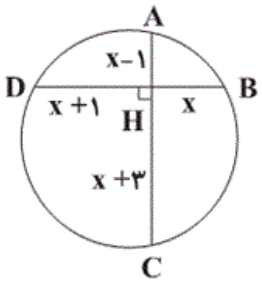
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

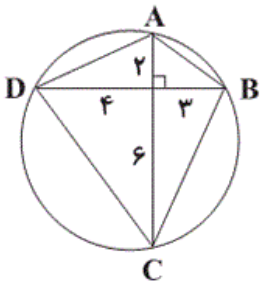
-۱۲۳ (علی شهرابی)

رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند، پس:



$$AH \times HC = BH \times HD$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۳) = x(x+۱)$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۳ = x^۲ + x \Rightarrow x = ۳$$

لذا مساحت آن برابر است با:



$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \cdot BD = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۷ = ۲۸$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

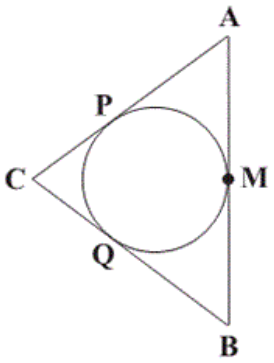
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۴ (سجاد عابد)

شکل حاصل را رسم می‌کنیم. داریم: $AM = MB$ و چون $AP = AM$ و $MB = BQ$ نتیجه می‌شود:

$$PA = QB \quad (۱)$$

و داریم: $$CQ = CP \quad (۲)$$



$$(۱)\text{ و }(۲)\ PA + PC = BQ + QC \Rightarrow AC = CB$$

پس $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و $\hat{B} = \hat{A}$ و با توجه به این‌که $\hat{C} = ۲\hat{A}$، نتیجه می‌شود $\hat{C} = ۹۰^\circ$ و $\hat{A} = \hat{B} = ۴۵^\circ$.

$\overset{\Delta}{ABC} : AB = ۳ + ۳ = ۶ \Rightarrow CB = CA = ۶ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$ قائم‌الزاویه است.

$$\Rightarrow S = \frac{CA \times CB}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲}}{۲} = ۹$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۲۵ (علیرضا احدی)

فرض کنید طول مماس مشترک خارجی برابر x و طول مماس مشترک داخلی برابر y باشد، داریم:

$$x = \sqrt{d^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲} \Rightarrow x^۲ = d^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲$$

$$y = \sqrt{d^۲ - (r_۱ + r_۲)^۲} \Rightarrow y^۲ = d^۲ - (r_۱ + r_۲)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ - y^۲ = (r_۱ + r_۲)^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲$$

$$= r_۱^۲ + r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲ - r_۱^۲ - r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲ = ۴r_۱r_۲$$

می‌دانیم $x - y = ۲$ و $x + y = ۶$ است. داریم:

$$۴r_۱r_۲ = x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y) = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow r_۱r_۲ = ۳$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

می‌دانیم طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره به ترتیب از رابطه‌های $\sqrt{OI^2-(r_a+r)^2}$ و $\sqrt{OI^2-(r_a-r)^2}$ به‌دست می‌آید. پس:

$$\text{مماس مشترک خارجی دو دایره} = MN = 10 = \sqrt{OI^2-(7/5-2/5)^2}$$

$$\Rightarrow OI^2 = 125$$

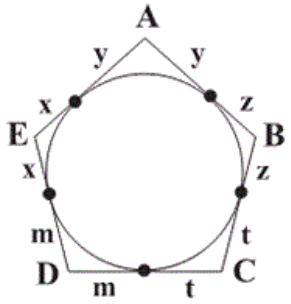
$$\text{طول مماس مشترک داخلی دو دایره} = \sqrt{OI^2-(r_a+r)^2} = \sqrt{125-(7/5+2/5)^2} = 5$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۱، ۲۱، ۲۲ و ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۷- (سارا خسروی)

پنج ضلعی محیطی است، یعنی می‌توان داخل آن یک دایره محاط کرد. از طرفی می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایره با یکدیگر برابرند، پس شکل را بر این اساس نام‌گذاری می‌کنیم:



اگر دو ضلع غیرمجاور را در نظر بگیریم، (برای مثال دو ضلع AE و BC) داریم:

$$\frac{\text{مجموع طول ۲ ضلع غیرمجاور}}{\text{محیط}} = \frac{x+y+z+t}{2(x+y+z+t+m)}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1-\underbrace{\frac{m}{x+y+z+t+m}}_{<1}\Big) < \frac{1}{2}$$

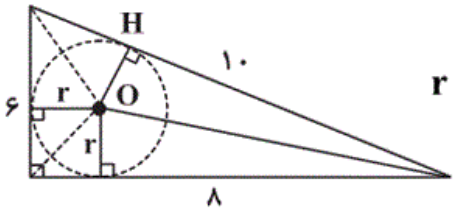
(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰، ۲۴ و ۲۵)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۸ (سروش موئینی)

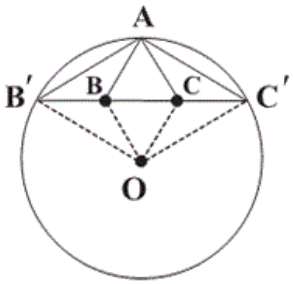
بنابر فرضیات مسأله متوجه می‌شویم که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ۶، ۸ و ۱۰ می‌باشند. از طرفی نقطهٔ همرسی نیمسازها از اضلاع مثلث به یک فاصله است. به عبارت دیگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بوده و فاصلهٔ آن تا هر یک از اضلاع برابر با شعاع دایره (r) است. حال اگر مساحت و نصف محیط مثلث که یک سه ضلعی محیطی محسوب می‌شود را به ترتیب با S و P نمایش دهیم، داریم:



$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۲r = \frac{۲S}{P} = \frac{۲ \times ۲۴}{۱۲} = ۴$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴✓



$$OA = OB' = OC'$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{matrix} AB = BB' \\ BO = BO \\ OA = OB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{B'BO} \Rightarrow O\hat{A}B = O\hat{B}'B$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود: $O\hat{A}C = O\hat{C}'C$

همچنین داریم:

$$\left.\begin{matrix} O\hat{A}B = O\hat{B}'B \\ O\hat{A}C = O\hat{C}'C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{OB'=OC'} O\hat{A}B = O\hat{A}C$$

