



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان ۱ - ۲۰ سوال -

۶۱- اگر  $a > 0 > b$  و  $|b| > |a|$  باشد، حاصل  $|a-b| - |a+b| - ||b| - |a||$  کدام است؟

- (۱)  $a-b$       (۲)  $-a-b$       (۳)  $3a+b$       (۴)  $a+b$

۶۲- مجموع جواب‌های معادله  $|2x-8| - |3x-2| = 0$  کدام است؟

- (۱)  $-4$       (۲)  $3$       (۳)  $-8$       (۴)  $8$

۶۳- معادله  $\sqrt{x} - ||x| - 1| = 0$ ، در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

- (۱) صفر      (۲)  $1$       (۳)  $2$       (۴)  $3$

۶۴- با توجه به تساوی  $4a - a^2 = 4 + |2a - b|$ ، حاصل  $a + b$  کدام است؟ ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

- (۱)  $4$       (۲)  $6$       (۳)  $8$       (۴)  $10$

۶۵- نمودار تابع  $f(x) = 4 - |x-2| - |x|$  چه مساحتی با محور طول‌ها می‌سازد؟

- (۱)  $4$       (۲)  $5$       (۳)  $6$       (۴)  $7$

۶۶- مجموع جواب‌های معادله  $|x^2 - 1| + 1 = 2x + 3$  کدام است؟

- (۱)  $4$       (۲)  $3$       (۳)  $2$       (۴)  $1$

۶۷- مساحت محصور بین نمودار تابع  $f(x) = |x+1| + |x+4|$  و خط  $y = -x$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۲/۵      ۳) ۱      ۴) ۱/۵

۶۸- اگر به ازای  $x \in (a, b)$ ، فاصله دو عدد  $3x-1$  و  $x-3$  روی محور اعداد کم تر از ۶ باشد، بیش ترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۴  
۳) ۶      ۴) ۸

۶۹- اگر معادله  $x - \frac{x}{|x|} = k$ ، دارای دو ریشه حقیقی باشد، مجموعه مقادیر  $k$  کدام است؟

- ۱)  $\{k | -1 < k < 1\}$       ۲)  $\{k | -1 \leq k \leq 1\}$   
۳)  $\{k | k < -1 \text{ یا } k > 1\}$       ۴)  $\{k | k \leq -1 \text{ یا } k \geq 1\}$

۷۰- اگر بیش ترین مقدار عبارت  $\frac{24}{|x-4| + |x+a|}$  برابر ۴ باشد، کم ترین مقدار  $a$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) -۲  
۳) ۱۰      ۴) -۱۰

۷۱- اگر معادله  $||x|-a| = 3$  ( $a > 0$ ) حداکثر سه جواب داشته باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴      ۴) ۵

۷۲- دو نقطه  $A(m-1, 2)$  و  $B(3, m+4)$  نسبت به خط  $d: x+y=5$  قرینه اند.  $m$  کدام است؟

- ۱) ۱      ۲) ۲      ۳) ۳      ۴) ۴

۷۳- شعاع دایره‌ای که از دو نقطه  $(1, 2)$  و  $(3, 0)$  گذشته و مرکز آن روی خط  $y = 2x-1$  قرار دارد، کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{8}$       ۲) ۳      ۳)  $\sqrt{10}$       ۴)  $2\sqrt{3}$

۷۴- اگر نقطه  $P(-12, k)$  روی عمودمنصف پاره خط واصل دو نقطه  $A(0, -3)$  و  $B(6, 15)$  قرار داشته باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) -۳۹ (۲) -۳ (۳) ۱۱ (۴) ۴

۷۵- در مثلث  $ABC$  با رئوس  $A(1, -1)$ ،  $B(5, 2)$  و  $C(-3, 1)$ ، طول ارتفاع  $CH$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۶- اگر خطوط  $y = (k+2)x + 3$  و  $ky - x - b = 0$  معادلات قطرهای یک مربع و  $A$  یکی از رئوس آن باشد، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۷- اگر نقاط  $A(2, 1)$  و  $B(4, 7)$  از خط  $ay - x = 5$  به یک فاصله باشند، مقدار  $a$  برابر با کدام گزینه می تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱

- (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴) -۱

۷۸- دایره  $C$  بر دو خط  $y = \frac{3}{4}x + 10$  و  $3x - 4y - 6 = 0$  مماس است. اندازه شعاع دایره  $C$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴

- (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{4}{6}$

۷۹- دو رأس یک مثلث بر روی خطی به معادله  $y = x + 1$  است که طول این رئوس در دستگاه مختصات ۱ و ۲ است. مختصات رأس سوم بر روی

