



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دیفرانسیل و انتگرال - 10 سوال

۸۱- اگر α عددی گنگ باشد، کدام عدد الزاماً گنگ است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) $(|\alpha| + 3)^2$ (۲) $\frac{\alpha + 1}{2\alpha - 1}$ (۳) $[-\alpha] + [\alpha]$ (۴) $[\alpha](\alpha^2 + 1)$

۸۲- از نامساوی‌های $2x + y > 5$ و $x - y < 1$ کدام گزینه الزاماً نتیجه می‌شود؟

- (۱) $x < 2$ (۲) $x > 2$ (۳) $y < 1$ (۴) $y > 1$

۸۳- کدام دنباله ثابت نیست؟

- (۱) $\{\cos(6n + 1)\frac{\pi}{3}\}$ (۲) $\{n \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}\}$ (۳) $\{(-1)^{n+1} \cos n\pi\}$ (۴) $\{(-1)^n \sin \frac{n\pi}{2}\}$

۸۴- دنباله a_n که در آن $a_1 = -1$ و $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2a_n - 1}$ باشد، به کدام عدد همگراست؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) دنباله واگراست.

۸۵- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e} \right]$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) e (۴) وجود ندارد.

۸۶- اگر $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n+3} & ; n \text{ زوج} \\ \frac{3n-1}{n+1} & ; n \text{ فرد} \end{cases}$ و $b_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{n+2} & ; n \leq 10 \\ \frac{n+1}{n^2-100} & ; n > 10 \end{cases}$ ، آنگاه کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

- (۱) $\{a_n + b_n\}$ (۲) $\{a_n \times b_n\}$ (۳) $\{a_n - b_n\}$ (۴) $\{\frac{a_n}{b_n}\}$

۸۷- اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & ; x < 1 \\ x^2 + 2a & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۸۸- حاصل حد $f(x) = \left[\frac{99x}{\sin x} \right] - \left[\frac{100 \sin x}{x} \right]$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin 6x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۶ (۳) $-\sqrt{2}$ (۴) $-2\sqrt{2}$

۹۰- می‌خواهیم نشان دهیم تابع $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$ در نقطه $x = 2$ حد ندارد. کدام دنباله زیر را با دنباله $\left\{ \frac{2n+3}{n+4} \right\}$ می‌توان به کار برد؟

- (۱) $\left\{ \frac{2n+5}{n+3} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{n+1}{2n+3} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{2n+3}{n-1} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{4n+2}{2n+1} \right\}$

هندسه‌ی تحلیلی - 10 سوال

۱۱۱- اگر $|a| = 2$ ، $|b| = 3$ و $|(a \cdot b)(a \times b)| = 9$ باشد، زاویه بین دو بردار a و b کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 135° (۲) 30° (۳) 60° (۴) 15°

۱۱۲- اگر $c = a \times b = (1, 2, -1)$ باشد، حاصل $a \cdot (b \times c)$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) ۳۶

۱۱۳- معادله صفحه‌ای که شامل خط $L: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$ بوده و بر صفحه $P: x - z = 1$ عمود باشد، کدام است؟

- (۱) $3x - 2y - 3z = -3$ (۲) $x - 2y + z = 1$ (۳) $2x - y - z = -2$ (۴) $x - 2y + z = 2$

۱۱۴- به ازای کدام مقدار a ، دو خط $d: \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z}{-1}$ و $d': \frac{x+2}{1} = \frac{2-y}{2} = \frac{z+1}{a+1}$ متقاطع‌اند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۱۵- خط به معادله $x - (m+1)y = 4$ ، قائم بر دایره گذرا از نقطه $A = (3, -1)$ و به شعاع $\sqrt{2}$ است که مرکز آن بر نیمساز ناحیه چهارم مختصات واقع می‌باشد. m کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۱۶- اگر $A = \begin{bmatrix} |A|^2 & |A| \\ 3 & 4|A| \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع مقادیر $|A|$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۱

۱۱۷- اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ و $A^2 = -I$ باشد، آنگاه $|I - A|$ کدام می‌تواند باشد؟ ($|A| > 0$)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۱۸- اگر $|A| = 4$ و A یک ماتریس 2×2 باشد، آنگاه $\left| \frac{|A|}{2} A + \frac{2}{|A|} A \right|$ کدام است؟

- ۱۵ (۴) ۱۷ (۳) ۱۶ (۲) ۱۸ (۱)

۱۱۹- معادله $\begin{vmatrix} \circ & x-a & x-b \\ a-x & \circ & x-c \\ b-x & c-x & \circ \end{vmatrix} = 0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ بی‌شمار

۱۲۰- با افزودن یک واحد به کدام درایه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند؟

- a_{33} (۱) a_{22} (۲) a_{11} (۳) a_{32} (۴)

ریاضیات گسسته

۱۲۱- چند گراف ساده و همبند وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن، برابر ۷ باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۲۲- کدام گزینه نمی‌تواند مرتبه گراف منتظمی باشد که اندازه آن ۹۰ است؟

- ۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴)

۱۲۳- درختی از مرتبه ۷ دارای یک رأس از درجه ۵ Δ است. این گراف چند رأس از درجه زوج دارد؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

۱۲۴- فرض کنید m بزرگ‌ترین عدد طبیعی‌ای باشد که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۲۰، مربع خارج‌قسمت است. اگر این عدد به صورت $(abc)_7$ نوشته شود، آنگاه $a + b + c$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۲ (۲) ۱۱ (۳) ۱۰ (۴)

۱۲۵- اگر $(32b)_6 = (\overline{aab})_6$ باشد، بیش‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴)

۱۲۶- هرگاه سال نو با روز جمعه آغاز شود، چهارشنبه‌سوری همان سال چندم اسفند است؟ (منظور از چهارشنبه‌سوری، آخرین سه‌شنبه سال است.)