$\Rightarrow AO$ نیمساز زاویهٔ BAC است

اما گزینهٔ «۴» لزوماً صحیح نمی‌باشد.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ *(فرشاد فرامرزی)*

شعاع دایرهٔ محاطی داخلی برابر $r = \frac{S}{p}$ و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با رأس A برابر $r_a = \frac{S}{p-a}$ است. برای آن که شعاع دایرهٔ محاطی خارجی کوچک‌تر باشد، باید ضلع a کوچک‌ترین ضلع مثلث باشد:

$$p = \frac{۷+۵+۴}{۲} = ۸$$

$$\begin{cases} r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{S}{۸-۴} = \frac{S}{۴} \\ r = \frac{S}{p} = \frac{S}{۸} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_a}{r} = \frac{\frac{S}{۴}}{\frac{S}{۸}} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{دایرهٔ محاطی خارجی}}}{S_{\text{دایرهٔ محاطی داخلی}}} = (\frac{r_a}{r})^۲ = ۲^۲ = ۴$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۰۱- *(آیدا آریانفر)*

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(x-۶)^۲ = ۳۲ \Rightarrow x^۲ - ۱۲x + ۳۶ = ۳۲ \Rightarrow x^۲ - ۱۲x + ۴ = ۰$$

سپس مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{-b}{a} = ۱۲ \quad ، \quad P = \frac{c}{a} = ۴$$

عبارت داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A = |\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} - \frac{۱}{\sqrt{\beta}}| \Rightarrow A^۲ = \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} - \frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\Rightarrow A^۲ = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} - \frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}} \Rightarrow A^۲ = \frac{S}{P} - \frac{۲}{\sqrt{P}}$$

$$\Rightarrow A^۲ = \frac{۱۲}{۴} - \frac{۲}{\sqrt{۴}} \Rightarrow A^۲ = ۲ \xrightarrow{A>۰} A = \sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۸ و ۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۲- *(سینا محمدپور)*

ابتدا معادلهٔ داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم.

$$۳|x+۶| - \sqrt{۴ - ۴x + x^۲} = ۰ \Rightarrow ۳|x+۶| - \sqrt{(x-۲)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳|x+۶| - |x-۲| = ۰ \Rightarrow ۳|x+۶| = |x-۲|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳(x+۶) = x-۲ \Rightarrow x = -۱۰ \\ ۳(x+۶) = -(x-۲) \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله عبارت است از: $-۴ - ۱۰ = -۱۴$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۳- (علی شهرابی)

با تجزیهٔ مخرج‌ها و بعد از آن با مخرج مشترک‌گیری، معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲x-۱}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{x-۲}{(x+۲)(x-۱)}=\frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)}$$

$$\Rightarrow \frac{(۲x-۱)(x+۲)+(x-۲)(x+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+۲)}=\frac{۶x}{(x+۱)(x+۲)} \xrightarrow{x\neq -۱,-۲,۱}$$

$$\frac{۲x^۲+۳x-۲+x^۲-x-۲}{x-۱}=۶x \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۴=۶x(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۲x-۴=۶x^۲-۶x \Rightarrow ۳x^۲-۸x+۴=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۸\pm۴}{۶} \Rightarrow x_۱=۲\ ,\ x_۲=\frac{۲}{۳}$$

پس ریشهٔ کوچک‌تر این معادله، $x=\frac{۲}{۳}$ است.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۷ و ۱۷ تا ۱۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۴- (امیرهوشنگ خمسه)

طبق تعریف عمودمنصف، باید فاصلهٔ نقطهٔ P از نقاط A و B یکسان باشد.

$$|AP|=|BP|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۴m-۰)^۲+(۱۱-m)^۲}=\sqrt{(۴m-۶)^۲+(۱۱-۱۵)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶m^۲+(۱۱)^۲-۲۲m+m^۲=۱۶m^۲-۴۸m+۳۶+۱۶$$

$$\Rightarrow m^۲+۲۶m+۶۹=۰ \Rightarrow (m+۳)(m+۲۳)=۰ \Rightarrow m=-۳ \text{ یا } -۲۳$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲ و ۲۹ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۵– *(شروین سیاح‌نیا)*

واضح است که مبدأ مختصات روی هیچ کدام از دو خط مذکور قرار ندارد. بنابراین سه رأس مستطیل روی دو خط مذکور و رأس چهارم مبدأ مختصات است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از دو خط $x+y-۷=۰$ و $x-y+۵=۰$ طول و عرض مستطیل را مشخص می‌کنند:

$$\begin{cases} \text{فاصلهٔ مبدأ از } x+y-۷=۰ = \dfrac{|۰+۰-۷|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \dfrac{۷\sqrt{۲}}{۲} \\ \text{فاصلهٔ مبدأ از } x-y+۵=۰ = \dfrac{|۰-۰+۵|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}} = \dfrac{۵\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۷\sqrt{۲}}{۲} = ۱۷/۵$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۶– *(آیدا آریانفر)*

مجموع ۲۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۲۴} = \frac{۲۴}{۲}(a_۱ + a_{۲۴}) \Rightarrow S_{۲۴} = ۱۲(a_۱ + a_{۲۴})$$

چون $۱+۲۴ = ۲+۲۳$، پس $a_۱ + a_{۲۴} = a_۲ + a_{۲۳}$ است و در نتیجه:

$$S_{۲۴} = ۱۲(a_۲ + a_{۲۳})$$

از طرفی مجموع سه جملهٔ اول ۱۵ است، پس:

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۱۵ \Rightarrow ۳a_۲ = ۱۵ \Rightarrow a_۲ = ۵$$

با جای‌گذاری در $S_{۲۴}$ داریم:

$$S_{۲۴} = ۱۲(a_۲ + a_{۲۳}) \Rightarrow ۳۶۰ = ۱۲(۵ + a_{۲۳}) \Rightarrow a_{۲۳} = ۲۵$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۷– *(محمدمصطفی ابراهیمی)*

$$\sqrt{x^۲} = (۳-\sqrt{-x})^۲ \Rightarrow |x| = (۳-\sqrt{-x})^۲$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، یعنی $-x \geq ۰$ پس $x \leq ۰$ می‌شود، بنابراین $|x| = -x$ می‌شود.

$$-x = (۳-\sqrt{-x})^۲ \Rightarrow -x = ۹ + (-x) - ۶\sqrt{-x} \Rightarrow ۶\sqrt{-x} = ۹$$

$$\sqrt{-x} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = -\frac{۹}{۴}$$

این عدد در بازهٔ $(-۲, -۳)$ قرار می‌گیرد. *(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- *(علی شهرابی)*

اعداد مورد نظر را x می‌گیریم. فاصلهٔ x از یک برابر با $|x-1|$ است.

