



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

ریاضی گسسته دوازدهم، آشنایی با نظریه‌ی اعداد - ۱۰ سوال -

۱۲۱- در اثبات درستی رابطه  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$  به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

(۱)  $(a + b)^2 \geq 0$       (۲)  $(a - b)^2 \geq 0$       (۳)  $(a - 2b)^2 \geq 0$       (۴)  $(2a - b)^2 \geq 0$

۱۲۲- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه بزرگ‌ترین عددی که  $a^4 - b^4$  همواره بر آن بخش پذیر می‌باشد، کدام است؟

(۱) ۸۰      (۲) ۴۰      (۳) ۹۶      (۴) ۱۶

۱۲۳- حاصل  $(a^2 - 4a + 1, a - 3)$  کدام است؟ ( $a \in \mathbb{Z}$ )

(۱) ۲ یا ۱      (۲) ۱ یا ۵      (۳) ۱ یا ۲ یا ۴      (۴) ۱ یا ۳ یا ۶

۱۲۴- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی  $a < 50$  بر ۷ و ۵ به ترتیب ۳ و ۱ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۱ کدام است؟

(۱) صفر      (۲) ۹      (۳) ۲      (۴) ۱۰

۱۲۵- باقی‌مانده تقسیم عدد  $5^{n+1} - 7 \times 2^{10n+2}$  بر ۳۱ کدام است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

(۱) ۱۱      (۲) ۱۳      (۳) ۱۷      (۴) ۱۹

۱۲۶- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی  $a$ ، عدد  $a + 3^{100}$  به دسته هم‌نهشتی  $[0]_{11}$  تعلق دارد؟

(۱) ۷      (۲) ۸      (۳) ۹      (۴) ۱۰

۱۲۷- اگر ۲۲ بهمن در یک سال شنبه باشد، ۱۵ خرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

(۱) جمعه      (۲) شنبه      (۳) یکشنبه      (۴) دوشنبه

۱۲۸- اگر  $4yx^0 \equiv 0 \pmod{99}$  باشد، آنگاه  $x^2 + y$  کدام است؟

- ۵ (۱)      ۲۵ (۲)      ۱۳ (۳)      ۸۵ (۴)

۱۲۹- معادله  $x \equiv 3 \pmod{1391! + \dots + 2! + 1!}$  چند جواب در مجموعه اعداد دو رقمی دارد؟

- ۲۳ (۱)      ۲۴ (۲)      ۲۲ (۳)      ۲۵ (۴)

۱۳۰- جواب معادله هم‌نهشتی  $x^2 - 8x + 15 \equiv 0 \pmod{4}$  کدام نمی‌تواند باشد؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- ۴k+۱ (۱)      ۴k+۱ (۲)      ۴k+۲ (۳)      ۴k+۳ (۴)

### هندسه ۱، چند ضلعي ها - ۱۰ سوال -

۱۳۱- نقطه M، نقطه‌ای دلخواه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. هرگاه مجموع فاصله‌های M از دو ضلع این مثلث برابر ۳ واحد و مساحت مثلث برابر  $12\sqrt{3}$  باشد، فاصله M از ضلع سوم مثلث کدام است؟

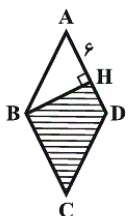
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۱۳۲- در مثلث متساوی‌الساقین ABC،  $AB = AC = 18$  و  $\widehat{BAC} = 30^\circ$  است. اگر نقطه D واقع بر BC به فاصله ۳ واحد از AB باشد، فاصله D از AC کدام است؟

- ۳ (۱)      ۴ (۲)

- ۵ (۳)      ۶ (۴)

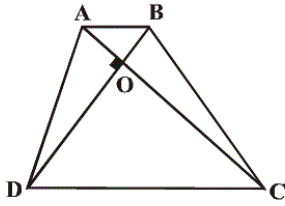
۱۳۳- طول ضلع لوزی ABCD برابر ۹ واحد است. اگر ارتفاع وارد بر ضلع AD و  $AH = 6$  باشد، آنگاه مساحت ناحیه هاشور خورده کدام است؟



- ۲۴√۲ (۱)      ۲۰√۳ (۲)

- ۱۸√۵ (۳)      ۱۵√۶ (۴)

۱۳۴- مطابق شکل، قطرهای دوزنقه ABCD بر هم عمودند. اگر  $AD = 8$  و  $\hat{ADO} = 30^\circ$ ، آنگاه مساحت مثلث BOC کدام است؟



(۱)  $6\sqrt{2}$

(۲)  $6\sqrt{3}$

(۳)  $8\sqrt{2}$

(۴)  $8\sqrt{3}$

۱۳۵- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای  $\frac{17}{4}$  واحد است. حداکثر تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۱۰

(۴) ۹

۱۳۶- مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، با طول ساق ۴ مفروض است. از نقطه M روی وتر BC، عمودهایی بر دو

ساق مثلث رسم می‌کنیم. اگر قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده برابر ۲ باشد، فاصله نقطه M از رأس A کدام است؟

(۱)  $\sqrt{6}$

(۲)  $\sqrt{5}$

(۳) ۲

(۴)  $\sqrt{10}$

۱۳۷- در مثلث ABC، دو میانه AM و BN بر هم عمود هستند و طول آنها به ترتیب برابر ۶ و ۹ می‌باشد. طول میانه سوم این

مثلث کدام است؟

(۱)  $6\sqrt{2}$

(۲)  $9\sqrt{3}$

(۳)  $3\sqrt{15}$

(۴)  $3\sqrt{13}$

۱۳۸- در مربع ABCD، از نقاط A و M (وسط ضلع AD)، به ترتیب عمودهای AH' و MH را بر قطر BD رسم می‌کنیم. اگر

مساحت چهارضلعی AMHH' برابر ۳ واحد باشد، مساحت مربع ABCD چقدر است؟

- |        |        |
|--------|--------|
| ۱۵ (۱) | ۱۶ (۲) |
| ۱۸ (۳) | ۲۰ (۴) |

۱۳۹- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای، واسطه حسابی تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی آن است. کمترین مساحت این

چندضلعی شبکه‌ای کدام است؟

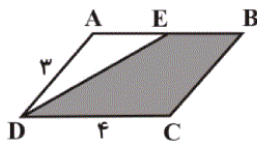
- |         |         |
|---------|---------|
| ۱/۵ (۱) | ۲/۵ (۲) |
| ۳/۵ (۳) | ۴/۵ (۴) |

۱۴۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۱۸ و ۲۴، مجموع فاصله‌های محل هم‌رسی میانه‌ها تا اضلاع مثلث کدام است؟

- |          |          |
|----------|----------|
| ۱۸/۸ (۱) | ۳۷/۶ (۲) |
| ۷۵/۲ (۳) | ۱۴/۴ (۴) |

### هندسه ۱ - گواه ، چند ضلعی ها - ۱۰ سوال -

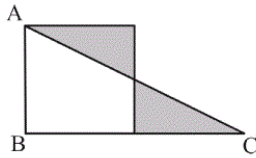
۱۴۱- در شکل زیر DE نیمساز زاویه ADC است. مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چند برابر مساحت دوزنقه سایه زده شده است؟



- |         |         |
|---------|---------|
| ۴/۳ (۱) | ۵/۳ (۲) |
| ۸/۵ (۳) | ۸/۷ (۴) |

۱۴۲- در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ، بر روی ضلع  $AB$  یک مربع ساخته شده است (مطابق شکل). اگر دو مثلث سایه زده همنهشت

باشند، مساحت دوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟



(۲)  $\frac{3}{4}$

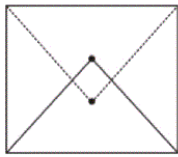
(۱)  $\frac{5}{9}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

۱۴۳- در شکل زیر، بر روی دو ضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل، چند برابر

ضلع مربع اصلی است؟



(۲)  $\frac{1}{3}$

(۱)  $\sqrt{3}-1$

(۴)  $2-\sqrt{3}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

۱۴۴- در مثلث  $ABC$  از نقطه تلاقی میانه‌ها دو خط موازی با اضلاع  $AB$  و  $AC$  رسم کرده، تا ضلع  $BC$  را در نقاط  $D$  و  $E$  قطع کنند.

اگر  $BC = 24$  باشد، اندازه  $DE$  کدام است؟

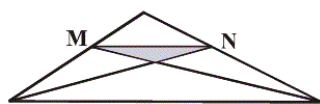
(۴) ۸

(۳)  $\frac{7}{5}$

(۲)  $\frac{7}{2}$

(۱) ۶

۱۴۵- در شکل زیر نقاط  $M$  و  $N$ ، وسط دو ضلع مثلث هستند. مساحت بزرگ‌ترین مثلث، چند برابر مساحت مثلث سایه زده است؟



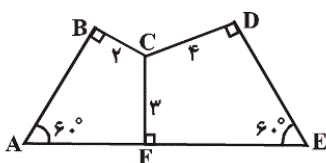
(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۱۲

(۳) ۹

۱۴۶- در شکل زیر، اندازه  $AE$  کدام است؟ ( $CF \perp AE$ )



(۲)  $7\sqrt{3}$

(۱)  $6\sqrt{3}$

(۴)  $8\sqrt{3}$

(۳)  $4\sqrt{3}$

۱۴۷- مثلث ABC در رأس A متساوی الساقین است. طول میانه نظیر قاعده برابر ۱۲ و طول قاعده برابر ۱۰ می باشد. مجموع

فواصل نقطه دلخواهی روی قاعده BC، از دو ساق چه قدر است؟

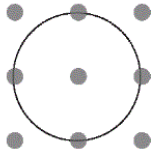
- (۱) ۸  
(۲) ۱۰  
(۳)  $\frac{۱۲۰}{۱۳}$   
(۴)  $\frac{۶۰}{۱۳}$

۱۴۸- یک مستطیل شبکه‌ای که اندازه طول و عرض آن به ترتیب ۵ و ۴ واحد می باشد، مفروض است. اگر تعداد نقاط مرزی این مستطیل،

- برابر ۱۸ باشد، تعداد نقاط درونی این چندضلعی شبکه‌ای کدام است؟  
(۱) ۹  
(۲) ۱۰  
(۳) ۱۱  
(۴) ۱۲