- ۲۵ اسفند (۱) ۲۶ اسفند (۲) ۲۷ اسفند (۳) ۲۸ اسفند (۴)

۱۲۷- ۳۶ متر پارچه به قیمت $\overline{xy39y}$ تومان خریداری شده است. اگر قیمت هر متر پارچه کمتر از هزار تومان و عددی طبیعی بر حسب تومان باشد، آنگاه قیمت هر متر پارچه چند تومان است؟

- ۷۶۱ (۱) ۸۳۱ (۲) ۶۷۱ (۳) ۹۵۱ (۴)

۱۲۸- معادله هم‌نهشتی $11x \equiv 33 \pmod{33}$ ، در مجموعه اعداد طبیعی سه‌رقمی چند جواب دارد؟

- ۲۶ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴)

۱۲۹- می‌خواهیم ۵۱ کیلو شکر را در کیسه‌های ۲ کیلویی و ۵ کیلویی بسته‌بندی کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴)

۱۳۰- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی y که در معادله سیاله $8x + 11y = 9$ صدق می‌کند، کدام است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴)

۹۱- اگر $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل A^{-12} کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

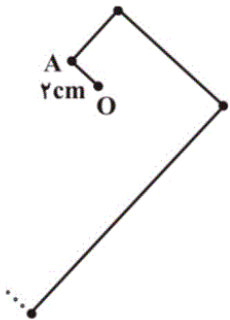
۹۲- در یک دنباله حسابی $a_7 - a_4 = 20$ است. اگر جمله هفتم سه برابر جمله پنجم باشد، حاصل $a_8 - a_6$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

۹۳- در یک دنباله حسابی، جمله هشتم سه برابر جمله سوم است. در این دنباله حاصل $\frac{S_{10}}{S_5}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۹

۹۴- عنکبوتی مسیری را مطابق شکل با شروع از نقطه O طی می‌کند. به طوری که طول هر پاره خطی که طی می‌کند، دو برابر طول پاره خط قبلی است. این عنکبوت چه تعداد از این پاره‌خطها را باید طی کند تا به اندازه 1022cm حرکت کرده باشد؟ ($OA = 2\text{cm}$)



- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۹۵- اگر S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی با قدرنسبت q ($q \neq 0$) باشد و $S_8 = \frac{2S_{12} + 3S_4}{5}$ ، آن‌گاه q^2 کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۹۶- اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x+3}{\sqrt{-x}} \geq 1$ به صورت $[a, b)$ باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

۹۷- به ازای چند مقدار m ، معادله $(m^2 + 1)x^4 + 4mx^2 + 2 = 0$ دو جواب غیر هم‌علامت دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۹۸- اگر مجموعه جواب نامعادله $x^2 > 3x - 2$ به شکل $(a, +\infty) - \{b\}$ باشد، $b - a$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۹- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 12x + 4 = 0$ باشند، در این صورت معادله درجه دومی که جواب‌های آن $\alpha\sqrt{\beta}$ و $\beta\sqrt{\alpha}$ باشند، کدام است؟

۱ (۱) $x^2 - 8x + 1 = 0$

۲ (۲) $x^2 - x + 8 = 0$

۳ (۳) $x^2 - 8x + 8 = 0$

۴ (۴) $8x^2 - 8x + 1 = 0$

۱۰۰- اگر باقی‌مانده تقسیم عبارت $p(x) = x^6 - 2x^5 + ax^2 + 1$ بر $x - 2$ برابر ۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^4 + 1$ کدام است؟

۱ (۱) $2x + 1$ (۲) $-2x^2 + 2x + 1$ (۳) ۴ (۴) صفر

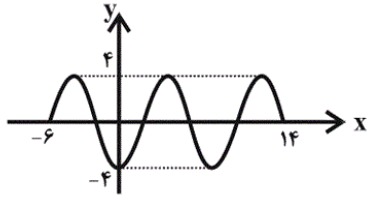
۱۰۱- طول دو ضلع مثلثی به مساحت ۶ برابر با $a = 3\sqrt{2}$ و $b = 4$ و زاویه بین آن‌ها θ است. اگر θ را 75° کاهش و طول اضلاع a و b را $\sqrt{2}$ برابر کنیم، مساحت مثلث چند برابر می‌شود؟

۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

۱۰۲- مقدار عبارت $\frac{2 \sin 200^\circ + \cos 290^\circ}{\sin 160^\circ + 2 \cos 70^\circ}$ کدام است؟

۱ (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) -3 (۴) ۱

۱۰۳- اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(\pi + bx)$ باشد، مقدار $f\left(-\frac{32}{3}\right)$ کدام است؟



(۲) $-2\sqrt{3}$

(۱) $2\sqrt{3}$

(۴) -2

(۳) 2

۱۰۴- اگر دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ برابر T باشد، تابع f در بازه‌های $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ و $\left(\frac{T}{2}, T\right)$ به ترتیب چگونه است؟

(۲) صعودی - نزولی

(۱) صعودی - صعودی

(۴) نزولی - نزولی

(۳) نزولی - صعودی

۱۰۵- اگر جواب معادله $3[x] + 2[-x] = 6$ به صورت بازه $(a, b) \cup \{c\}$ باشد، $a + b - c$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۲) 10

(۱) 9

(۴) 12

(۳) 11

۱۰۶- حاصل $\frac{\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}}{\sqrt{2 \tan x + 2 \cot x}}$ به ازای $x = 10^\circ$ کدام است؟

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\sqrt{2}$

(۴) $\cos 55^\circ$

(۳) $\sin 55^\circ$

۱۰۷- اگر $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$ کدام است؟

(۴) 9

(۳) 12

(۲) 18

(۱) 27

۱۰۸- کمترین مقدار عبارت $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 1$ کدام است؟

(۲) $-\frac{5}{4}$

(۱) -2

(۴) $-\frac{3}{2}$

(۳) -1

۱۰۹- اگر $\tan \alpha = 2$ باشد، $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$
 (۲) $\frac{2}{11}$
 (۳) $\frac{5}{11}$
 (۴) $-\frac{3}{4}$