فاصلهٔ مربع x از یک برابر با $|x^2-1|$ و اگر این دو فاصله برابر باشند، داریم:

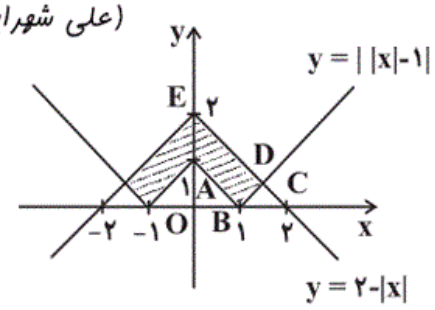
$$|x^2-1|=|x-1| \Rightarrow |x-1||x+1|-|x-1|=0$$

$$\Rightarrow |x-1|(|x+1|-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|=0 \Rightarrow x=1 \\ |x+1|=1 \Rightarrow x=0\ ,\ -2 \end{cases}$$

پس سه عدد ۱، ۰ و ۲- با این ویژگی داریم. *(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۹)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۰۹- *(علی شهرابی)*



$$y=\sqrt{x^2-2|x|+1}$$

$$=\sqrt{|x|^2-2|x|+1}$$

$$=\sqrt{(|x|-1)^2}=||x|-1|$$

مساحت مثلث OAB برابر است با:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

مختصات رأس D را از تقاطع دو خط $y=x-1$ و $y=2-x$ پیدا می‌کنیم:

$$\Rightarrow D\left(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$$

پس مساحت مثلث BDC برابر است با:

$$S_{\Delta BDC}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{1}{4}$$

حالا مساحت ذوزنقهٔ $AEDB$ را پیدا می‌کنیم:

$$S_{AEDB}=S_{\Delta OEC}-(S_{\Delta OAB}+S_{\Delta BDC})$$

$$\Rightarrow S_{AEDB}=\frac{2\times 2}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

کافی است مساحت به‌دست‌آمده را در ۲ ضرب کنیم تا مساحت قسمت هاشورخورده به دست آید:

$$\frac{5}{4}\times 2=2/5$$

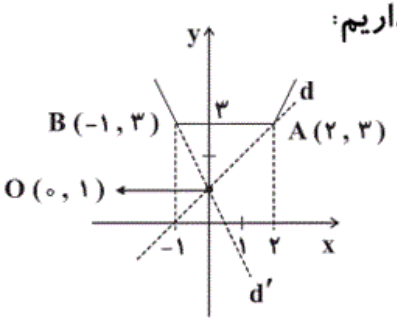
(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۰- (محمدرضا حسین‌زاده)

برای این‌که دو نمودار تقاطع نداشته باشند، باید شیب خط از شیب خط d کم‌تر و از شیب خط d' بیش‌تر باشد، لذا داریم:



$$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۰} = ۱$$

$$k < m_{OA} \Rightarrow k < ۱ \quad (۱)$$

$$m_{OB} = \frac{۳-۱}{-۱-۰} = -۲ \quad , \quad m_{OB} < k \Rightarrow -۲ < k \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} -۲ < k < ۱$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۱- (سیدمحمدصالح ارشاد)

می‌دانیم $|-a| = |a|$ است، پس $|x^۲ - x - ۲| = |۲ + x - x^۲|$. از طرفی می‌دانیم زمانی تساوی $|a| + |b| = |a + b|$ برقرار است که $ab \geq ۰$ باشد، پس اگر $a = x^۲ - x - ۲$ و $b = x + ۲$ باشد، $a + b = x^۲$ است، در نتیجه:

$$|\underbrace{x^۲ - x - ۲}_{a}| + |\underbrace{x + ۲}_{b}| = |\overbrace{x^۲ - x - ۲ + x + ۲}^{a+b}| = x^۲$$

$$\xrightarrow{ab \geq ۰} (x^۲ - x - ۲)(x + ۲) \geq ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱)(x + ۲) \geq ۰$$

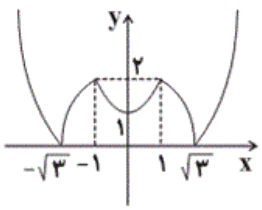
$$\xrightarrow{x < ۱} (x + ۱)(x + ۲) \leq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq -۱$$

پس مجموعه جواب معادله شامل ۲ عدد صحیح است.

تذکر: $|x^۲| = x^۲$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴



برای این‌که معادلهٔ $a = |-۲| - ||x^۲ - ۱||$، ۶ ریشه داشته باشد، باید $۱ < a < ۲$ باشد.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۳- (علی شهرابی)

ابتدا معادله را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\sqrt{۲+\frac{۱}{x}}+۲\sqrt{\frac{x}{۲x+۱}}=۳\Rightarrow\sqrt{\frac{۲x+۱}{x}}+۲\sqrt{\frac{x}{۲x+۱}}=۳$$

با فرض $\sqrt{\frac{۲x+۱}{x}}=t$، معادله را برحسب t می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$t+\frac{۲}{t}=۳\Rightarrow t^۲-۳t+۲=۰\Rightarrow t=۱\ ,\ t=۲$$

حال مقدار x را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{\frac{۲x+۱}{x}}=۱\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=۱\Rightarrow x=-۱$$

$$\sqrt{\frac{۲x+۱}{x}}=۲\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=۴\Rightarrow ۴x=۲x+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

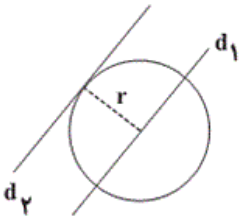
بنابراین مجموع ریشه‌های این معادله $-\frac{۱}{۲}$ است. سایر گزینه‌ها نیز نادرست‌اند.