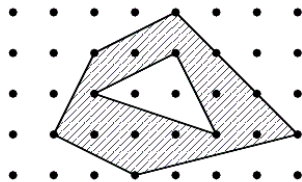
۱۴۹- اگر برای تخمین مساحت دایره زیر به شعاع ۱cm، فاصله بین نقاط شبکه را نصف کنیم، مساحت تخمینی نسبت به مساحت

اولیه چند درصد افزایش می یابد؟



- (۱) ۱۰  
(۲) ۲۰  
(۳) ۲۵  
(۴) ۳۰

۱۵۰- در شکل زیر، مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟



- (۱)  $\frac{۲۷}{۲}$   
(۲) ۱۱  
(۳) ۱۲  
(۴)  $\frac{۲۱}{۲}$

## آمار و احتمال، احتمال - ۱۰ سوال -

۱۵۱- در پرتاب یک تاس ناسالم، احتمال آمدن هر عدد اول، ۲ برابر احتمال آمدن هر عدد مرکب است و احتمال آمدن عدد ۱، برابر با

احتمال آمدن عدد غیر از یک است. احتمال آنکه در یک بار پرتاب این تاس، عدد زوج بیاید کدام است؟

- (۱)  $\frac{۱}{۲}$   
(۲)  $\frac{۱}{۳}$   
(۳)  $\frac{۱}{۴}$   
(۴)  $\frac{۲}{۵}$

۱۵۲- دو کیسه داریم که در اولی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. از هر کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این ۶ مهره هم‌رنگ هستند؟

$$\frac{1}{25} \quad (1) \quad \frac{1}{175} \quad (2) \quad \frac{3}{25} \quad (3) \quad \frac{3}{175} \quad (4)$$

۱۵۳- از بین اعداد مجموعه  $\{250, 255, 260, \dots, 545, 550\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این عدد بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر است، اما مضرب ۶ نیست؟

$$\frac{36}{61} \quad (1) \quad \frac{26}{61} \quad (2) \quad \frac{41}{61} \quad (3) \quad \frac{31}{61} \quad (4)$$

۱۵۴- تعداد مهره‌های آبی و قرمز در یک کیسه، دو عدد متوالی هستند. اگر دو مهره هم‌زمان از کیسه خارج کنیم، احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره، برابر  $\frac{2}{5}$  است. تعداد مهره‌های داخل این کیسه کدام است؟

$$5 \quad (1) \quad 7 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

۱۵۵- در جعبه‌ای ۸ مهره از هر کدام از رنگ‌های آبی، قرمز و زرد با شماره‌های ۱, ۲, ۳, ..., ۸ قرار دارد. شخصی می‌خواهد به تصادف، ۶ مهره را یکی یکی و بدون جایگذاری از این جعبه خارج کند. پیشامد اینکه شماره مهره‌ها اعدادی متوالی باشند، چند عضو دارد؟

$$\binom{24}{6} \quad (1) \quad \frac{1}{6} \binom{24}{6} \quad (2) \quad 3^7 \quad (3) \quad 3^8 \quad (4)$$

۱۵۶- سه تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال این که حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۵ باشد، چند برابر احتمال آن است که حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد؟

$$\frac{91}{27} \quad (1) \quad \frac{25}{27} \quad (2) \quad \frac{27}{25} \quad (3) \quad \frac{27}{91} \quad (4)$$

۱۵۷- تاسی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی اعداد رو شده تشکیل دنباله اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نمی‌دهند؟

$$\frac{7}{9} \quad (1) \quad \frac{22}{27} \quad (2) \quad \frac{23}{27} \quad (3) \quad \frac{8}{9} \quad (4)$$

۱۵۸- برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی به ترتیب ۵ و ۱۰ لامپ وجود دارد. در اولی  $k$  لامپ سالم و در دومی ۶ لامپ سالم است. اگر احتمال انتخاب لامپ سالم از جعبه دوم  $\frac{2}{5}$  بیشتر از جعبه اول باشد،  $k$  کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$



۱۵۹- تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد سه عدد متمایز ظاهر شوند و عدد بزرگتر در پرتاب دوم ظاهر شود؟

(۴)  $\frac{5}{27}$

(۳)  $\frac{7}{72}$

(۲)  $\frac{1}{8}$

(۱)  $\frac{1}{12}$

۱۶۰- اگر  $P(A \cup B) = \frac{6}{10}$  و  $P(A) = \frac{5}{10}$  باشد، حاصل  $P(A \cup B)$  کدام است؟

(۴)  $\frac{7}{10}$

(۳)  $\frac{6}{10}$

(۲)  $\frac{5}{10}$

(۱)  $\frac{9}{10}$

حسابان ۲، تابع - ۱۵ سوال -

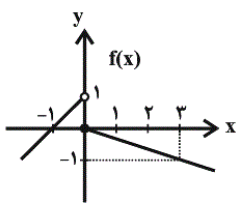
۸۱- نمودار دو تابع  $y = -2^{-x}$  و  $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x}$  نسبت به هم چگونه‌اند؟

(۴) در یک نقطه متقاطع

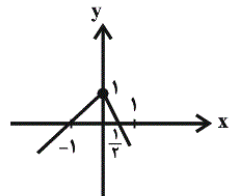
(۳) در دو نقطه متقاطع

(۲) در یک بازه منطبق

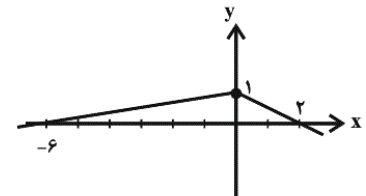
(۱) غیرمتقاطع



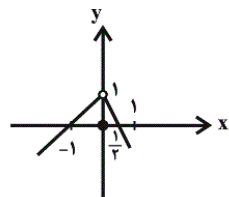
۸۲- نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو است. اگر  $g(x) = \begin{cases} f(-x) & ; x > 0 \\ f\left(\frac{x}{2}\right) & ; x \leq 0 \end{cases}$  باشد، نمودار  $g(2x)$  کدام است؟



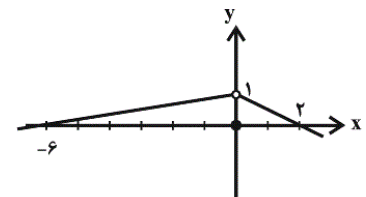
(۲)



(۱)

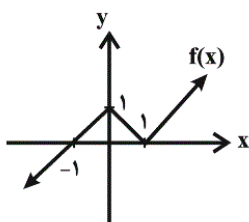


(۴)



(۳)

۸۳- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت زیر باشد، به ازای کدام مقدار  $a$  دامنه  $g(x) = \frac{1}{2f(x+a) + 2x - 5}$  برابر با  $\mathbb{R} - [m, n]$  است؟



(۲)  $-\frac{3}{2}$

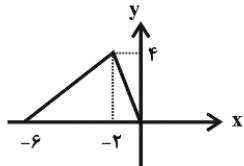
(۴)  $-\frac{5}{2}$

( $m < n$ )

(۱)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $\frac{5}{2}$

۸۴- اگر نمودار تابع  $y = f(2x + 5)$  به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع  $y = 3f(-4x + 1)$  و محور  $x$  ها کدام



است؟

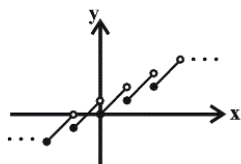
۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

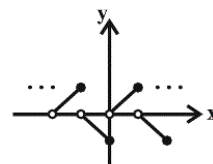
۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

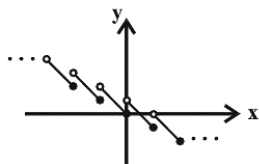
۸۵- اگر  $f(x + [x]) = x$  باشد، نمودار  $y = f(x)$  به کدام صورت می تواند باشد؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)



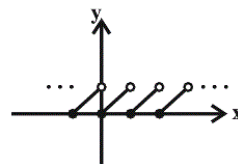
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

۸۶- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq a \\ 2x+1 & ; x < a \end{cases}$  اکیداً صعودی است. مقدار  $a$  کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

$\frac{5}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۸۷- وضعیت نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 3x^2 + 3x$  چگونه است؟

(۲) همواره نزولی

(۱) همواره صعودی

(۴) برای  $x > 1$  نزولی و برای  $x < 1$  صعودی

(۳) برای  $x > 1$  صعودی و برای  $x < 1$  نزولی

۸۸- اگر  $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 32$ ، نمودار تابع  $|f(x)|$  در بازه  $[a, +\infty)$  اکیداً نزولی است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

۳ (۲)

۲ (۱)

$\frac{9}{2}$  (۴)

۴ (۳)

۸۹- تابع  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$ ، اکیداً صعودی است. توابع  $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$  و  $h(x) = f(-2x+1)$  چگونه‌اند؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح

است.)

(۱) هر دو اکیداً نزولی

(۲)  $g$  اکیداً صعودی و  $h$  اکیداً نزولی

(۳)  $g$  صعودی و  $h$  اکیداً نزولی

(۴)  $g$  صعودی و  $h$  اکیداً صعودی

۹۰- اگر  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{x-1} - 1$  باشد، دامنه تابع  $\sqrt{(f(x))^2 - 225}$  کدام است؟

(۱)  $(0, \infty)$

(۲)  $\left[-\frac{1}{4}, 4\right]$

(۳)  $\left(0, \frac{1}{5}\right)$

(۴)  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$

۹۱- اگر  $\log_{\frac{1}{2}}^{x+3} \leq \log_{\frac{1}{2}}^{x-1}$  باشد، حدود  $x$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۹۲- اگر باقی‌مانده تقسیم  $4 + p(x-2)$  بر  $x-3$  برابر با  $7$  باشد، مقدار  $m$  کدام باشد تا عبارت

$g(x) = x^{16} + 5p(x+2) - m$  بر  $x+1$  بخش پذیر باشد؟

(۱)  $-16$

(۲)  $-8$

(۳)  $8$

(۴)  $16$

۹۳- اگر باقی‌مانده تقسیم  $p(x)$  بر  $x-1$  و  $x+1$  به ترتیب  $3$  و  $-2$  باشد،  $k$  کدام باشد تا

$f(x) = p(x+1) - 2p(x+3) + x^2 - 3kx$  بر  $x+2$  بخش پذیر باشد؟

(۱)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $-\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $-\frac{3}{2}$