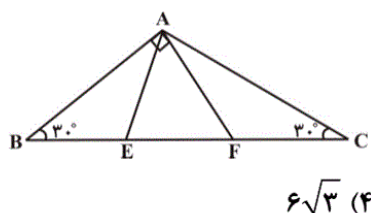
۱۱۰- اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{527}{625}$
 (۲) $-\frac{11}{25}$
 (۳) $\frac{527}{625}$
 (۴) $\frac{11}{25}$

هندسه 1-10 سوال

۱۳۱- اگر در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه A بر میانه CM عمود باشد، آنگاه کدام رابطه بین طول اضلاع مثلث همواره برقرار است؟

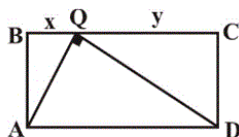
- (۱) $b = 2c$
 (۲) $c = 2b$
 (۳) $b + c = 2a$
 (۴) $b + a = 2c$



۱۳۲- در مثلث ABC : $AB = AC = 4\sqrt{3}$ و $\hat{B} = 30^\circ$. از رأس A دو خط بر دو ساق AB و AC عمود می‌کنیم تا قاعده BC را در دو نقطه E و F قطع کند. مساحت مثلث AEF چند واحد مربع است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
 (۲) $3\sqrt{3}$
 (۳) $4\sqrt{3}$
 (۴) $6\sqrt{3}$

۱۳۳- در شکل زیر، $ABCD$ مستطیل و ADQ مثلث قائم‌الزاویه است. اگر $xy = 16$ و $AQ = 5$ باشد، طول AD چقدر است؟



- (۱) ۹
 (۲) $\frac{26}{3}$
 (۳) $\frac{25}{3}$
 (۴) ۸

۱۳۴- در دوزنقه $ABCD$ ، طول‌های دو قاعده AB و DC به ترتیب ۶ و ۹ سانتی‌متر است. اگر O نقطه تلاقی دو قطر و فاصله نقطه O از قاعده بزرگ، ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت دوزنقه، چند سانتی‌متر مربع است؟

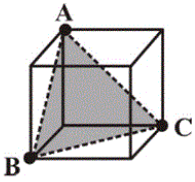
۱۳۵- در یک استوانه و یک مخروط، شعاع‌های قاعده‌ها برابر یکدیگرند و ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند. اگر در استوانه، سطح جانبی دو برابر مساحت هر قاعده و در مخروط، عدد حجم ۳ برابر عدد مساحت قاعده باشد، حجم استوانه کدام است؟

۷۲۹π (۴)

۶۷۶π (۳)

۵۷۶π (۲)

۵۱۶π (۱)



۱۳۶- در مکعب شکل مقابل، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ باشد، آنگاه حجم مکعب کدام است؟

$3\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۳۷- در یک کره، مکعب مستطیلی به طول یال‌های ۲، $2\sqrt{3}$ و $2\sqrt{5}$ محاط شده است. حجم این کره کدام است؟

36π (۴)

18π (۳)

72π (۲)

144π (۱)

۱۳۸- اگر طول یال جانبی هرم منتظم مربع القاعده‌ای ۱۳ و قطر قاعده آن ۱۰ باشد، آنگاه حجم هرم کدام است؟

۲۰۰ (۴)

۱۳۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۹۰ (۱)

۱۳۹- یک ساعت شنی از دو مخروط یکسان که درون یک استوانه قائم قرار دارند، ساخته شده است. اگر ارتفاع استوانه ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد، حجم ناحیه محصور بین دو مخروط و استوانه برحسب سانتی‌متر مکعب، کدام است؟

$\frac{160\pi}{3}$ (۴)

320π (۳)

$\frac{640\pi}{3}$ (۲)

$\frac{320\pi}{3}$ (۱)

۱۴۰- قاعده یک منشور قائم، مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ است. اگر مساحت جانبی این منشور برابر مجموع مساحت‌های دو قاعده آن باشد، آنگاه حجم این منشور کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

$$\alpha = \sqrt{20} - 3 \Rightarrow (\sqrt{20} - 3 + 3)^2 = 20. \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow [-\sqrt{2}] + [\sqrt{2}] = -1 \quad \text{گزینه «۳»}$$

توجه: حاصل گزینه «۳» همواره برابر ۱- است.

$$\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow [\sqrt{2}](2+1) = 3 \quad \text{گزینه «۴»}$$

گزینه «۲»: فرض کنیم گزینه «۲» عددی گویا مثل p باشد.

$$\frac{\alpha + 1}{2\alpha - 1} = p \Rightarrow \alpha = \frac{p + 1}{2p - 1}$$

$$\alpha \text{ گویا است.} \Rightarrow \frac{p + 1}{2p - 1} \text{ گویا است.} \Rightarrow p \text{ گویا}$$

از طرفی طبق فرض α گنگ است که به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین p الزاماً

گنگ است.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱ تا ۳)

(قاسم کتابچی)

$$\begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y > 5 \\ -2x + 2y > -2 \end{cases} \Rightarrow 3y > 3 \Rightarrow y > 1$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه ۱۲)

۴

۳

۲

۱

(هادی پلور)

گزینه «۱»: $\cos(2n\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

گزینه «۲»: $\frac{n}{2} \times 2 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} = \frac{n}{2} \sin n\pi = 0$

با توجه به این که $\cos(n\pi) = (-1)^n$ داریم:

گزینه «۳»: $(-1)^{n+1}(-1)^n = (-1)^{2n+1} = (-1)^{\text{عدد فرد}} = -1$

گزینه «۴»: $(-1)^n \sin \frac{n\pi}{2} = -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱

با محاسبه چند جمله از دنباله مشخص است که مقادیر جملات دنباله ۱- یا

صفر است:

$$\{a_n\} = -1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots$$

این دنباله واگراست.