(حسابان ۱- صفحه‌های ۱۳ و ۱۷ تا ۲۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۴- (محمدمصطفی ابراهیمی)

دو خط $d_۱: ۳x-y=۱$ و $d_۲: ۲y=۶x+۳$ موازی هستند. پس فاصلهٔ این دو خط همان شعاع دایره است.



$$d_۲: ۲y=۶x+۳\Rightarrow ۳x-y+\frac{۳}{۲}=۰$$

$$d_۱: ۳x-y-۱=۰$$

فاصلهٔ دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$r=\frac{|\frac{۳}{۲}-(-۱)|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۱۰}}$$

$$S=\pi r^۲=\pi\times\frac{\frac{۲۵}{۴}}{۱۰}=\frac{۵\pi}{۸}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

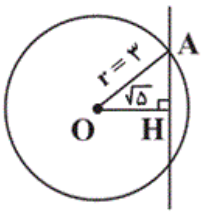
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- (محمدرضا حسین‌زاده)

ابتدا باید فاصلهٔ نقطه $(۳ , ۲)$ را از خط $y = ۲x - ۶$ به‌دست آوریم:

$$OH = \frac{|۳ - ۲(۲) + ۶|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

چون $\sqrt{۵} < ۳$، بنابراین خط در دایره وتر ایجاد می‌کند. با توجه به شکل، اندازهٔ AH را با استفاده از فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:



$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲$$

$$AH^۲ = ۳^۲ - (\sqrt{۵})^۲ = ۴ \Rightarrow AH = ۲$$

طول وتر مورد نظر $۲AH = ۴$ است. (حسابان ۱- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

با توجه به شکل کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از تابع f برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d است. معادلهٔ خط d به صورت زیر است:

$$x > ۲ : f(x) = x - ۲$$

که فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴ , ۰)$ از d برابر است با:

$$\begin{cases} y = x - ۲ \\ A(۴ , ۰) \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|۰ - ۴ + ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸ و ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۷- (امین قربانعلی‌پور)

با توجه به قدرمطلق، تعیین علامت می‌کنیم و در ضمن زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس:

$$x \geq ۱ \Rightarrow \sqrt{x + ۱} = x - ۱ + x = ۲x - ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x + ۱ = ۴x^۲ - ۴x + ۱$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۵x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ غ ق ق} \quad , \quad x = \frac{۵}{۴} \text{ ق ق}$$

$$-۱ \leq x < ۱ \Rightarrow \sqrt{x + ۱} = -x + ۱ + x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + ۱} = ۱ \Rightarrow x + ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۰ \text{ ق ق}$$

بنابراین این معادله ۲ ریشهٔ حقیقی دارد. (حسابان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۸- (سینا محمدپور)

از آنجایی که نقطهٔ D وسط AB است، داریم:

$$A+B=2D \Rightarrow \begin{cases} m+n=2(-1) \\ n+2-m=2(3) \end{cases} \Rightarrow m=-3\ ,\ n=1$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} A(m\ ,\ n)=A(-3\ ,\ 1) \\ B(n\ ,\ 2-m)=B(1\ ,\ 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

از طرفی می‌دانیم در یک مثلث طول پاره‌خط واصل بین وسط‌های دو ضلع برابر با نصف طول ضلع دیگر مثلث است، به عبارتی:

$$EF=\frac{1}{2}AB \Rightarrow EF=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۹- (محمد پوراحمدی)

فرض کنیم طول نقطهٔ مفروض α باشد چون نقطه روی خط به معادلهٔ $y=2x+1$ است عرض این نقطه برابر $2\alpha+1$ است. اگر این نقطه را C درنظر بگیریم، داریم: $C(\alpha\ ,\ 2\alpha+1)$، پس: $AC=BC$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha+1-0)^2}=\sqrt{(\alpha+1)^2+(2\alpha+1-0)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha-3)^2=(\alpha+1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-3=\alpha+1 \\ \alpha-3=-\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3=1 \text{ جواب ندارد} \\ 2\alpha=+2 \Rightarrow \alpha=+1 \end{cases} \Rightarrow C(1\ ,\ 3)$$

(حسابان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۰- (محمد پوراحمدی)

معادلهٔ قطرهای دایره: $mx+(m-1)y=m+2$

$$\begin{matrix} m=0 \Rightarrow -y=2 \\ m=1 \Rightarrow x=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره } C(3\ ,\ -2)$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط $3x-4y-2=0$ برابر شعاع دایره است.

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|9+8-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

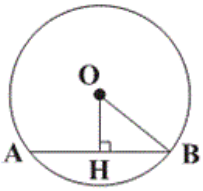
(حسابان ۱- صفحه‌های ۳۳ تا ۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۱ (سیدسروش کریمی‌مداحی)

با توجه به فرض داریم:



$$OB = ۱۵$$
$$OH = ۹$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB : $OB^۲ = OH^۲ + BH^۲$

$$\Rightarrow ۱۵^۲ = ۹^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH = ۱۲$$

می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر را نصف می‌کند، بنابراین داریم:

$$AB = ۲BH = ۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۱۴۲ (رحیم مشتاق‌نظم)

چون $AB \parallel DE$، پس $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{AE} = ۱۱۰^\circ$ است. لذا:

$$\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

زاویهٔ $B\hat{A}C$ زاویه‌ای ظلی است پس: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۷۰^\circ}{۲} = ۳۵^\circ$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

✓۱ ۲ ۳ ۴

-۱۴۳ (رحیم مشتاق‌نظم)

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{MPN} - \overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow ۷۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{MPN} - \overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MPN} - \overset{\frown}{MN} = ۱۴۰^\circ \\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{PMQ} - \overset{\frown}{PQ}}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{PMQ} - \overset{\frown}{PQ}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{PMQ} - \overset{\frown}{PQ} = ۱۰۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MPN} - ۱۴۰^\circ \\ \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{PMQ} - ۱۰۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{MN} = ۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{MN} - ۱۴۰^\circ \\ \overset{\frown}{PQ} = ۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{PQ} - ۱۰۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{\frown}{MN} = ۱۱۰^\circ \\ \overset{\frown}{PQ} = ۱۳۰^\circ \end{cases}$$

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{MN}}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ + ۱۱۰^\circ}{۲} = \frac{۲۴۰^\circ}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

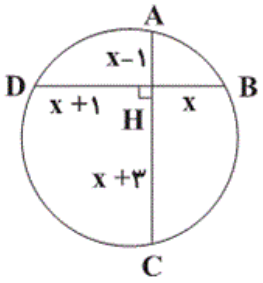
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

۱ ✓۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

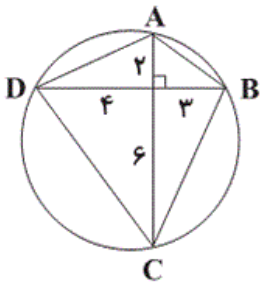
۱۴۴- (علی شهرابی)

رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند، پس:



$$AH \times HC = BH \times HD$$
$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = x(x+1)$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 + x \Rightarrow x = 3$$

لذا مساحت آن برابر است با:



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۵- (سجاد عابد)

در دایرهٔ C_1 داریم:

$$MT^2 = MP \cdot MN \Rightarrow MN = \frac{4^2}{2} = 8$$

و در دایرهٔ C_2 داریم:

$$MT'^2 = MN \cdot MQ \Rightarrow MQ = \frac{12^2}{8} = 18$$
$$\Rightarrow NQ = MQ - MN = 18 - 8 = 10$$

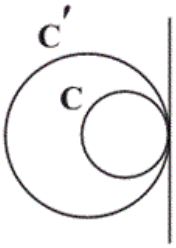
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۶ *(امیرهوشنگ خمسه)*

چون دو دایره دارای یک مماس مشترک می‌باشند، قطعاً مماس درون هستند.



$$OO' = |R - R'|$$
$$۴ - ۲a = |۲a - a| = |a| = a$$
$$۴ - ۲a = a \Rightarrow a = \frac{۴}{۳}$$

توجه داشته باشید که a طول شعاع دایره بوده، پس مثبت خواهد بود.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۴۷ *(علیرضا احدی)*

فرض کنید طول مماس مشترک خارجی برابر x و طول مماس مشترک داخلی برابر y باشد، داریم:

$$x = \sqrt{d^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲} \Rightarrow x^۲ = d^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲$$
$$y = \sqrt{d^۲ - (r_۱ + r_۲)^۲} \Rightarrow y^۲ = d^۲ - (r_۱ + r_۲)^۲$$
$$\Rightarrow x^۲ - y^۲ = (r_۱ + r_۲)^۲ - (r_۱ - r_۲)^۲$$
$$= r_۱^۲ + r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲ - r_۱^۲ - r_۲^۲ + ۲r_۱r_۲ = ۴r_۱r_۲$$

می‌دانیم $x - y = ۲$ و $x + y = ۶$ است. داریم:

$$۴r_۱r_۲ = x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y) = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow r_۱r_۲ = ۳$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۴۸ *(علیرضا احدی)*

مجموع طول مماس مشترک‌های خارجی برابر با ۲۴ است ، پس طول هر مماس مشترک خارجی ۱۲ است، یعنی اگر فرض کنیم $OO' = d$، داریم:

$$۱۲ = \sqrt{d^۲ - (۸ - ۳)^۲} \Rightarrow ۱۴۴ = d^۲ - ۲۵ \Rightarrow d^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow d = ۱۳$$

پس برای طول مماس داخلی TT' داریم:

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (۸ + ۳)^۲} \Rightarrow TT' = \sqrt{۱۶۹ - ۱۲۱} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

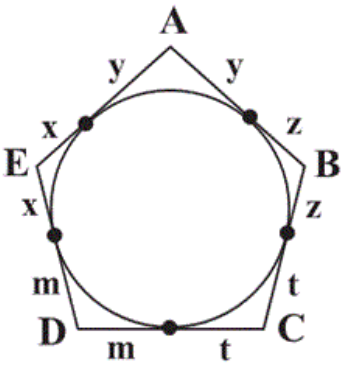
(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۹- *(سارا خسروی)*

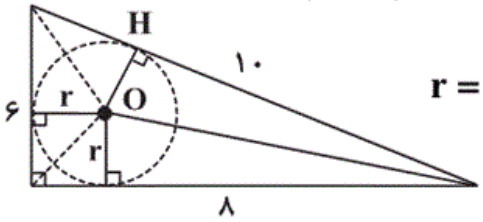
پنج ضلعی محیطی است، یعنی می‌توان داخل آن یک دایره محاط کـرد. از طرفی می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه بر دایـره بـا یکـدیگر برابرند، پس شکل را بر این اساس نام‌گذاری می‌کنیم:



۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۰- *(سروش موئینی)*

بنابر فرضیات مسأله متوجه می‌شویم که طول اضلاع مثلث قـائم‌الزاویـه ۶، ۸ و ۱۰ می‌باشند. از طرفی نقطهٔ همرسی نیمسازها از اضلاع مثلث به یـک فاصله است. به عبارت دیگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محـاطی داخلـی مثلـث بوده و فاصلهٔ آن تا هر یک از اضلاع برابر با شعاع دایره (r) اسـت. حـال اگر مساحت و نصف محیط مثلث که یـک سـه ضـلعی محیطـی محسـوب می‌شود را به ترتیب با S و p نمایش دهیم، داریم:



$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow 2r = \frac{2S}{p} = \frac{2 \times 24}{12} = 4$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۲۵)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶۱- *(سیدوحید ذوالفقاری)*

در ترکیب دو شرطی، زمانی ارزش گزاره درست است که هر دو گزاره دارای ارزش یکسان باشند. یعنی یا هر دو گزاره «درست» و یا هر دو «نادرست» باشند. پس با رسم جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$
د	د	ن	د
ن	ن	د	د

$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن
ن	ن	ن

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۶ تا ۱۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۶۲- *(امیرحسین ابومحبوب)*

ارزش گزاره نادرست است. زیرا هیچ عدد صحیح منفی‌ای وجود ندارد که مربع آن کوچک‌تر از ۱ باشد. در نقیض یک گزارهٔ سوری، سور وجودی به سور عمومی تبدیل می‌شود. همچنین در نقیض یک ترکیب عطفی، هر دو گزارهٔ سازندهٔ آن، نقیض شده و ترکیب عطفی به فصلی تبدیل می‌شود، پس نقیض گزارهٔ مورد نظر به صورت زیر است:

$$\forall y \in Z \; ; \; y \geq 0 \vee y^2 \geq 1$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۶۳- *(علی ارجمند)*

فرض می‌کنیم تعداد اعضای مجموعهٔ A برابر n باشد، از آن‌جا که تعداد اعضای $A - B$ برابر ۷ است، پس تعداد اعضای $A \cap B$ برابر با $n - 7$ می‌باشد. در نتیجه:

$$2^n - 2^{n-7} = 1016 \Rightarrow 2^{n-7}(2^7 - 1) = 1016 \Rightarrow 2^{n-7}(127) = 1016$$
$$\Rightarrow 2^{n-7} = 8 = 2^3 \Rightarrow n - 7 = 3 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow 2^n = 1024$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶۴- (علی بهرمندپور)

$A_{10} - A_7 = \{-10, -9, -8, 8, 9, 10\}$

$A_7 - A_5 = \{-7, -6, 6, 7\}$

$A_5 - A_3 = \{-5, -4, 4, 5\}$

$A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

چهار مجموعهٔ بالا، همهٔ ویژگی‌های افراز برای مجموعهٔ A را دارند.