۹۴- اگر  $f(x) = 2x^2 + ax^2 + 4x - 3$  بر  $x+1$  بخش پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای  $f(x)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{61}{4}$

(۲)  $\frac{9}{2}$

(۳)  $\frac{25}{3}$

(۴)  $\frac{65}{4}$

۹۵- در تجزیه عبارت  $x^2 - 64$  به فرم  $(x+2)p(x)$ ، اگر  $A$  مجموع ضرایب منفی و  $B$  مجموع ضرایب مثبت  $p(x)$  باشد،

$2B - A$  کدام است؟

(۱) ۴۲

(۲) ۶۲

(۳) ۷۴

(۴) ۸۴

حسابان ۲، مثلثات - ۵ سوال -

۹۶- تابع متناوب  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$  و دوره تناوب ۴، در فاصله  $[1, 5]$  به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2} x & ; 1 \leq x < 3 \\ -2x + 4 & ; 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

تعریف

شده است. مقدار  $f(102/5)$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳)  $\sqrt{2}$

(۴)  $-\sqrt{2}$

۹۷- دوره تناوب تابع  $f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x)$  کدام است؟

(۱)  $2\pi$

(۲)  $\pi$

(۳)  $\frac{\pi}{2}$

(۴)  $\frac{\pi}{4}$

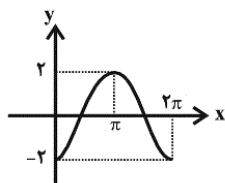
۹۸- نمودار تابع‌های  $f(x) = 3\sin 2x - 2$  و  $g(x) = k$  در بازه  $(0, T)$  همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. حدود  $k$  کدام است؟

( $T$  دوره تناوب تابع  $f$  است.)

(۱)  $(-5, 1)$  (۲)  $(-5, -2) \cup (-2, 1)$

(۳)  $(-2, 1) \cup (1, 5)$  (۴)  $(-7, -5) \cup (-5, -2)$

۹۹- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a \cos bx$  است. مقدار  $a + b$  کدام می‌تواند باشد؟



(۱)  $-2$  (۲)  $3$

(۳)  $2$  (۴)  $-3$

۱۰۰- اگر  $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$  باشد، نمودار  $y = 4 \sin ax$  در بازه  $(0, 2\pi)$ ، حداکثر چند نقطه برخورد با خط  $y = a$  دارد؟

(۱)  $8$  (۲)  $7$  (۳)  $6$  (۴)  $5$

### هندسه ۳- دوازدهم، ماتریس، و کاربردها - ۱۰ سوال -

۱۱۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه  $A^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-I$  (۲)  $-A$

(۳)  $A$  (۴)  $A^2$

۱۱۲- اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مجموع درایه‌های  $(A + B)^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{10}$  (۲)  $\frac{1}{10}$

(۳)  $-\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

۱۱۳- اگر  $(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس  $A(A - 2I)^{-1}$  کدام است؟

۱۱ (۱)

۹ (۲)

۵ (۳)

۱۶ (۴)

۱۱۴- اگر  $|A| = 1$  و  $|I + A| = 3$  باشد، آنگاه  $|I + A^{-1}|$  کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۴)

۱۱۵- به ازای چند مقدار  $m$ ، دستگاه معادلات  $\begin{cases} (2m+1)x - my = 1 \\ -7mx + (m+6)y = -m \end{cases}$  بی‌شمار جواب دارد؟

۱ (۱) صفر

۱ (۲)

۲ (۳) بی‌شمار

۴ (۴) بی‌شمار

۱۱۶- اگر  $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \left( A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $|A|$  کدام است؟

-۹ (۱)

۳ (۲)

-۳ (۳)

۹ (۴)

۱۱۷- اگر  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 6I$  باشد، آنگاه  $|A|$  کدام است؟

-۱ (۱)

۱ (۲)

-۶ (۳)

۶ (۴)

۱۱۸- اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ باشند، آنگاه حاصل  $\|B\|A + \|A\|B$  همواره برابر کدام است؟

(۱)  $\|B^T\| + \|A^T\|$

(۲)  $\|AB^T\| + \|A^T B\|$

(۳)  $2\|A^T B^T\|$

(۴)  $\|AB\| + \|BA\|$

۱۱۹- اگر  $m = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$  باشد، آنگاه حاصل  $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}$  کدام است؟ ( $a, b, c \neq 0$ )

(۱) a

(۲)  $\frac{m}{abc}$

(۳) mabc

(۴) m + a + b + c

۱۲۰- به ازای کدام مقدار k، معادله  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 2 & x+2 & 0 \\ k & 0 & x \end{vmatrix} = 0$  دارای یک ریشه مضاعف است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

ریاضی پایه - دوازدهم - ۱۰ سوال -

۱۰۱- اگر  $20^\circ < \theta < 50^\circ$  باشد و  $\sin 3\theta = \frac{m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟

(۱) (۲, ۳)

(۲) [۲, ۳)

(۳) (۲, ۳]

(۴) [۲, ۳]

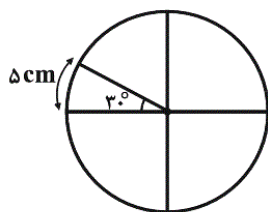
۱۰۲- مساحت دایره مقابل کدام است؟

(۱)  $\frac{900}{\pi}$

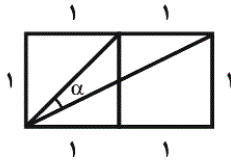
(۲)  $\frac{800}{\pi}$

(۳)  $\frac{700}{\pi}$

(۴)  $\frac{620}{\pi}$



۱۰۳- در مستطیل روبه‌رو،  $\sin \alpha$  کدام است؟



(۲)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

(۱)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(۴)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

۱۰۴- دو ناظر A و B که در سطح زمین قرار دارند و با فاصله ۲۰ متر از هم در یک طرف برجی ایستاده‌اند، نوک این برج را با

زاویه‌های  $30^\circ$  و  $45^\circ$  نسبت به افق می‌بینند. ارتفاع این برج چند متر است؟ (A، B و پای برج روی یک خط قرار دارند).

(۲)  $10(\sqrt{3}-1)$

(۱)  $10(\sqrt{3}+1)$

(۴)  $20(\sqrt{3}-1)$

(۳)  $20(\sqrt{3}+1)$

۱۰۵- شخصی با قد  $1/80$  متر از روی پشت‌بام ساختمانی به ارتفاع ۷۵ متر بالگردی را که از روبه‌رو به آن شخص در حال نزدیک

شدن است می‌بیند. اگر زاویه دید شخص نسبت به سطح افق  $30^\circ$  درجه و فاصله بالگرد تا شخص در راستای زاویه دید شخص

در حدود  $440/4$  متر باشد، بالگرد در چند متری از سطح زمین قرار دارد؟

(۲)  $295/2$

(۱)  $296/8$

(۴)  $222$

(۳)  $297$

۱۰۶- اگر  $\sin x \cos y = \frac{5}{6}$  و  $\cos x \sin y = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $x - y$  کدام می‌تواند باشد؟

(۲)  $\frac{\pi}{3}$

(۱)  $\frac{\pi}{6}$

(۴)  $\frac{\pi}{2}$

(۳)  $\frac{5\pi}{3}$



۱۰۷- اگر  $\gamma x = \frac{\pi}{2}$  باشد، حاصل  $\frac{\cos x \sin 2x \tan 3x}{\cot 4x \cos 5x \sin 6x}$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) صفر

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{7}$

(۴)  $3\sqrt{2}$

۱۰۸- مقدار  $\sin 451^\circ$  با کدام گزینه زیر برابر نیست؟

(۱)  $\cos 1^\circ$

(۲)  $-\sin 269^\circ$

(۳)  $\sin 631^\circ$

(۴)  $\cos\left(-\frac{\pi}{180}\right)$

۱۰۹- اگر  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  باشد، عبارت  $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \beta}$  با کدام گزینه زیر برابر است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳)  $\tan \alpha$

(۴)  $-\tan \alpha$

۱۱۰- با توجه به تساوی  $2 = \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - 2 \sin(\alpha - 3\pi)}{3 \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$ ، مقدار  $\cot \alpha$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۳

(۴)  $\frac{1}{3}$

-۱۲۱

(مفتار منصورى)

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b$$

$$\xleftrightarrow{ab > 0} a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$$

$$\xleftrightarrow{a+b > 0} a^2 - ab + b^2 \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴

۳

۲

۱

-۱۲۲

(سروش موئینی)

مربع هر عدد صحیح فرد به صورت  $x^2 = 8k + 1$  است:

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$= (8k + 1 + 8k' + 1)(8k - 8k') = 2k_1 \times 8k_2 = 16q \quad (q \in \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۱۲۳

(رضا پورحسینی)

$$\left. \begin{array}{l} d \mid a - 3 \xrightarrow{\times(a-1)} d \mid a^2 - 4a + 3 \\ d \mid a^2 - 4a + 1 \longrightarrow d \mid a^2 - 4a + 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{-} d \mid 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

(رسول معسینی منش)

$$\begin{cases} a = 7q + 3 \\ a = 5q' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 35q + 15 \\ 7a = 35q' + 7 \end{cases} \Rightarrow 2a = 35(q' - q) - 8$$

$$\Rightarrow 2a = 35q'' - 8 \Rightarrow a = 35k - 4 \Rightarrow a = 35k' + 31$$

باقی مانده ۳۱ بر ۱۱ عدد ۹ است.