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دنباله $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی و همگرا به e است، پس e کران بالای

دنباله a_n است که همواره $a_n < e$ است. پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right] = [1^-] = 0$$

(دیفرانسیل- دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{زوج } n \\ \text{فرد } n \end{array}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2-100} = 0$$

$$\text{گزینه «۱» : } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{زوج } n \\ \text{فرد } n \end{array} \Rightarrow \text{واگراست}$$

$$\text{گزینه «۲» : } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = 0 \text{ همگراست}$$

$$\text{گزینه «۳» : } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{زوج } n \\ \text{فرد } n \end{array} \Rightarrow \text{واگراست}$$

$$\text{گزینه «۴» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \text{ واگراست.}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1$$

$$\Rightarrow a + 2 = -1 \Rightarrow a = -3$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

حال با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{100 \sin x}{x} \right] = 99$$

از طرفی در همسایگی $x = 0$ ، $\frac{x}{\sin x} > 1$ ؛ بنابراین:

$$\frac{99x}{\sin x} > 99 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{99x}{\sin x} \right] = 99$$

حال حاصل حد مورد نظر برابر با $99 - 99 = 0$ خواهد شد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه ۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin 6x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin 6x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin 6x}{\sqrt{2} x |\sin x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 6x}{- \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x \times \frac{\sin 6x}{6x}}{-1 \times \frac{\sin x}{x}} = \frac{6}{-1} = -6 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

۴

۳

۲

۱

(میرهای سرکارفرشی)

$$a_n = \frac{2n+3}{n+4} = \frac{2n+8-5}{n+4} = 2 - \frac{5}{n+4} < 2$$

پس باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک شود.

در گزینه «۳» داریم:

$$\frac{2n+3}{n-1} = \frac{2n-2+5}{n-1} = 2 + \frac{5}{n-1} > 2$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱

اگر زاویه بین دو بردار a و b برابر α باشد:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 9 \Rightarrow (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha)(|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha) = \pm 9$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) = \pm 9 \Rightarrow 4 \times 9 \times \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \pm 9$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ \\ 2\alpha = 150^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ \end{cases} \\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 210^\circ \Rightarrow \alpha = 105^\circ \\ 2\alpha = 330^\circ \Rightarrow \alpha = 165^\circ \end{cases} \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۵ و ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}|^2 = (\sqrt{1+4+1})^2 = 6$$

نکته درسی: اگر a ، b و c سه بردار باشند، آنگاه:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۷، ۳۱ و ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون صفحه موردنظر (Q)، شامل خط L و عمود بر صفحه P است، پس حاصل ضرب خارجی بردارهای u_L و n_P برداری عمود بر صفحه Q است.

$$L: \begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow u_L = (2, 1, 0)$$

$$P: x - z = 1 \Rightarrow n_P = (1, 0, -1)$$

$$n_Q = u_L \times n_P = (2, 1, 0) \times (1, 0, -1) = (-1, 2, -1)$$

چون نقطه دلخواه $A = (0, 0, 1)$ ، روی خط L قرار دارد، بنابراین روی صفحه Q نیز قرار دارد و داریم:

$$A = (0, 0, 1) \in Q, n_Q = (-1, 2, -1)$$

$$\Rightarrow Q: -x + 2y - (z - 1) = 0 \Rightarrow Q: x - 2y + z = 1$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$d: \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z}{-1} \Rightarrow d: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

$$d': \frac{x+2}{1} = \frac{2-y}{2} = \frac{z+1}{a+1} \Rightarrow \frac{2t+3}{1} = \frac{1-t}{2} = \frac{-t+1}{a+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2t+3}{1} = \frac{1-t}{2} \Rightarrow 4t+6 = 1-t \Rightarrow 5t = -5 \Rightarrow t = -1 \\ \frac{1-t}{2} = \frac{-t+1}{a+1} \xrightarrow{t=-1} 1 = \frac{2}{a+1} \Rightarrow a+1 = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفه: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

مرکز دایره روی نیمساز ناحیه چهارم قرار دارد. پس:

$$W = (\alpha, -\alpha), \alpha \geq 0$$

$$|WA| = R \Rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (-1+\alpha)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow W = (2, -2)$$

می‌دانیم خط قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد؛ بنابراین مختصات مرکز

دایره در معادله خط داده شده صدق می‌کند:

$$2 - (m+1)(-2) = 4 \Rightarrow m = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

با محاسبه $|A|$ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} |A|^2 & |A| \\ 3 & 4|A| \end{vmatrix} = 4|A|^3 - 3|A|$$

$$\Rightarrow 4|A|^3 = 4|A| \Rightarrow \begin{cases} |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1 \\ |A| = 0 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر مختلف $|A|$ برابر است با:

$$0 + 1 - 1 = 0$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه ۱۱۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کیوان دارابی)

$$A^2 = -I \Rightarrow |A^2| = |-I| \Rightarrow |A|^2 = (-1)^2 |I| = 1 \xrightarrow{|A| > 0} |A| = 1$$

$$|I - A|^2 = |(I - A)^2| = |I^2 - 2AI + A^2| = |I - 2A - I|$$

$$= |-2A| = (-2)^2 |A| = 4 \times 1 = 4 \Rightarrow |I - A| = \pm 2$$

تذکر: می‌توان نشان داد که $|I - A|$ هیچ‌گاه منفی نیست و در واقع همواره

برابر ۲ خواهد بود.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\left| \frac{|A|}{2} A \right| + \left| \frac{2}{|A|} A \right| = \frac{|A|^2}{4} |A| + \frac{4}{|A|^2} |A|$$

$$\frac{|A|^3}{4} + \frac{4}{|A|} = \frac{64}{4} + \frac{4}{4} = 16 + 1 = 17$$

(هندسه تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر دترمینان را بر حسب سطر اول آن بسط دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} & -(x-a) \begin{vmatrix} a-x & x-c \\ b-x & \circ \end{vmatrix} + (x-b) \begin{vmatrix} a-x & \circ \\ b-x & c-x \end{vmatrix} \\ & = -(x-a)[\circ - (x-c)(b-x)] + (x-b)[(a-x)(c-x) - \circ] \\ & = -(x-a)(x-c)(x-b) + (x-b)(x-a)(x-c) = \circ \end{aligned}$$