(آمار و احتمال- صفحهٔ ۲۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۶۵- (محمد پوراحمدی)

مثال نقض

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $A \cup B = A \cup C$ است ولی $B \neq C$ می‌باشد.

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$$
$$= [(A \cap (B \cup C)) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$$

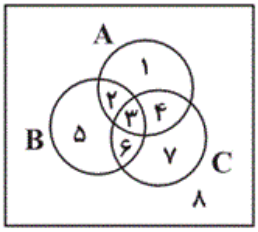
(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۶۷- *(مرتضی فهیم‌علوی)*

اگر قسمت‌های مختلف نمودار ون سه مجموعهٔ A، B و C را مطابق شکل شماره‌گذاری کنیم، آن‌گاه داریم:



$$A-(B\cup C)=\{۱,۲,۳,۴\}-\{۲,۳,۴,۵,۶,۷\}=\{۱\}$$

$$A\cap(B-C)=\{۱,۲,۳,۴\}\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$$

$$(A-(B\cup C))\cup(A\cap(B-C))=\{۱\}\cup\{۲\}=\{۱,۲\}=A-C$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۶۸- *(ندا صالح‌پور)*

$$[A-(A\cap B')]\cup\underbrace{[B\cup(A'\cap B)]}_{\text{قانون جذب}}=[A\cap(A\cap B')']\cup B$$

$$=[A\cap(A'\cup B)]\cup B=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup B$$

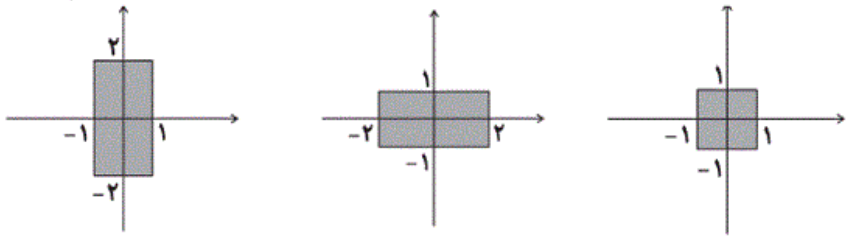
$$=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{قانون جذب}}=B$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۶۹ (محمد پوراحمدی)



$A\times B$ $\quad$ $B\times A$ $\quad$ $(A\times B)\cap(B\times A)$

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1\ ,\ -2\le y\le 2\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\,|\,-2\le x\le 2\ ,\ -1\le y\le 1\}$$

$$(A\times B)\cap(B\times A)=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1\ ,\ -1\le y\le 1\}$$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ ✓ $\quad$ ۲ $\quad$ ۳ $\quad$ ۴

-۱۷۰ (عزیزالله علی‌اصغری)

$$\begin{cases} A\times B=B\times C \\ A\ ,\ B\ ,\ C\neq\varnothing \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=B \\ B=C \end{cases}\Rightarrow A=B=C$$

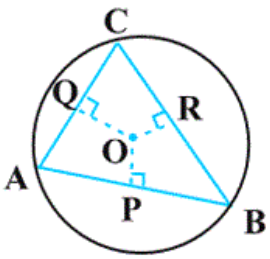
بنابراین گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» درست هستند. ولی گزینهٔ «۲» نادرست است، زیرا، $B^2\neq\varnothing$ و $C^2-A^2=\varnothing$

(آمار و احتمال- صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

۱ $\quad$ ۲ ✓ $\quad$ ۳ $\quad$ ۴

-۱۳۱ (کتاب آبی)

در هندسهٔ دهم آموختیم که در یک مثلث، ضلع روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه، بزرگ‌ترین ضلع است و ضلع روبه‌رو به کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌ترین ضلع است. داریم:



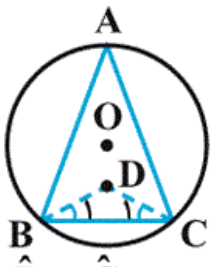
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}=70^\circ \\ \hat{B}=50^\circ\end{matrix}\right\}\rightarrow\hat{C}=60^\circ\rightarrow\hat{B}<\hat{C}<\hat{A}\rightarrow AC<AB<BC$$

۱ $\quad$ ۲ $\quad$ ۳ $\quad$ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- (کتاب آبی)

مطابق شکل:



$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = ۱۸۰^\circ - B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۶۰^\circ$$

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - ۱۶۰^\circ = ۲۰^\circ$$

$$\hat{A} = ۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۴۰^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱) ۲) ۳) ۴ ✓

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۳ *(کتاب آبی)*

مطابق آن‌چه که در کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی آمده، اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، طول کمان برابر $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر $S=\frac{\pi R^۲}{۳۶۰}\alpha$ است.

حال داریم:

$$\begin{cases} L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi \Rightarrow R\alpha=۶۰\sqrt{۳} \\ S=\frac{\pi R^۲}{۳۶۰}\alpha=\pi \Rightarrow R^۲\alpha=۳۶۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R=۲\sqrt{۳} \Rightarrow BC=۲R=۴\sqrt{۳} \\ \alpha=\overset{\frown}{AB}=۳۰^\circ \Rightarrow \text{(زاویهٔ محاطی)}\ A\hat{C}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=۱۵^\circ \end{cases}$$

مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است (کمان BC نصف محیط دایره است و $B\hat{A}C=۹۰^\circ$) و یک زاویهٔ آن برابر ۱۵° است. طبق تمرین کتاب درسی هندسهٔ دهم، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ ۱۵° داشته باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است. پس داریم:

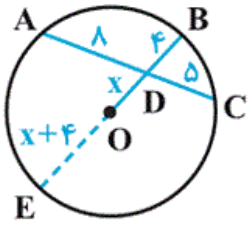
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}BC\times AH=\frac{۱}{۲}BC\times\frac{BC}{۴}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۴- (کتاب آبی)