غ.ق.ق  $k' = 1 \Rightarrow a = 66 > 50$

تذکر: با توجه به رابطه  $2a = 35q'' - 8$ ، بدیهی است که  $q''$  عددی زوج است و بنابراین  $q'' = 2k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مفتاح منصور)

$$\begin{cases} 5^3 = 125 = 4(31) + 1 \equiv 1 \\ 2^5 = 32 = 31 + 1 \equiv 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5 \times (5^3)^{3n} - 7 \times 2^3 \times (2^5)^{2n} &\equiv 5 \times (1)^{3n} - 7 \times 8 \times (1)^{2n} \\ &= 5 - 56 = -51 \equiv 11 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هومن نورائی)

$$\begin{aligned} 3^2 &\equiv 9 \equiv -2 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 3^{10} \equiv -32 \equiv -32 + 3 \times 11 \equiv 1 \\ &\xrightarrow{\text{به توان ۱۰}} 3^{100} \equiv 1 \Rightarrow 3^{100} + a \equiv a + 1 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -1 \equiv 10 \\ &\Rightarrow a = 11k + 10 \end{aligned}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا فاصله ۱۵ خرداد تا ۲۲ بهمن را پیدا می‌کنیم:

با توجه به آنکه ۶ ماه اول سال ۳۱ روزه و ۵ ماه بعدی ۳۰ روزه است، داریم:

بهمن + (دی + آذر + آبان + مهر) + (شهریور + مرداد + تیر) + خرداد

$$۱۶ + (۳ \times ۳۱) + (۴ \times ۳۰) + ۲۲ = ۲۵۱$$

با توجه به آنکه ۲۲ بهمن شنبه است، شنبه را به عنوان مبدأ در نظر گرفته و با توجه به جدول زیر مشخص می‌کنیم که ۲۵۱ روز قبل چه روزی است. پس کفایت باقی مانده ۲۵۱- را بر ۷ به دست آوریم، در نتیجه داریم:

$$-۲۵۱ \equiv -۲۵۱ + ۳۶ \times ۷ \equiv ۱$$

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سهشنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
صفر	۱	۲	۳	۴	۵	۶

در نتیجه ۱۵ خرداد همان سال یکشنبه خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه ۲۴)

-----

۱                       ۳                       ۲                       ۴

$$\overset{۹}{4yx \cdot 1} \equiv 0 \Rightarrow 4 + x + y + 0 + 1 \equiv 0 \Rightarrow 5 + x + y \equiv 0$$

$$\overset{۹}{x + y} \equiv 4 \Rightarrow y + x = 4 \text{ یا } ۱۳$$

$$\overset{۱۱}{4yx \cdot 0} \equiv 0 \Rightarrow (1 + x + 4) - (0 + y) \equiv 0$$

$$\overset{۱۱}{5 + x - y} \equiv 0 \Rightarrow x - y \equiv 6 \Rightarrow x - y = 6 \text{ یا } -۵$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 13 \\ x - y = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4, y = 9 \Rightarrow x^2 + y = 25$$

از سه دستگاه معادلات ممکن دیگر برای این سؤال، مقادیر  $x$  و  $y$ ، اعدادی منفی و یا کسری خواهند بود که امکان پذیر نیست.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

-----

۴                       ۳                       ۲                       ۱

(علیرضا کلاتری)

$$x(1!+2!+3!+\dots) \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow 9x \equiv 15 \pmod{12} \Rightarrow 3x \equiv 5 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 9 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 3$$

$$10 \leq 4k + 3 \leq 99 \Rightarrow 7 \leq 4k \leq 96 \Rightarrow 2 \leq k \leq 24$$

$$\Rightarrow k \text{ تعداد مقادیر} = 23$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(هومن نورائی)

$$x^2 - 8x + 15 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (x-5)(x-3) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$1) x - 5 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 5 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) x - 3 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 3 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$3) \begin{cases} x - 3 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 3 \equiv 1 \pmod{2} \\ x - 5 \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 5 \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۴ و ۲۵)

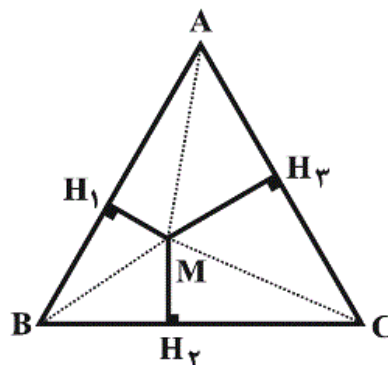
۴

۳ ✓

۲

۱

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 6$$



مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، برابر

طول ارتفاع مثلث است، پس در صورتی که  $MH_1 + MH_2 = 3$  باشد،

آنگاه داریم:

$$\underbrace{MH_1 + MH_2}_{3} + MH_3 = 6 \Rightarrow MH_3 = 6 - 3 = 3$$

(هندسه ۱- چند ضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

 ۴

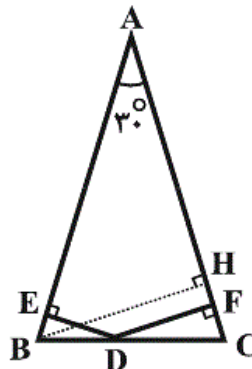
 ۳

 ۲

 ۱

از B بر AC عمود رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه ABH داریم:

$$\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(18) = 9$$



از طرفی می دانیم مجموع فاصله های هر نقطه واقع بر قاعده مثلث

متساوی الساقین از دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس

داریم:

$$DE + DF = BH \Rightarrow 3 + DF = 9 \Rightarrow DF = 6$$

(هندسه ۱ - چند ضلعی ها: صفحه ۶۸)

۴

۳

۲

۱

با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABH$  داریم:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45 \Rightarrow BH = 3\sqrt{5}$$

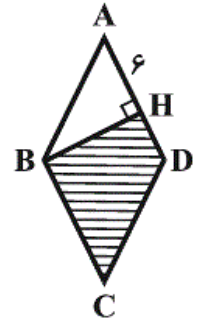
پس مساحت ناحیه هاشورخورده برابر است با:

$$S_{BHDC} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABH}$$

$$= AD \times BH - \frac{AH \times BH}{2}$$

$$= 9 \times 3\sqrt{5} - \frac{6 \times 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= 27\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$$



(هندسه ۱- پنذ ضلعی‌ها: صفحه ۶۵)

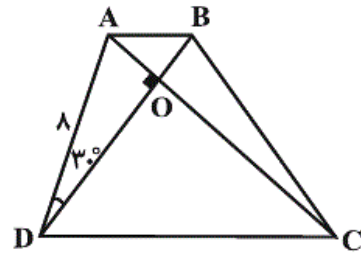
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱





در هر مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه  $30^\circ$ ، نصف وتر است. داریم:

$$\begin{cases} AD = 8 \\ \angle ADO = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow AO = 4, DO = 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta AOD} = 8\sqrt{3}$$

دو مثلث ADC و BDC دارای ارتفاع و قاعده یکسان هستند، بنابراین داریم:

$$S_{\Delta ADC} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta ADC} - S_{\Delta OCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta OCD}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC} \Rightarrow S_{\Delta BOC} = 8\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه ۶۵ تا ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow \frac{17}{2} = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 17 = b + 2i - 2$$

$$\Rightarrow 2i = 19 - b$$

بیشترین مقدار  $i$  به ازای کمترین مقدار  $b$  حاصل می‌شود. می‌دانیم در یک چندضلعی شبکه‌ای  $b \geq 3$  است. پس:

$$2i = 19 - 3 \Rightarrow 2i = 16 \Rightarrow i = 8$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

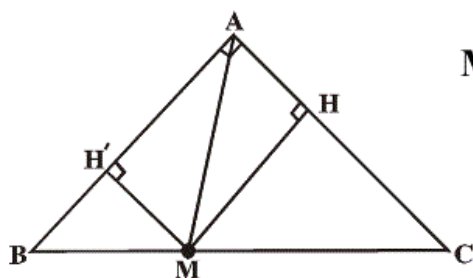
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل زیر، فرض می‌کنیم  $MH > MH'$  باشد. در نتیجه داریم:



$$MH - MH' = 2 \quad (1)$$

از طرفی اگر از نقطه‌ای روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین، دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آن‌ها را قطع کند، آنگاه مجموع طول پاره‌های ایجاد شده برابر طول ساق مثلث است، پس:

$$MH + MH' = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} MH = 3, MH' = 1$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:

$$\begin{cases} AM^2 = AH^2 + MH^2 \\ AH = MH' = 1 \end{cases} \Rightarrow AM^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

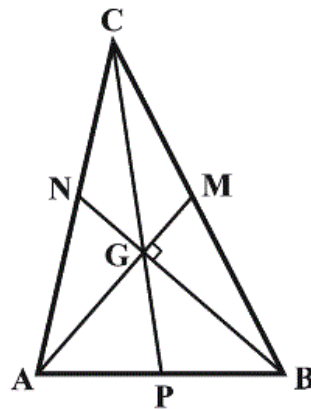
(هندسه ۱- پند ضلعی‌ها؛ صفحه ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل، میانه‌های مثلث  $ABC$  در نقطه  $G$  هم‌رس هستند و داریم:

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$BG = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

دو میانه  $AM$  و  $BN$  بر هم عمود هستند، پس مثلث  $AGB$  قائم‌الزاویه

است و طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$$

در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه وارد بر وتر، نصف وتر است، پس

$$GP = \frac{1}{2}AB = \sqrt{13} \text{ و در نتیجه داریم:}$$

$$CP = 3GP = 3\sqrt{13}$$

(هنر سه ۱- پنذضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴

۳

۲

۱

(نویس میبیدی)

چهارضلعی  $AMHH'$  یک دوزنقه است (طبق شکل) و مثلث  $MHD$ ، قائم الزاویه متساوی الساقین می باشد. اگر اندازه ضلع مربع را  $a$  بگیریم، داریم:

$$AH' = DH' = \frac{a\sqrt{2}}{2}, MH = DH = \frac{MD}{\sqrt{2}}$$

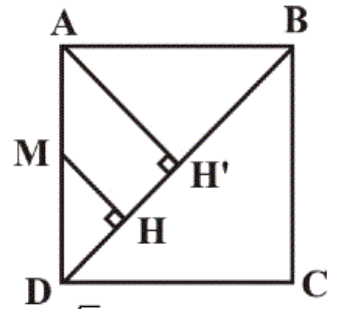
$$\xrightarrow{MD = \frac{a}{2}} DH = \frac{a\sqrt{2}}{4} = MH$$

$$HH' = DH' - DH = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HH' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{AMHH'} = \frac{1}{2} \left( \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \frac{a\sqrt{2}}{4} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{6a^2}{32} = 3 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 = 16$$

(هندسه ۱- هندسه ضلعی ها: صفحه ۶۵)



(معمده ظاهر شعاعی)

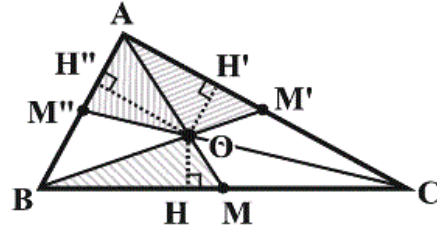
بنابر فرض  $S = \frac{b+i}{2}$  است. با استفاده از دستور پیک داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b+i}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow \frac{i}{2} = 1 \Rightarrow i = 2$$