بنابراین، حاصل دترمینان به ازای تمامی مقادیر حقیقی x ، برابر صفر است و

در نتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در صورتی مقدار دترمینان با افزودن مقداری به یک درایه تغییر نمی کند که

همسازه نظیر آن درایه برابر صفر باشد. داریم:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(7-6) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5-8 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-9 = -8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = -(12-12) = 0$$

با توجه به این که همسازه نظیر درایه a_{32} ، برابر صفر است، پس با تغییر

مقدار این درایه، دترمینان ماتریس تغییر نمی کند.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

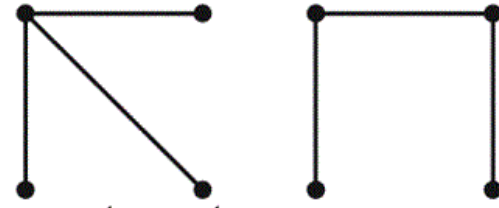
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تنها حالت ممکن برای همبند بودن گرافی که مجموع مرتبه و اندازه آن برابر ۷ باشد، آن است که $p = 4$ و $q = 3$ باشد. با این مشخصات ۲ گراف همبند قابل رسم است:



(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ تا ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در هر گراف r - منتظم از مرتبه p و اندازه q رابطه $pr = 2q$ برقرار است که براساس فرض مسأله $q = 90$ و در نتیجه $pr = 180$ خواهد بود. پس 180 بر p بخش پذیر است. ضمن آن که باید در شرط $0 \leq r \leq p - 1$ صدق کند. اگر $p = 12$ باشد، آنگاه $r = 15$ خواهد بود که شرط $0 \leq r \leq p - 1$ برقرار نیست. ولی به ازای مقادیر 15 ، 18 و 20 برای p ، مقادیر r به ترتیب 12 ، 10 و 9 به دست می آید که همگی قابل قبول هستند.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

این گراف، یک رأس از درجه ۵ دارد و در نتیجه حداقل ۵ رأس از درجه ۱ یک خواهد داشت. چون تعداد رأس‌های فرد گراف، عددی زوج است، پس این گراف باید دقیقاً ۶ رأس فرد و یک رأس زوج داشته باشد.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نوید ممبیدی)

$$m = 20q + r, 0 \leq r < 20$$

$$\xrightarrow{r=q^2} m = 20q + q^2, 0 \leq q^2 < 20 \Rightarrow q_{\max} = 4$$

$$\Rightarrow m = 20 \times 4 + 4^2 = 96$$

$$96 = 1 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0 = (165)_7 \Rightarrow 1 + 6 + 5 = 12$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رسمت عین‌علیان)

$$(\overline{aab})_5 = (\overline{32b})_6 \Rightarrow 25a + 5a + b = 3 \times 36 + 2 \times 6 + b$$

$$\Rightarrow 30a = 120 \Rightarrow a = 4$$

با توجه به رابطه اخیر، پارامتر b هر مقداری می‌تواند اختیار کند اما چون در مبنای ۵ و ۶ استفاده شده است حداکثر مقدار آن برابر ۴ خواهد بود، در نتیجه:

$$\max(a + b) = 4 + 4 = 8$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(هومن نورائی)

ابتدا باید مشخص کنیم اول اسفند همان سال، چه روزی از هفته است. بنابراین ابتدا اختلاف اول اسفند با اول فروردین همان سال را حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccc} 30 & + & 5 \times 31 & + & 5 \times 30 & + & 1 & = & 336 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{فروردین} & & \text{اردیبهشت تا شهریور} & & \text{مهر تا بهمن} & & \text{اول اسفند} & & \end{array}$$

حال اگر اول فروردین را که روز جمعه است، به عنوان مبدأ در نظر بگیریم،

۴

۳

۲ ✓

۱

(سیرامیر ستوره)

$$36 | x739y \Rightarrow x739y \equiv 0$$

$$\begin{cases} \frac{4}{x739y} \equiv 0 \Rightarrow \frac{4}{9y} \equiv 0 \Rightarrow 90 + y \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 2 \\ \frac{9}{x739y} \equiv 0 \Rightarrow \frac{9}{x+y+19} \equiv 0 \Rightarrow x+y \equiv 8 \end{cases}$$

اگر $y = 2$ ، آنگاه $x + 2 \equiv 8$ پس $x \equiv 6$ یعنی $x = 6$ و از آنجا که قیمت ۳۶ متر پارچه ۶۷۳۹۲ تومان است، پس قیمت هر متر پارچه بیش از هزار تومان (۱۸۷۲ تومان) خواهد بود که قابل قبول نیست.

اگر $y = 6$ ، آنگاه $x + 6 \equiv 8$ پس $x \equiv 2$ یعنی $x = 2$ و از آنجا که قیمت ۳۶ متر پارچه ۲۷۳۹۶ تومان است؛ یعنی هر متر $\frac{27396}{36} = 761$ تومان می‌شود.