فرض کنیم امتداد BO، دایره را در نقطهٔ E قطع می‌کند، با فرض $OD = x$ داریم:



$$OE = OB = x + ۴$$

حال بنا به رابطهٔ طولی در دایره داریم:

$$DA.DC = DB.DE \Rightarrow ۸ \times ۵ = ۴(۲x + ۴) \Rightarrow x = ۳$$

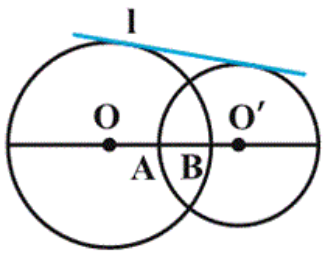
و در نتیجه:

$$R = OE = x + ۴ = ۳ + ۴ = ۷$$

(هندسه ۲- صفحهٔ ۱۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۵- (کتاب آبی)



اگر R و R' شعاع‌ها و d طول خط‌المرکزین و l طول مماس مشترک خارجی دو دایره باشند، داریم:

$$l = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۱۵} = \sqrt{d^۲ - (۶ - ۴)^۲} \Rightarrow d = OO' = ۸$$

$$AB = (R + R') - d = ۲$$

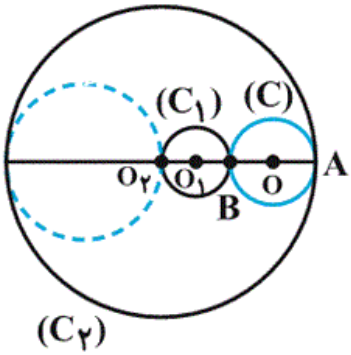
(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۶- (کتاب آبی)

چون $d < |r_۱ - r_۲|$، پس دو دایره متداخل‌اند، به‌طوری که دایرهٔ کوچکتر یعنی $C_۱$ درون دایرهٔ بزرگتر یعنی $C_۲$ قرار دارد، دایرهٔ $C(O, R)$ که در شکل نشان داده شده بر هر دو دایره مماس است و شعاع آن برابر است با:

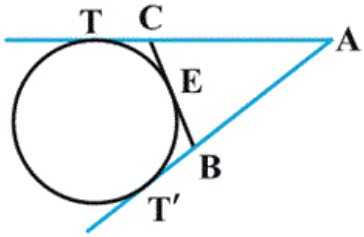


$$R = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}(r_۲ - ۲r_۱) = \frac{۱}{۲}(۳ - ۱) = ۱$$

۱) ۲ ✓ ۳) ۴)

۱۳۷- (کتاب آبی)

چون از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT = AT'$ و داریم:



$$\begin{cases} BE = BT' \\ CE = CT \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

$$= AB + BE + CE + AC$$

$$= AB + BT' + CT + AC = AT' + AT = ۲AT$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱) ۲) ۳) ۴ ✓

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

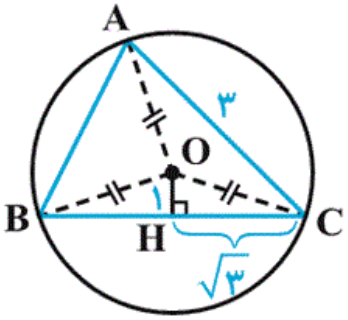
۱۳۸- (کتاب آبی)

می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، محل همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن است.

$$\overset{\Delta}{ABC}: OA = OB = OC = R$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{OCH}: R^2 = 1 + 3 \Rightarrow R^2 = 4$$

$$\Rightarrow R = 2 \Rightarrow OA + OB + OC = 3R = 6$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴ ۳ ۲✓ ۱

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = 4\pi\sqrt{3} \Rightarrow R^2 = 4\sqrt{3}$$

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = 3S(\overset{\Delta}{AOB}) = 3\left(\frac{1}{2}R \times R \times \sin 120^\circ\right)$$

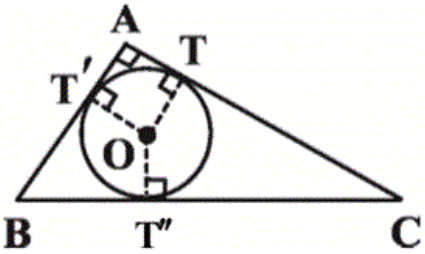
$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{3}{2}R^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times 4\sqrt{3} = 9$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۴✓ ۳ ۲ ۱

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۰ (کتاب آبی)



کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی هر مثلث، دایرهٔ محاطی داخلی و بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی هر مثلث، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأسی است که بزرگ‌ترین زاویه را دارد. مطابق شکل چهارضلعی $OTAT'$ مربع است، پس:

$$OT = AT = r$$

داریم: $CT = CT'' \quad , \quad BT' = BT'' \quad , \quad AT = AT'$

$$\Rightarrow p = CT'' + T''B + AT$$

$$\Rightarrow AT = p - (CT'' + T''B) = p - a$$

$$AT = r = p - a = \frac{S}{p} \Rightarrow S = p(p-a)$$

حال با توجه به رابطهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی داریم:

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{p(p-a)}{p-a} = p \Rightarrow \begin{cases} r = p - a = ۱ \\ r_a = p = ۶ \end{cases} \Rightarrow a = ۵$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر با نصف وتر است. پس:

$$R = \frac{a}{۲} = ۲/۵$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۱۵۱ (کتاب آبی)

از رابطهٔ $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ اندازهٔ کمان AC مشخص می‌شود. داریم:

$$L = \frac{\pi \times ۲}{۱۸۰}\alpha = \frac{\pi}{۲} \rightarrow \alpha = \overset{\frown}{AC} = ۴۵^\circ$$

چون زاویهٔ ABC زاویهٔ محاطی است، پس اندازهٔ آن نصف کمان AC است، پس:

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

✓۱ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۲- (کتاب آبی)

مطابق شکل:

$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ - B\hat{D}C = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 160^\circ$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

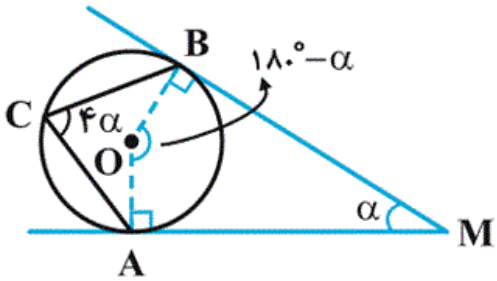
$$\hat{A} = 20^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 40^\circ$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۵۳- (کتاب آبی)