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{b}{2} + 1 \xrightarrow{b=3} S_{\min} = \frac{3}{2} + 1 = 2.5$$

(هندسه ۱- هندسه ضلعی ها: صفحه های ۶۹ تا ۷۳)

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 30$$



از تلاقی میانه‌های هر مثلث، شش مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود، بنابراین داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{18 \times 24}{2} = 216$$

پس مساحت هر قسمت برابر  $36 = \frac{216}{6}$  است. حال داریم:

$$\begin{cases} \frac{OH \times BM}{2} = 36 \Rightarrow \frac{OH \times 15}{2} = 36 \Rightarrow OH = 4/8 \\ \frac{OH' \times AM'}{2} = 36 \Rightarrow \frac{OH' \times 12}{2} = 36 \Rightarrow OH' = 6 \\ \frac{OH'' \times AM''}{2} = 36 \Rightarrow \frac{OH'' \times 9}{2} = 36 \Rightarrow OH'' = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow OH + OH' + OH'' = 4/8 + 6 + 8 = 18/8$$

(هندسه ۱- پنر ضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

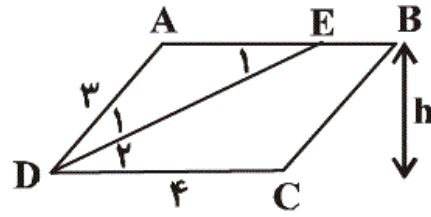
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$AB \parallel CD, DE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{E}_1 = \hat{D}_1$$



$\xrightarrow{\Delta \text{ متساوی الساقین ADE}} AE = AD = 3 \Rightarrow BE = 1$

بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{BCDE}} = \frac{4h}{\frac{1}{2}(BE + CD)h} = \frac{8}{5}$$

(هندسه ۱- پندرضلعی ها: صفحه ۶۵)

۴

۳

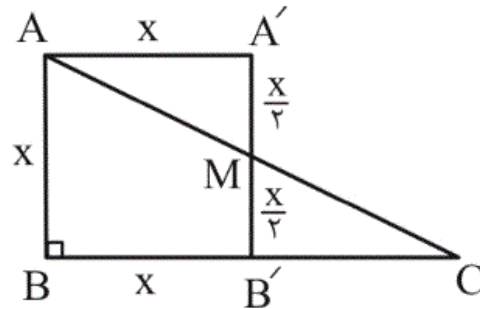
۲

۱

(سراسری تهرانی - ۹۲)

طول ضلع مربع  $AA'B'B$  را  $x$  در نظر می‌گیریم. از همنهشت بودن دو

مثلث  $AA'M$  و  $CB'M$ ، نتیجه می‌شود که  $A'M = B'M = \frac{x}{2}$ ، پس:



$$\frac{S_{(ABB'M)}}{S_{(AA'B'B)}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right)x}{x^2} = \frac{\frac{3}{4}x^2}{x^2} = \frac{3}{4}$$

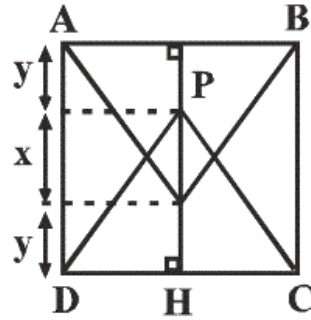
(هندسه ۱- پندرضلعی ها: صفحه ۶۵)

۴

۳

۲

۱



مطابق شکل اگر طول ضلع مربع را  $a$  در نظر بگیریم،  $PH$  ارتفاع مثلث

$$PH = x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{متساوی الاضلاعی به ضلع } a \text{ است، یعنی:}$$

از طرفی  $AD = x + 2y$  پس:

$$\begin{cases} 2 \times \left\{ x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}a \right. \\ (-1) \times \left\{ x + 2y = a \right. \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{3}a - a \Rightarrow x = (\sqrt{3} - 1)a$$

(هندسه ۱- پنر ضلعی ها: صفحه ۶۵)

 ۴

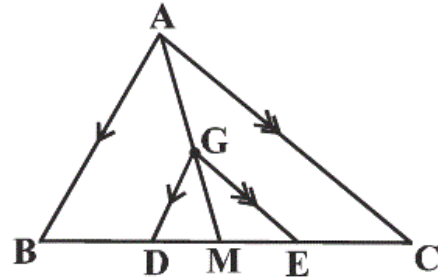
 ۳

 ۲

 ۱

از آنجا که  $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$  و  $GD \parallel AB$ ، از قضیه تالس می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{GD}{AB} = \frac{1}{3} \text{ که}$$



اضلاع مثلث GDE، نظیر به نظیر با اضلاع مثلث ABC موازیند، پس

$$\triangle GDE \sim \triangle ABC \text{ و نسبت تشابه برابر است با } \frac{GD}{AB} = \frac{1}{3} \text{، پس:}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DE}{24} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = 8$$

(هندسه ۱- پنذضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

 ۴ ✓

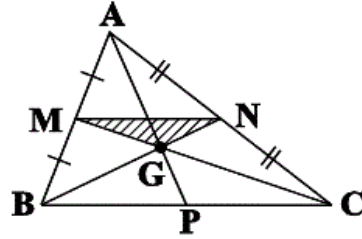
 ۳

 ۲

 ۱



اگر نقطه تلاقی میانه‌های  $AP$ ،  $BN$  و  $CM$  از مثلث  $ABC$  را  $G$  (مرکز ثقل) در نظر بگیریم و از  $G$  به سه رأس مثلث وصل کنیم، آن گاه سه مثلث پدیدآمده مساحت یکسانی خواهند داشت، یعنی:



$$S(\triangle AGB) = S(\triangle BGC) = S(\triangle AGC) = \frac{1}{3}S(\triangle ABC) \quad (*)$$

$M$  و  $N$  به ترتیب وسط‌های  $AB$  و  $AC$  هستند. می‌دانیم که اگر وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل، موازی ضلع سوم و طول آن نیز نصف طول ضلع سوم خواهد بود.

با توجه به شکل  $MN \parallel BC$  و  $MN = \frac{1}{2}BC$ ، پس دو مثلث  $MGN$  و

$BGC$  با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر است با  $k = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ ،

در نتیجه:

$$\frac{S_{\triangle MGN}}{S_{\triangle BGC}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MGN} = \frac{1}{4}S_{\triangle BGC} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$$

پس مساحت مثلث  $ABC$  (بزرگ‌ترین مثلث در شکل)، ۱۲ برابر مساحت مثلث  $MGN$  است.

(هندسه ۱- پنر ضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴

۳

۲

۱

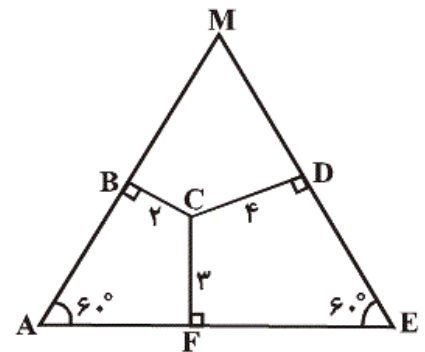
AB و DE را امتداد می‌دهیم و محل برخورد آنها را M می‌نامیم. نقطه C داخل مثلث متساوی‌الاضلاع AME قرار دارد. با توجه به این که مجموع فواصل هر نقطه دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از اضلاعش برابر ارتفاع

مثلث یا  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ضلع آن می‌باشد، پس:

$$BC + CD + CF = \frac{AE\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 3 = \frac{AE\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$



(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

 ۴

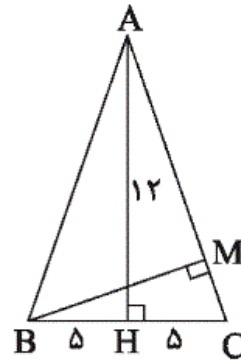
 ۳

 ۲

 ۱

در هر مثلث متساوی الساقین، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر

قاعده بر هم منطبق اند. پس:



$$BH = HC = \frac{10}{2} = 5$$

در قائم الزاویه  $\triangle ABH$ :  $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$$\Rightarrow AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow AB = 13 = AC$$

می‌دانیم مجموع طول دو عمود رسم شده از یک نقطه واقع بر قاعده مثلث

متساوی الساقین بر دو ساق آن، برابر طول ارتفاع وارد بر ساق است، پس داریم:

$$\frac{1}{2} BM \times AC = \frac{1}{2} \times AH \times BC$$

$$BM \times AC = AH \times BC \Rightarrow BM \times 13 = 12 \times 10$$

$$\Rightarrow BM = \frac{120}{13}$$

(هندسه ۱- پنر ضلعی ها: صفحه ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 4 \times 5 = 20$$

$$S = \frac{b}{2} - 1 + i \Rightarrow 20 = \frac{18}{2} - 1 + i \Rightarrow i + 8 = 20 \Rightarrow i = 12$$

(هندسه ۱- پنذضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

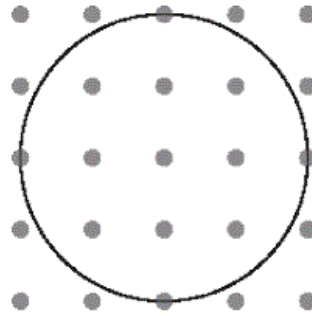
(کتاب آبی هندسه پایه - سؤال ۵۱۰)

در حالتی که فاصله بین نقاط شبکه ۱cm است، داریم:

$$b = 4, i = 1$$

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 \text{ cm}^2$$

اگر فاصله بین نقطه‌های شبکه را نصف کنیم (شکل زیر)، داریم:



$$S = \left( \frac{4}{2} + 1 - 1 \right) \left( \frac{1}{2} \text{ cm} \right)^2 = 1 \cdot \left( \frac{1}{2} \text{ cm} \right)^2 = \frac{2}{5} \text{ cm}^2$$

$$\text{درصد افزایش} = \frac{\frac{2}{5} - 2}{2} \times 100 = 25\%$$

(هندسه ۱- پنذضلعی‌ها؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

از فرمول پیک استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \quad (b \text{ تعداد نقاط مرزی و } i \text{ تعداد نقاط درونی})$$

$$S_1 = \frac{7}{2} + 11 - 1 = \frac{7}{2} + 10 = \frac{27}{2} \quad (\text{مساحت شکل بیرونی (۵ ضلعی)})$$

$$S_2 = \frac{3}{2} + 2 - 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad (\text{مساحت شکل درونی (مثلث)})$$

$$S = \frac{27}{2} - \frac{5}{2} = \frac{22}{2} = 11 \quad (\text{مساحت قسمت هاشورخورده})$$