توجه: باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۴ با باقی‌مانده تقسیم ۲ رقم آخر آن برابر است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ و ۴۸ تا ۵۱)

(سیرامیر ستوره)

$$11x \equiv 33 \xrightarrow{\div 11} \frac{(32, 11) = 1}{32} x \equiv 3 \Rightarrow x = 32k + 3$$

$$\xrightarrow{x \text{ سه رقمی است}} 1000 \leq 32k + 3 \leq 999$$

$$\Rightarrow 97 \leq 32k \leq 996 \Rightarrow 4 \leq k \leq 31$$

$$\text{تعداد جواب‌ها: } 31 - 4 + 1 = 28$$

۲۸ مقدار برای k به دست می‌آید، پس ۲۸ مقدار هم برای x وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

(مهمر مصطفی پورکندلوس)

$$2x + 5y = 51 \Rightarrow 5y \equiv 51 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 2k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2}$$

$$2x + 5(2k + 1) = 51 \Rightarrow 2x = -10k + 46 \Rightarrow x = -5k + 23 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{23}{5}$$

بنابراین با توجه به این که k عددی صحیح است، $0 \leq k \leq 4$ می‌باشد.
پس k می‌تواند مقادیر صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴ را بپذیرد، یعنی بسته‌بندی شکر به ۵ طریق امکان‌پذیر است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(هومن نورائی)

$$8x + 11y = 9 \Rightarrow 11y \equiv 9 \Rightarrow 3y \equiv 9 \xrightarrow[\substack{\div 3 \\ (8,3)=1}]{y \equiv 3}$$

$$\Rightarrow y = 8k + 3$$

$$y < 100 \Rightarrow 8k + 3 < 100 \Rightarrow k \leq 12 \Rightarrow y_{\max} = 8 \times 12 + 3 = 99$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 9 + 9 = 18$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(بهانفش نیکنام)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[4]{2} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{8}} = 2^{-\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow A^{-12} = \left(2^{-\frac{1}{8}}\right)^{-12} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$a_6^2 - a_4^2 = (a_6 - a_4)(a_6 + a_4) = 2d(2a_5) = 4a_5d = 20$$

$$\Rightarrow a_5d = 5$$

$$a_8^2 - a_6^2 = (a_8 - a_6)(a_8 + a_6) = 2d(2a_7)$$

$$= (2d)(2a_7) = 4da_7 = 4 \times 5 = 20$$

$$\Rightarrow a_8^2 - a_4^2 = (a_8^2 - a_6^2) + (a_6^2 - a_4^2) = 20 + 20 = 40$$

(ریاضیات ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$a_8 = 3a_3 \Rightarrow a_1 + 7d = 3(a_1 + 2d)$$

$$\Rightarrow a_1 + 7d = 3a_1 + 6d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{2a_1 - d}{2}\right)n \xrightarrow{2a_1 = d} S_n = \frac{d}{2}n^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = \frac{10^2}{5^2} = \frac{100}{25} = 4$$

(مسئله - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$۲ + ۲(۲) + ۲(۲)^۲ + \dots + ۲(۲)^{n-۱} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{۲(1-۲^n)}{1-۲} = ۱۰۲۲$$

$$\Rightarrow -۲(1-۲^n) = ۱۰۲۲ \Rightarrow ۲^n - ۱ = ۵۱۱$$

$$\Rightarrow ۲^n = ۵۱۲ \Rightarrow ۲^n = ۲^۹ \Rightarrow n = ۹$$

(مسئله - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ داریم:

$$\Rightarrow \Delta a_1 \frac{1-q^4}{1-q} = 2a_1 \frac{1-q^2}{1-q} + 3a_1 \frac{1-q^4}{1-q}$$

$$\Rightarrow \Delta(1-q^4) = 2(1-q^2) + 3(1-q^4) \Rightarrow -\Delta q^4 = -2q^2 - 3q^4$$

$$\Rightarrow 2q^2 - \Delta q^4 + 3q^4 = q^4(2q^2 - \Delta q^4 + 3) = 0$$

$$q \neq 0 \Rightarrow 2q^2 - \Delta q^4 + 3 = 0 \Rightarrow (2q^2 - 3)(q^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^2 = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^2 = 1 \text{ غ.ق.ق} \\ q^2 = -1 \text{ غ.ق.ق} \end{array} \right. \\ q^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ q^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ غ.ق.ق} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(مسئله - مناسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

فرض می‌کنیم $\sqrt{-x} = u$ باشد: بنابراین $x = -u^2$ داریم:

$$\frac{2x+3}{\sqrt{-x}} \geq 1 \Rightarrow \frac{-2u^2+3}{u} \geq 1 \xrightarrow{u>0} -2u^2+3 \geq u$$

$$\Rightarrow 2u^2+u-3 \leq 0 \Rightarrow (u-1)(2u+3) \leq 0 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq u \leq 1$$

$$\xrightarrow{u>0} 0 < u \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 < -x \leq 1$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow x \in [-1, 0) \Rightarrow b-a = 0 - (-1) = 1$$

(ریاضیات ۲- توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فییب شفیعی)

در دو حالت معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ دو جواب دارد:

$$b^2 - 4ac = 0 \text{ و } \frac{-b}{2a} > 0 \text{ (ب) } \frac{c}{a} < 0 \text{ (الف)}$$

$$\text{حالت (الف) هیچگاه رخ نمی‌دهد؛ زیرا } \frac{c}{a} = \frac{2}{m^2+1} > 0 \text{ . حالت (ب) را}$$

بررسی می‌کنیم:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16m^2 - 8m^2 - 8 = 0 \Rightarrow 8m^2 = 8 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-4m}{2(m^2+1)} > 0 \Rightarrow m < 0 \Rightarrow \text{فقط } m = -1 \text{ قابل قبول است.}$$

(ریاضیات ۲- توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$x^3 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow x^3 - x - (2x - 2) > 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x-1) > 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-1)(x+2) > 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2) > 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب: } (-2, +\infty) - \{1\}$$

x	-2	1
عبارت	-	+
	⊖	⊕
	⋮	⋮

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1 - (-2) = 3$$

(ریاضیات ۲- توابع فاص - نامعادل و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر ریشه‌های معادله جدید را $\alpha\sqrt{\beta}$ و $\beta\sqrt{\alpha}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$S' = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$$

$$\Rightarrow S'^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = \alpha\beta(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} \quad (1)$$

با توجه به معادله $x^2 - 12x + 4 = 0$ داریم: $S = \alpha + \beta = 12$ و $P = \alpha\beta = 4$

حال این مقادیر را در (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$S'^2 = 4(12) + 2 \times 4 \times \sqrt{4} = 64 \xrightarrow{S' > 0} S' = 8$$

$$P' = \alpha\sqrt{\beta} \times \beta\sqrt{\alpha} = \alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 4\sqrt{4} = 8$$