A و B را به مرکز دایره وصل می‌کنیم، $A\hat{O}B$ زاویهٔ مرکزی است و با توجه به این‌که $OA \perp AM$ و $OB \perp BM$، در چهارضلعی AOBM داریم:



$$A\hat{O}B + 90^\circ + 90^\circ + \alpha = 360^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \alpha$$

زاویهٔ محاطی است $C \Rightarrow \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

$$\Rightarrow 4\alpha = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow 9\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

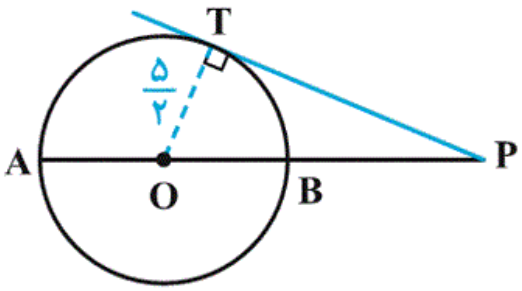
(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۵۴

(کتاب آبی)



طبق فرض‌های مسئله $PA = ۹$ و $PO = \frac{۱۳}{۲}$ است، پس اگر شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه:

$$R = OA = AP - OP = ۹ - \frac{۱۳}{۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow OT = R = \frac{۵}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$PT^۲ = OP^۲ - OT^۲ = (\frac{۱۳}{۲})^۲ - (\frac{۵}{۲})^۲ = \frac{۱۶۹ - ۲۵}{۴}$$

$$PT^۲ = \frac{۱۴۴}{۴} = ۳۶ \Rightarrow PT = ۶$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

-۱۵۵

(کتاب آبی)

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD} \text{ قائم‌الزاویه}: AD^۲ = AB^۲ - BD^۲ \\ AD^۲ = AC.AB \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^۲ - BD^۲ = AC.AB$$

با فرض $AC = x$، داریم:

$$(x+۴)^۲ - ۶^۲ = x(x+۴) \Rightarrow x^۲ + ۸x - ۲۰ = x^۲ + ۴x$$

$$\Rightarrow x = ۵ \Rightarrow AB = AC + BC = ۵ + ۴ = ۹$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۱✓ ۲ ۳ ۴

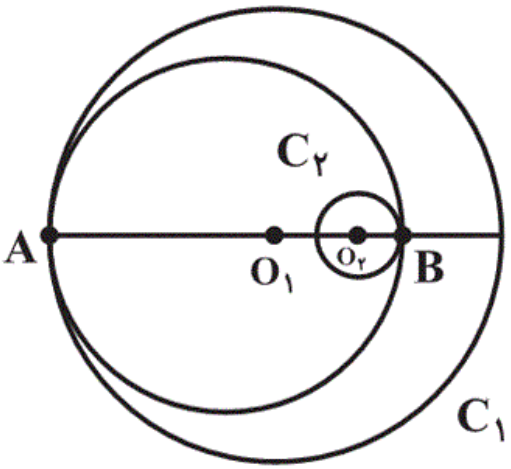
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۵۶- (کتاب آبی)

با توجه به فرض سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:

$$O_1O_2 = 2\ ,\ R_1 = 7, R_2 = 1$$

مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای که مماس بر هر دو دایرهٔ C_1 و C_2 رسم شده است، در نقاط A و B به ترتیب بر دوایر C_1 و C_2 مماس می‌باشد.



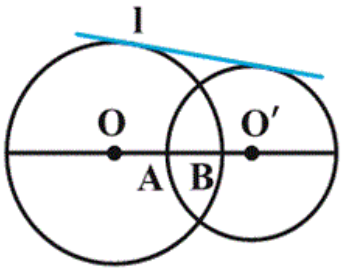
$$AB = AO_1 + O_1O_2 + O_2B$$
$$= R_1 + O_1O_2 + R_2 = 7 + 2 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایرهٔ مورد نظر}: R = \frac{AB}{2} = 5$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۵۷- (کتاب آبی)



اگر R و R' شعاع‌ها و d طول خط‌المرکزین و l طول مماس مشترک خارجی دو دایره باشند، داریم:

$$l = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 2\sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (6-4)^2} \Rightarrow d = OO' = 8$$

$$AB = (R + R') - d = 2$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

$$R = \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱}{۲}(r_۲ - ۲r_۱) = \frac{۱}{۲}(۳ - ۱) = ۱$$

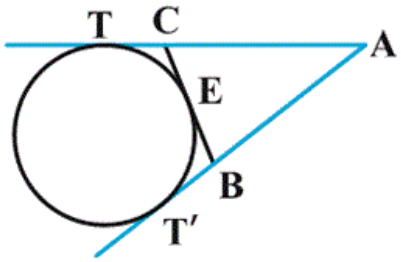
توجه کنید که در شکل بالا، دایره‌ای که به صورت خط‌چین نشان داده شده نیز بر هر دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ مماس است اما شعاع آن برابر واحد نیست، زیرا شعاع آن برابر است با: $\frac{۱}{۲}r_۲ = ۱/۵$ ، پس یک دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ مماس است. شعاع بقیهٔ دایره‌هایی که بر دو دایره مماس هستند، عددی بین ۱ و ۱/۵ است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۹- (کتاب آبی)

چون از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AT = AT'$ و داریم:



$$\begin{cases} BE = BT' \\ CE = CT \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC$$

$$= AB + BE + CE + AC$$

$$= AB + BT' + CT + AC = AT' + AT = ۲AT$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

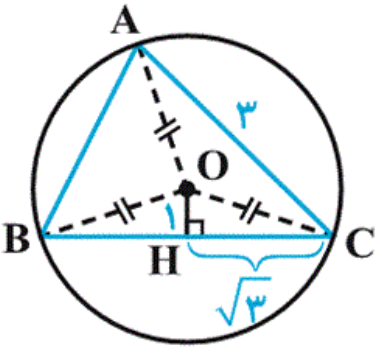
۱۶۰-

می‌دانیم مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، محل همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های آن است.

$$\overset{\Delta}{ABC} : OA = OB = OC = R$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{OCH} : R^{۲} = ۱ + ۳ \Rightarrow R^{۲} = ۴$$

$$\Rightarrow R = ۲ \Rightarrow OA + OB + OC = ۳R = ۶$$



(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