(هندسه ۱- چندضلعی‌ها: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میلاد منصوری)

-۱۵۱

$$P(1) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$\Rightarrow P(1) = \frac{1}{2}$$

از طرفی:

$$P(2) = P(3) = P(5) = 2x$$

$$P(4) = P(6) = x$$

$$6x + 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 8x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

احتمال زوج آمدن تاس برابر است با:

$$P(2) + P(4) + P(6) = 2x + x + x = 4x = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عسین فزایی)

چون تعداد مهره‌های سیاه در کیسه دوم، کمتر از ۳ است، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر کیسه، ۳ مهره سفید خارج شود. داریم:

$$\frac{\binom{3}{3} \times \binom{4}{3}}{\binom{7}{3} \binom{6}{3}} = \frac{4}{35 \times 20} = \frac{1}{175}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{110}{6} \right] - \left[ \frac{49}{6} \right] = 18 - 8 = 10$$

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{31 + 20 - 20}{61} = \frac{31}{61}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(هومن نورائی)

$$P(\text{همرنگ بودن}) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\text{همرنگ نبودن}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

فرض می‌کنیم  $n$  مهره از یک رنگ و  $(n+1)$  مهره از رنگ دیگر در کیسه وجود دارد:

$$P(\text{همرنگ نبودن}) = \frac{\binom{n}{1} \times \binom{n+1}{1}}{\binom{2n+1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{n(n+1)}{\frac{(2n+1) \times 2n}{2}} = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow 6n + 3 = 5n + 5 \Rightarrow n = 2$$

$$\text{تعداد مهره‌های داخل کیسه} = 2n + 1 = 5$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در بین اعداد کوچکتر از ۹، سه دسته به طول ۶ وجود دارد که اعداد متوالی باشند. این سه دسته عبارتند از:

$$(۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶) \text{ و } (۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷) \text{ و } (۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸)$$

در دسته اول، ۳ مهره با ۳ رنگ مختلف داریم که شماره ۱ هستند. برای بقیه شماره‌ها نیز همین‌طور است.

$$(۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۶$$

$$(۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷)$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۶$$

$$(۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸)$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۶$$

بنابراین تعداد کل اعضا برابر است با:

$$۳^۶ + ۳^۶ + ۳^۶ = ۳ \times ۳^۶ = ۳^۷$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



برای این که حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۵ باشد (A)، باید حداقل

یک بار ۵ بیاید که متمم پیشامد آن است که در هیچ یک از سه پرتاب، ۵

نیاید. داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5 \times 5 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

برای این که حاصل ضرب اعداد رو شده فرد باشد (B)، باید هر سه تاس

فرد ظاهر شوند:

$$P(B) = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{27}{216}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{91}{216}}{\frac{27}{216}} = \frac{91}{27}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

به ازای هر سه عدد متمایز، یک دنبالهٔ اکیداً صعودی و یک دنبالهٔ اکیداً نزولی خواهیم داشت. اگر پیشامد آنکه اعداد رو شده تشکیل دنبالهٔ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی ندهند را با  $A$  نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = 1 - \frac{2 \times \binom{6}{3}}{6^3} = 1 - \frac{2 \times 20}{6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{5}{27} = \frac{22}{27}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

احتمال انتخاب لامپ سالم از جعبهٔ اول  $\frac{k}{5}$  و از جعبهٔ دوم  $\frac{6}{10}$  است. طبق

فرض مسئله داریم:

$$\frac{6}{10} = \frac{k}{5} + \frac{2}{10} \Rightarrow k = 2$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

پرتاب دوم نمی‌تواند ۲ یا ۱ باشد، زیرا اعداد متمایز هستند.

پرتاب دوم ۳ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از  $\{۱, ۲\}$  و متمایز بیاید

$$\text{که می‌شود: } ۲ \times ۱ = ۲$$

پرتاب دوم ۴ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از  $\{۱, ۲, ۳\}$  و متمایز

$$\text{بیاید که می‌شود: } ۳ \times ۲ = ۶$$

پرتاب دوم ۵ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از  $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$  و متمایز

$$\text{بیاید که می‌شود: } ۴ \times ۳ = ۱۲$$

پرتاب دوم ۶ بیاید ← در پرتاب اول و سوم باید از  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  و متمایز

$$\text{بیاید که می‌شود: } ۵ \times ۴ = ۲۰$$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{۲ + ۶ + ۱۲ + ۲۰}{۶^۳} = \frac{۴۰}{۶^۳} = \frac{۵}{۲۷}$$

راه دوم: ۳ عدد از ۶ عدد انتخاب می‌کنیم. عدد بزرگتر را وسط قرار داده و

برای دو عدد دیگر دو حالت داریم. بنابراین:

$$P(A) = \frac{۲ \times \binom{۶}{۳}}{۶^۳} = \frac{۵}{۲۷}$$

(ریاضی ۱- آمار و احتمال: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۵۱)

(امیرحسین ابومصوب)

$$P(B \cap A') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0/6 = 0/6$$

$$\Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0/6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{0/6} = 0/5 + 0/6 = 0/6$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

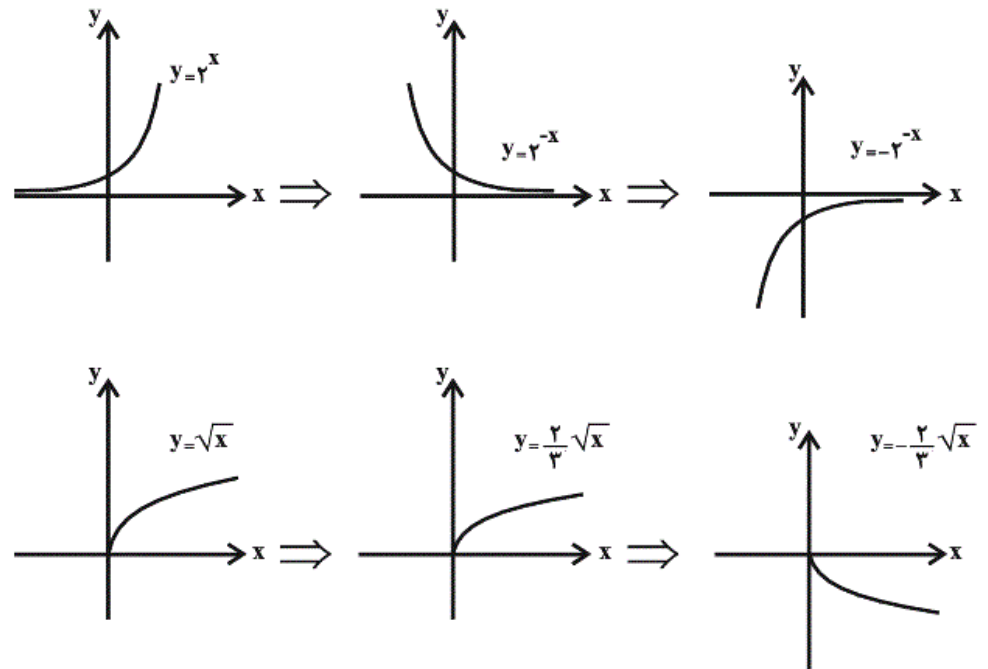
۴

۳

۲

۱ ✓

(سعید فانجانی)



با بررسی دو نمودار واضح است که فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

(مسابقه ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴ ✓

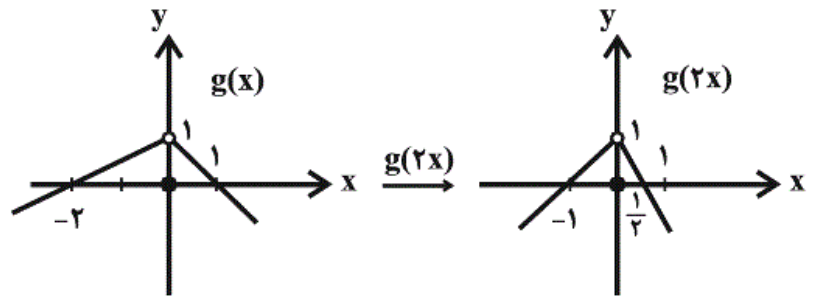
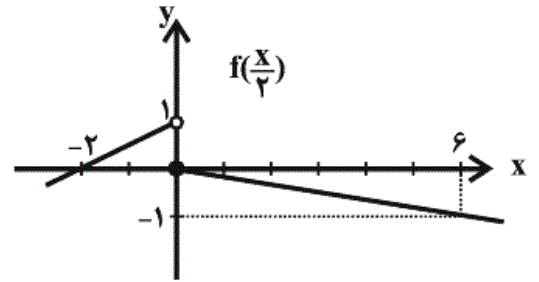
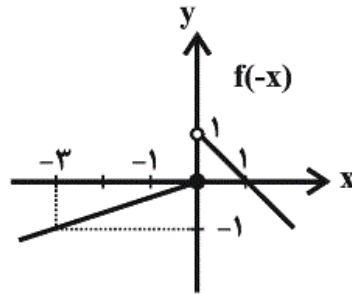
۳

۲

۱

ابتدا نمودارهای  $f(-x)$  و  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  را رسم و به کمک آن  $g(x)$  را رسم

می‌کنیم:



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱

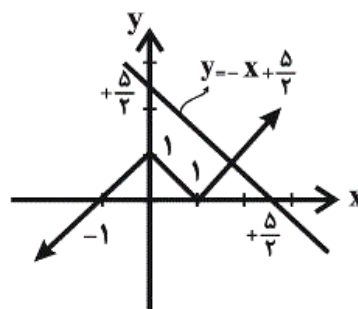
$$D_g : 2f(x+a) + 2x - 5 = 0 \Rightarrow f(x+a) = -x + \frac{5}{2}$$

برای این که جواب معادله فوق یک بازه باشد، باید قسمتی از نمودار

$f(x+a)$  بر تابع  $y = -x + \frac{5}{2}$  منطبق شود. مطابق شکل، این حالت

زمانی اتفاق می افتد که نمودار تابع  $f$  به اندازه  $\frac{3}{2}$  واحد به راست انتقال

یابد، یعنی  $a = -\frac{3}{2}$ .