معادله جدید برابر است با:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$$

(مسابقه - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p(2) = 5 \Rightarrow (2)^6 - 2(2)^5 + a(2)^2 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow 4a + 1 = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow p(x) = x^6 - 2x^5 + x^2 + 1$$

$$x^6 + 1 = 0 \Rightarrow x^6 = -1$$

$$p(x) = x^6 \cdot x^2 - 2x^6 \cdot x + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow R(x) = p(x^6 = -1) = (-1)x^2 - 2(-1)x + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow R(x) = 2x + 1$$

(مسئله - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ و ۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی اکبر علینزاده)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 6 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

با توجه به این که می‌خواهیم θ را کاهش دهیم، این زاویه باید برابر 135° باشد. طول اضلاع جدید را a' و b' و زاویه بین آنها را θ' می‌نامیم. داریم:

$$a' = \sqrt{2}a = 6 \quad b' = b\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad \theta' = 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{مساحت جدید} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{6}$$

بنابراین مساحت مثلث $\sqrt{6}$ برابر شده‌است.

(ریاضیات ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مرضیه کوردوزی)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ \\ \cos 290^\circ = \cos(360^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \\ \sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \\ \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ} = -\frac{1}{3}$$

(ریاضیات ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(0) = -4 \Rightarrow -a \underbrace{\cos 0}_1 = -4 \Rightarrow a = 4$$

در نتیجه ضابطه f به صورت $f(x) = -4 \cos \frac{\pi x}{4}$ (یا

$$f(x) = -4 \cos \left(-\frac{\pi x}{4} \right)$$
 در می‌آید و داریم:

$$f\left(-\frac{32}{3}\right) = -4 \cos \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{-32}{3} \right) = -4 \cos \left(\frac{-8\pi}{3} \right)$$

$$= -4 \cos \left(\frac{8\pi}{3} \right) = -4 \cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = -4 \cos \frac{2\pi}{3} = -4 \times \frac{-1}{2} = 2$$

دقت کنید چون $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ، جواب سؤال برای $b = -\frac{\pi}{4}$ نیز همین

است.

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹ و ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰)

۴

۳

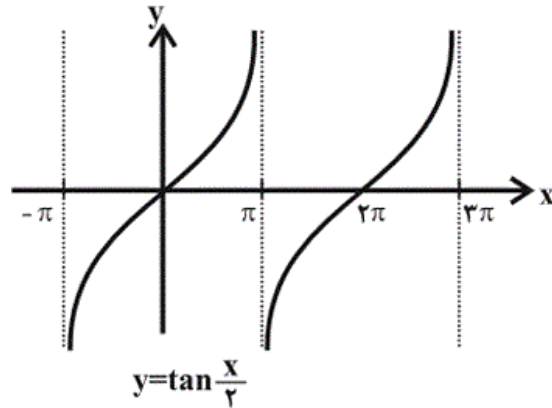
۲

۱

ابتدا ضابطه f را ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}, (\cos x \neq -1)$$

نمودار تابع f از انبساط افقی تابع $y = \tan x$ با ضریب ۲ به دست می آید:



دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ برابر با $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$ است. بنابراین نمودار

تابع $y = \tan \frac{x}{2}$ در بازه $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ صعودی است.

(مسئله - تابع: صفحه های ۹۶ تا ۹۹)

۴

۳

۲

۱

(مبید، فعتی)

$$\text{اگر } x \text{ صحیح باشد. } 3x - 2x = 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{اگر } x \text{ غیر صحیح باشد. } 2[x] + 2(-[x] - 1) = 6 \Rightarrow [x] = 8$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 8 < x < 9$$

پس در کل جواب معادله $\{6\} \cup (8, 9)$ می باشد:

$$\Rightarrow a = 8, b = 9, c = 6$$

$$\Rightarrow a + b - c = 11$$

(مسئله - تابع: صفحه های ۹۹ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} + \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$B = \sqrt{2 \tan x + 2 \cot x} = \sqrt{2 \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x \cos x}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x \cos x}}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin(x + 45^\circ)$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده، به ازای $x = 1^\circ$ ، برابر $\sin 55^\circ$

خواهد بود.

(مسئله - مثلثات: صفحه های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha}{\sin^3 \alpha \cos^3 \alpha}$$

$$= 27(1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = 27 \times (1 - 3(\sin \alpha \cos \alpha)^2)$$

$$= 27 \left(1 - 3 \left(\frac{1}{9} \right) \right) = 27 \times \frac{2}{3} = 18$$

نکته:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$f(x) = -(\sin^2 x - \sin x) + 1 = -\left(\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \sin x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{4} \leq -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی اکبر علیزاده)

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan(3\alpha) = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha}$$

$$= \frac{-\frac{4}{3} + 2}{1 - \left(-\frac{4}{3} \times 2\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{2}{11}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۷)

$$\begin{aligned} \cos 4x &= \cos 2(2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2(1 - 2\sin^2 x)^2 - 1 \\ &= 2\left(1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^2 - 1 = 2\left(1 - \frac{18}{25}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\frac{527}{625} \end{aligned}$$

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

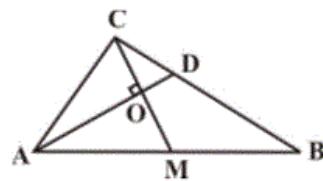
۳

۲

۱ ✓

(معمرمهری ناظمی)

در مثلث AMC، AO نیمساز داخلی زاویه A است. همچنین AO بر CM عمود است، یعنی ارتفاع نظیر رأس A است. چون ارتفاع و نیمساز بر هم منطبق هستند، پس مثلث AMC، متساوی‌الساقین است. یعنی $AM = AC$ از طرفی CM میانه است یعنی $AM = MB$ و در نتیجه داریم:



$$AB = AM + MB = AC + AC = 2AC \Rightarrow c = 2b$$

(هندسه ۱- هندسه و استرلاال: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مسئله ابراهیم کیتی زاده)

$$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 120^\circ$$

در مثلث متساوی الساقین ABC :

$$\hat{BAE} = \hat{CAF} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

دو مثلث متساوی الساقین ABE و ACF به حالت (ضضز) همنهشت اند و در

نتیجه $AF = AE$ ، اما $\hat{EAF} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ به این ترتیب