(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(پوانبش نیکنام)

چون انتقال یافته خط، باز هم خط است، کافی است نقاط متناظر با نقاط

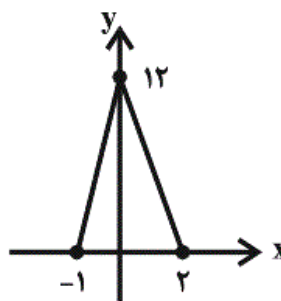
 $(0,0)$  و  $(-6,0)$  و  $(-2,4)$  از تابع  $f(2x+5)$  را روی تابع $3f(-4x+1)$  بیابیم:

$$(0,0) \rightarrow \begin{cases} 2 \times 0 + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (-1,0)$$

$$(-2,4) \rightarrow \begin{cases} 2 \times (-2) + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 3 \times 4 = 12 \end{cases} \rightarrow (0,12)$$

$$(-6,0) \rightarrow \begin{cases} 2 \times (-6) + 5 = -4x + 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (2,0)$$

$$S = \frac{3 \times 12}{2} = 18$$



(مسأله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

قرار می‌دهیم:  $T = x + [x]$  ، بنابراین داریم:

$$\Rightarrow [T] = [x + [x]] = [x] + [x] = 2[x] \Rightarrow [x] = \frac{1}{2}[T]$$

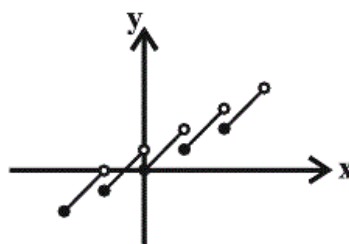
$$\Rightarrow f(x + [x]) = (x + [x]) - [x]$$

$$\Rightarrow f(T) = T - \frac{1}{2}[T]$$

بنابراین ضابطه تابع  $f(x) = x - \frac{1}{2}[x]$  می‌باشد. ضابطه تابع را در بازه‌هایی

به صورت  $n \leq x < n+1$  به دست می‌آوریم و با رسم این ضابطه‌ها، نمودار

به صورت زیر در می‌آید. ( $n \in \mathbb{Z}$ )



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



در ابتدا هر دو ضابطه تابع باید اکیداً صعودی باشند؛ این یعنی حتماً  $a \geq 0$  باشد؛ در غیر این صورت، تابع  $x^2$  غیریکنوا خواهد شد. حال کافی است در نقطه مشترک دو ضابطه، شرط اکیداً صعودی بودن تابع را بنویسیم. داریم:

$$2a + 1 \leq a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 \geq 2 \xrightarrow{a > 0} a \geq 1 + \sqrt{2}$$

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار  $\frac{5}{2}$ ، در این بازه قرار دارد.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

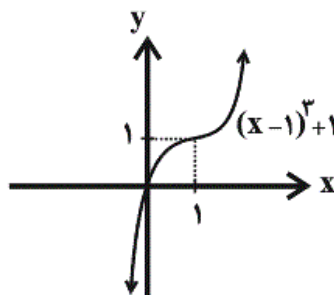
 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

این تابع با استفاده از انتقال  $y = x^3$  به سادگی رسم می‌شود:



با توجه به نمودار، مشاهده می‌شود تابع همواره صعودی است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

 ۴

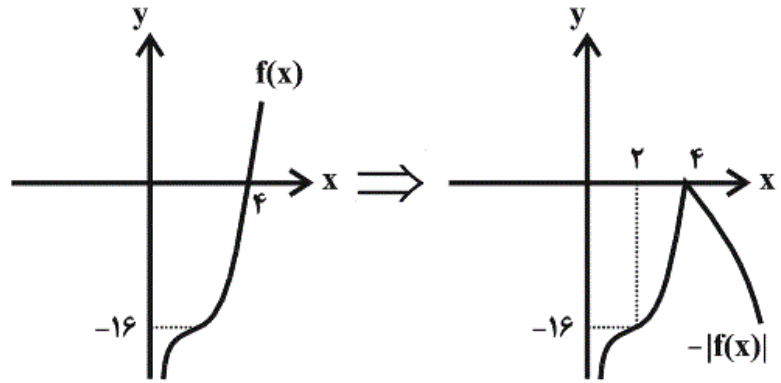
 ۳

 ۲

 ۱ ✓

$$f(x) = 2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 8) = 2(x-2)^3 - 16$$

$$-|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & f(x) > 0 \\ f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع در بازه  $[4, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x_2 > x_1 \Rightarrow [x_2] \geq [x_1] \xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f([x_2]) \geq f([x_1])$$

$$\Rightarrow g(x_2) \geq g(x_1) \Rightarrow g \text{ تابعی صعودی است.}$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow -2x_2 < -2x_1 \Rightarrow -2x_2 + 1 < -2x_1 + 1$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً صعودی}} f(-2x_2 + 1) < f(-2x_1 + 1)$$

$$\Rightarrow h(x_2) < h(x_1) \Rightarrow h \text{ اکیداً نزولی است.}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

باید داشته باشیم:

$$(f(x))^2 - 225 \geq 0 \Rightarrow (f(x) - 15)(f(x) + 15) \geq 0$$

از طرفی، به سادگی رابطه  $f(x)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}-1} - 1$$

بنابراین:

$$(f(x) - 15)(f(x) + 15) = \left( 2^{\frac{1}{x}-1} - 16 \right) \underbrace{\left( 2^{\frac{1}{x}-1} + 14 \right)}_{\text{همواره مثبت}} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}-1} - 16 \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}-1} \geq 16 = 2^4$$

$$\xrightarrow{2^x \text{ اکیداً صعودی است}} \frac{1}{x} - 1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 5 \Rightarrow \frac{1-5x}{x} \geq 0$$

$x$	$0$	$\frac{1}{5}$	$\Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{5}$
$\frac{1-5x}{x}$	-	+	
$x$	تن	-	

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱

ابتدا دامنه هر یک از لگاریتم‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases}$$

از طرفی با توجه به قواعد لگاریتم داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}^{x+3} = \log_{2^{-1}}^{x+3} = \log_2^{x+3} \cdot 2$$

$$\log_2^{2x-1} \leq \log_2^{\frac{x+3}{2}} \xrightarrow{\text{تابع } \log_2^x \text{ اکیداً صعودی}} 2x-1 \leq \frac{x+3}{2}$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

با توجه به دامنه‌ای که به دست آوردیم، اشتراک این جواب‌ها، بازه  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right]$

می‌باشد که این بازه فقط شامل عدد صحیح ۱ است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی‌اکبر علینزاده)

-۹۲

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \quad ; \quad r=p(3-2)+4=7 \Rightarrow p(1)=3$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow g(-1) = (-1)^6 + \Delta p(1) - m = 1 + 15 - m = 0$$

$$\Rightarrow m = 16$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(بهبانفش نیکنام)

باقی مانده  $p(x)$  بر  $x-1$  برابر با ۳ می باشد:  $\Leftarrow p(1) = 3$ باقی مانده  $p(x)$  بر  $x+1$  برابر با -۲ می باشد:  $\Leftarrow p(-1) = -2$ باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x+2$  برابر است با  $f(-2)$ ، بنابراین:

$$\Rightarrow r = f(-2) = p(-1) - 2p(1) + 4 + 6k = -2 - 6 + 4 + 6k = 0$$

$$\Rightarrow 6k = 4 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

(مسابان ۲- تابع: صفحه های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

چون  $f(x)$  بر  $x+1$  بخش پذیر است، پس  $f(-1) = 0$  است.

$$f(-1) = -2 + a - 4 - 3 = 0 \Rightarrow a = 9$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3 \\ &= (2x^3 + 2x^2) + (4x^2 + 4x) + (2x^2 - 3) \\ &= 2x^2(x+1) + 4x(x+1) + 3(x-1)(x+1) \\ &= (x+1)(2x^2 + 4x + 3x - 3) = (x+1)(2x^2 + 7x - 3) \end{aligned}$$

برای پیدا کردن دو ریشه دیگر تابع داریم:

$$2x^2 + 7x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \begin{cases} x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{2} \\ x_2 x_3 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3$$

$$= 1 + \frac{49}{4} + 3 = \frac{65}{4}$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(جوابفش نیکنام)

$$x^6 - 64 = (x+2) \underbrace{(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)}_{p(x)}$$

$$A = -2 - 8 - 32 = -42$$

$$B = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$2B - A = 42 + 42 = 84$$

(مسایان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(جوابفش نیکنام)

چون تابع  $f$  متناوب است، پس داریم:

$$f(x+nT) = f(x), n \in \mathbb{Z}$$

$$f(102/5) = f(2/5 + 25 \times 4) = f(2/5) = f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2 \sin \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱



(کاکظم ایلالی)

$$f(x) = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x (-\cos 2x)$$

$$-\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x$$

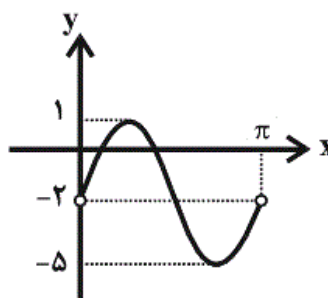
بنابراین دوره تناوب این تابع برابر  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  است.

(مسابقان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴)

(یاسین سپهر)

ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب  $y = 3 \sin 2x - 2$  به ترتیب ۱، -۵ و  $\pi$

است. پس نمودار تابع به صورت زیر است:



با توجه به نمودار معلوم می‌شود که  $k$  باید در بازه  $(-2, 1)$  یا  $(-5, -2)$

باشد.

(مسابقان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴)

با توجه به نمودار تابع:

$$f(0) = -2 \Rightarrow a \cos 0 = -2 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی دوره تناوب تابع  $2\pi$  است. پس:

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1$$

تابع  $\cos x$ ، نسبت به محور  $y$  ها تقارن دارد؛ بنابراین  $b$  می‌تواند هر دو

مقدار  $-1$  و  $+1$  را بپذیرد؛ در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} b = 1 \Rightarrow a + b = -1 \\ b = -1 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases}$$

(مسایان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴)

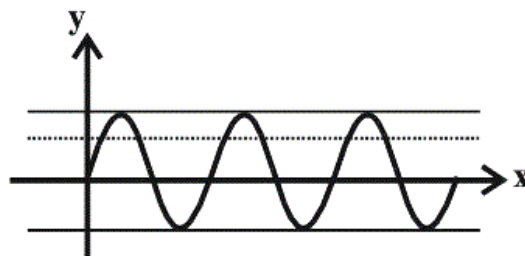
۴

۳

۲

۱

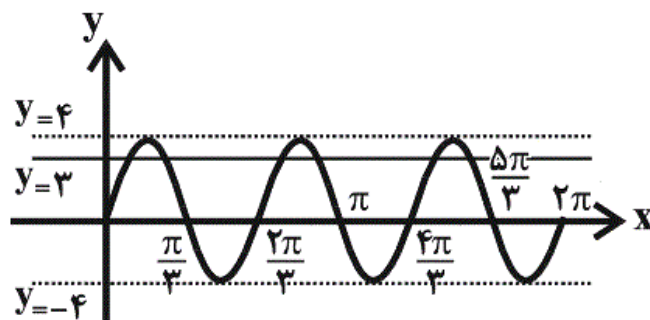
واضح است که  $-4 \leq 4 \sin ax \leq 4$ ، پس برای اینکه با  $y = a$  برخورد داشته باشد، باید  $a \in [-4, 4] - \{0\}$  باشد. در ضمن  $y = 4$  یا  $y = -4$  با نمودار برخوردهای کمتری نسبت به بقیه اعداد این بازه دارند:



در واقع  $a \in [-3, 3] - \{0\}$  است.

برای اینکه تعداد نقاط برخورد بیشتر شوند، دوره تناوب باید کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد. یعنی:

$$T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{3}$$



در این حالت  $y = 3$  با نمودار  $y = 4 \sin 3x$ ، ۶ نقطه برخورد دارد.

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$\Rightarrow A^{10} = A^9 \times A = (A^3)^3 \times A = (-I)^3 \times A = -A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربرد ها: صفحه های ۱۷ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{0 + \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2+12} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \text{ مجموع درایه‌های } = \frac{1}{10} (-2 + 3 - 4 + 1) = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمد قیدی)

$$(A - 2I)(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} - 2I(A - 2I)^{-1} = I$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} = I + 2(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(A - 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون دوم} = 2 + 3 = 5$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(کیوان دارایی)

$$|I + A| = |A^{-1}A + A| = |(A^{-1} + I)A| = |A^{-1} + I||A|$$

$$\Rightarrow 3 = |I + A^{-1}| \times 1 \Rightarrow |I + A^{-1}| = 3$$

(هنر سه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ تا ۳۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

باید دو خط بر هم منطبق باشند، در نتیجه:

$$\frac{2m+1}{-7m} = \frac{-m}{m+6} = \frac{-1}{m}$$

دو معادله به دست می آید که باید هر دو معادله را حل کنیم یا یکی را حل

کنیم و جوابهای به دست آمده را در معادله دوم صدق دهیم:

$$(I) \frac{2m+1}{-7m} = \frac{-1}{m} \Rightarrow 2m^2 + m = 7m$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 6m = 0 \Rightarrow 2m(m-3) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 3$$

$$(II) \frac{-m}{m+6} = \frac{-1}{m} \Rightarrow m^2 = m+6 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ یا } m = -2$$

بنابراین یک جواب مشترک برای هر دو معادله وجود دارد:  $m = 3$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه های ۲۳ تا ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \left( A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} A \right| = \left| \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \right| \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \times |A| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (-1)|A| = 9 \Rightarrow |A| = -9$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ و ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



(معمد صفت کار)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix} \times |A| \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = |6I|$$

$$\Rightarrow (-6) \times |A| \times (-6) = 6^3 |I|$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{6^3}{6^2} = 6$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$\begin{cases} \|B|A| = |B|^3 |A| \\ \|A|B| = |A|^3 |B| \end{cases} \Rightarrow \|B|A| + \|A|B| = |B|^3 |A| + |A|^3 |B|$$

$$= |B^3 A| + |A^3 B|$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$m = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times \frac{1}{a} & a \times 1 & a \times a \\ b \times \frac{1}{b} & b \times 1 & b \times b \\ c \times \frac{1}{c} & c \times 1 & c \times c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 1 & a \\ \frac{1}{b} & 1 & b \\ \frac{1}{c} & 1 & c \end{vmatrix} = \frac{m}{abc}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

به کمک دستور ساروس، دترمینان را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار

می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 2 & x+2 & 0 \\ k & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$x(x+2) - k(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow (x+2)[x - k(x+1)] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x(1-k) - k = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{1-k} = -2 \Rightarrow k = -2 + 2k \Rightarrow k = 2 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

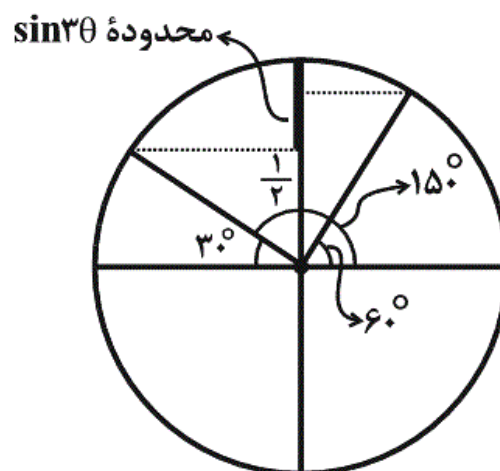
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$20^\circ < \theta < 50^\circ \Rightarrow 60^\circ < 3\theta < 150^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin 3\theta \leq 1$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۹ و حسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا از قطاع داده شده، شعاع دایره و سپس مساحت آن را حساب می‌کنیم:

$$\frac{36^\circ}{30^\circ} = 12 \Rightarrow 12 \times 5 = \text{محیط دایره} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow r = \frac{5 \times 12}{2 \times \pi} = \frac{30}{\pi} \Rightarrow S = \pi r^2 = \frac{30}{\pi} \times \frac{30}{\pi} \times \pi = \frac{900}{\pi}$$

(مسابقه ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

واضح است که مساحت مثلث ABC برابر  $\frac{1}{2}$  است. از طرفی داریم:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

همچنین به سادگی از رابطه فیثاغورس به دست می‌آید که  $BC = \sqrt{5}$  و

$AC = \sqrt{2}$  است؛ بنابراین:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

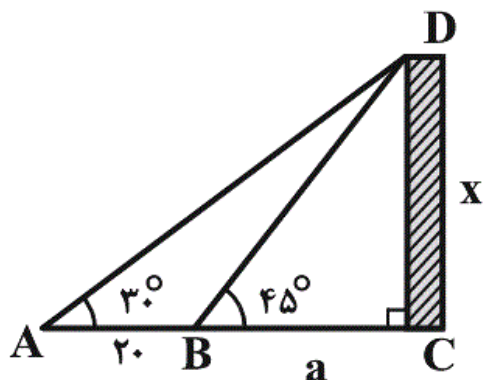
(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

۴

۳

۲

۱



$$\Delta ADC: \tan 30^\circ = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+a} \quad (1)$$

$$\Delta BDC: \frac{CD}{BC} = \tan 45^\circ \Rightarrow 1 = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{20+x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{20+x}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow 1 + \frac{20}{x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 10(\sqrt{3}+1)$$

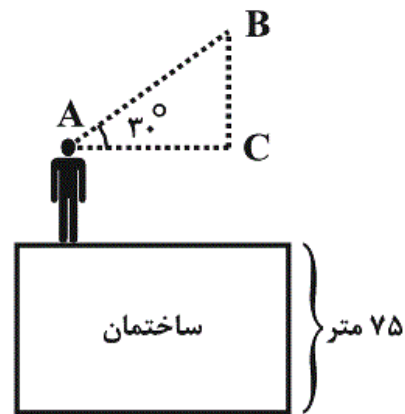
(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{440/4} \Rightarrow BC = 220/2$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بالگرد تا سطح زمین} = 220/2 + 1/8 + 75 = 297 \text{ (متر)}$$

(ریاضی ۱- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمدهوری وزیر)

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x - y) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x - y = \frac{\pi}{6}$$

(مسابان ۱- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



یعنی کمان‌هایی که مجموع‌شان  $\gamma x$  باشد، متمم یکدیگرند.  $\gamma x = \frac{\pi}{2} \rightarrow$

$$x + \epsilon x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x = \sin \epsilon x$$

$$\gamma x + \delta x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \gamma x = \cos \delta x$$

$$\gamma x + \epsilon x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \gamma x = \cot \epsilon x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \sin \gamma x \tan \gamma x}{\cot \epsilon x \cos \delta x \sin \epsilon x} = 1$$

(مسابقان ۱- مثلثات: صفحه ۹۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

همه گزینه‌ها و صورت سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\sin 451^\circ = \sin(360^\circ + 91^\circ) = \sin 91^\circ = \cos 1^\circ$$

گزینه «۱»:  $\cos 1^\circ$

گزینه «۲»:  $-\sin 269^\circ = -\sin(270^\circ - 1^\circ) = -(-\cos 1^\circ) = \cos 1^\circ$

گزینه «۳»:  $\sin 631^\circ = \sin(720^\circ - 89^\circ) = \sin(-89^\circ) = -\cos 1^\circ$

گزینه «۴»:  $\cos\left(-\frac{\pi}{180}\right) = \cos(-1^\circ) = \cos 1^\circ$

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امسان جوانی باری)

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \beta} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

(مسئله ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{cases} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{\gamma}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\gamma} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \sin(\alpha - \gamma\pi) = -\sin(\gamma\pi - \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin\left(\alpha - \frac{\gamma\pi}{\gamma}\right) = -\sin\left(\frac{\gamma\pi}{\gamma} - \alpha\right) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{\gamma}\right) - \gamma \sin(\alpha - \gamma\pi)}{\gamma \sin\left(\alpha - \frac{\gamma\pi}{\gamma}\right)} = \frac{\sin \alpha + \gamma \sin \alpha}{\gamma \cos \alpha} = \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma \sin \alpha}{\gamma \cos \alpha} = \gamma \Rightarrow \tan \alpha = \gamma \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\gamma}$$

(مسائل ۱- مثلثات: صفحه‌های ۹۸ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