مثلث AEF متساوی الاضلاع است. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم در مثلث

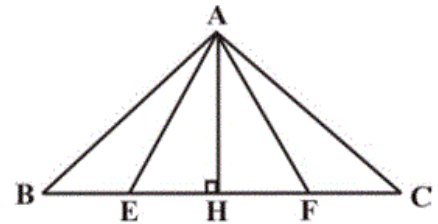
قائم الزاویه ABH ضلع AH روبه روی زاویه 30° است.

$$AH = h = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

اگر طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع AEF باشد:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$S_{\Delta AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4\sqrt{3}$$



(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۵)

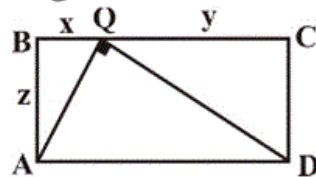
۴

۳ ✓

۲

۱

(شروین سیاح‌نیا)



طول ضلع AB از مستطیل، برابر طول ارتفاع وارد

بر وتر در مثلث قائم الزاویه ADQ است، پس

داریم:

$$z^2 = xy$$

$$AB^2 = BQ \cdot CQ = 16 \Rightarrow AB = 4$$

$$AB^2 + BQ^2 = AQ^2 \Rightarrow 16 + BQ^2 = 25 \Rightarrow BQ^2 = 9 \Rightarrow BQ = 3$$

$$CQ = \frac{16}{BQ} \Rightarrow CQ = \frac{16}{3}$$

$$AD = BC = BQ + CQ = 3 + \frac{16}{3} = \frac{25}{3}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: مشابه تمرین ۱۲ صفحه ۶۵)

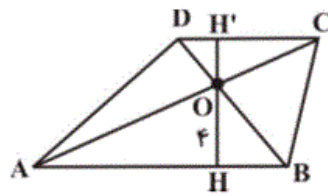
۴

۳ ✓

۲

۱

(مسئله ابراهیم کیتی زاده)



دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی زاویه‌ها متشابه‌اند و نسبت دو ارتفاع متناظر با نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{OH'}{4} = \frac{6}{9} \Rightarrow OH' = \frac{8}{3} \text{ سانتی‌متر}$$

$$\text{ارتفاع } h = HH' = OH + OH' = 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3} \text{ سانتی‌متر}$$

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) \times h = \frac{1}{2}(9 + 6) \times \frac{20}{3} = 50 \text{ cm}^2$$

(هندسه ۱- تشابه؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(داریوش ناظمی)

طول شعاع قاعده مخروط و استوانه را با r و طول ارتفاع آن‌ها را با h نشان

$$2\pi rh = 2(\pi r^2) \Rightarrow r = h \quad \text{می‌دهیم. برای استوانه داریم:}$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 3(\pi r^2) \Rightarrow h = 9 \quad \text{برای مخروط نیز داریم:}$$

$$\text{حجم استوانه: } V = \pi r^2 h = 729\pi$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۳۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(بهنام قلعی)

اگر طول ضلع مکعب برابر a باشد، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و اندازه هر ضلع آن $a\sqrt{2}$ (قطر وجه مکعب) است.

$$S_{ABC} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 4 \Rightarrow AB = 2$$

$$\text{قطر وجه} = 2 \Rightarrow a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow \text{حجم مکعب} = a^3 = 2\sqrt{2}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معمد ابراهیم کیتی زاده)

طول قطر این کره، برابر طول قطر مکعب مستطیل است، داریم:

$$2R = d = \sqrt{4 + 12 + 20} = 6 \Rightarrow R = 3$$

$$\Rightarrow \text{حجم کره: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۳۶ تا ۱۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

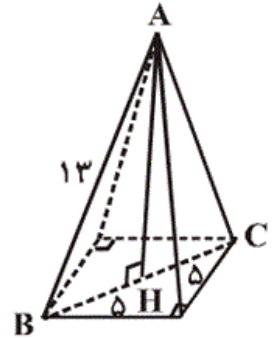
(عمید کروس)

$$\text{مساحت قاعده (مربع)} = \frac{(\text{قطر مربع})^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50$$

$$\begin{aligned} \Delta ABH: AH^2 &= AB^2 - BH^2 \\ &= 169 - 25 = 144 \Rightarrow AH = 12 \end{aligned}$$

$$\text{حجم هرم: } V = \frac{1}{3}(50 \times 12) = 200$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)



۴ ✓

۳

۲

۱

(امیرمسین ابومصوب)

مطابق شکل داریم:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi(4)^2 \times 20 = 320\pi$$

ارتفاع هر کدام از دو مخروط برابر ۱۰cm و شعاع قاعده آن‌ها ۴cm است. پس داریم:

$$V_{\text{دو مخروط}} = 2 \times \frac{1}{3}\pi R^2 h' = \frac{2}{3}\pi(4)^2 \times 10 = \frac{320\pi}{3}$$

حجم ناحیه محصور بین استوانه و دو مخروط برابر است با:

$$320\pi - \frac{320\pi}{3} = \frac{640\pi}{3}$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی: مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۳۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیرحسین ابومصوب)

می‌دانیم مساحت جانبی منشور برابر محیط قاعده ضرب در ارتفاع است. پس داریم:

$$S_{\text{جانبی}} = 2S_{\text{قاعده}} \Rightarrow 3a.h = 2 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$V_{\text{منشور}} = S_{\text{قاعده}} \times h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{8} = \frac{2^3}{8} = 1$$

(هندسه ۱- شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۸)

۴

۳

۲

۱ ✓