کدام یک از خطوط زیر باشد تا به ازای هر نقطه از آن مساحت مثلث یک باشد؟

- (۱)  $x + y = 1$  (۲)  $x - y = 3$

- (۳)  $y - x = 3$  (۴)  $y - x = 2$

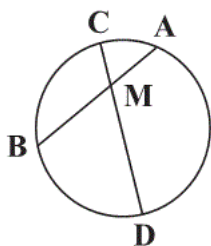
۸۰- اگر  $|x^2 + 4x - 60| = 60 - 4x - x^2$  باشد، چند عدد صحیح در نامساوی  $|x + 10| + |x - 6| \geq |x + 2| + 2$  صدق می کند؟

- (۱) ۲ (۲) ۱۶

- (۳) ۱۷ (۴) بی شمار

۱۰۱- در دایره زیر، وتر  $AB$  و وتر  $CD$  را به نسبت ۱ به ۶ تقسیم کرده است. اگر  $AB = 10$  و  $CD = 14$  باشد،

حاصل  $|AM - BM|$  کدام است؟



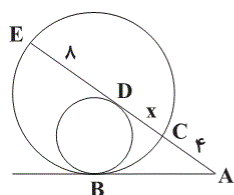
(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۱۰

۱۰۲- در شکل زیر، دو دایره در نقطه  $B$  مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایره کوچک تر در نقطه  $D$ ، دایره بزرگ تر را در نقاط  $E$  و  $C$  و مماس رسم شده در نقطه  $B$  را در نقطه  $A$  قطع کند، آن گاه طول  $CD$  کدام است؟ ( $DE = 8$  و  $AC = 4$ )



(۱) ۲

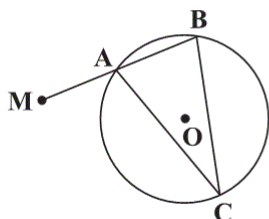
(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰۳- در دایره زیر، قاطع  $MAB$  رسم شده است؛ به طوری که  $MA = AB = 6$  و  $\hat{BAC} = 75^\circ$ . اگر  $AC = CB$  باشد، فاصله نقطه  $M$  از مرکز دایره

چقدر است؟



(۱)  $6\sqrt{3}$

(۲) ۱۲

(۳)  $8\sqrt{3}$

(۴) ۱۶

۱۰۴- از نقطه M خارج دایره C(O, r) به نقطه O وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه N قطع کند. می‌دانیم  $MN = r$  و دایره‌ای به مرکز N و شعاع r رسم می‌کنیم تا دایره C را در دو نقطه T و T' قطع کند. زاویه TNT' کدام است؟

(۱)  $90^\circ$

(۲)  $105^\circ$

(۳)  $120^\circ$

(۴)  $135^\circ$

۱۰۵- طول خط‌المركزین دو دایره که نسبت به هم مماس درونی‌اند، ۴ و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها  $32\pi$  است. طول شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۱) ۴

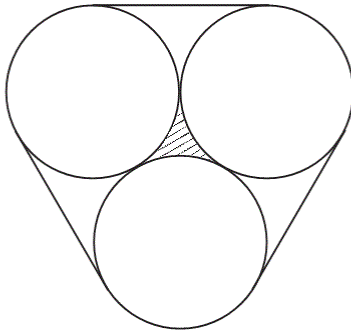
(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

۱۰۶- سه دایره به شعاع‌های برابر، دوه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل زیر، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. اگر مساحت قسمت

هاشورخورده برابر  $(4\sqrt{3} - 2\pi)$  باشد، طول نخ کدام است؟



(۱)  $12 - 2\pi$

(۲)  $24 - 4\pi$

(۳)  $12 + 4\pi$

(۴)  $24 + 8\pi$

۱۰۷- اگر تنها ۲ مماس مشترک بین دایره‌های  $C_1(O_1, 6)$  و  $C_2(O_2, 4)$  بتوان رسم کرد، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(۱)  $3\sqrt{11}$

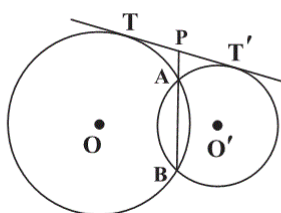
(۲)  $7\sqrt{2}$

(۳)  $4\sqrt{6}$

(۴)  $2\sqrt{23}$

۱۰۸- مطابق شکل، دو دایره به مراکز O و O' به طول خط‌المركزین ۱۶ مفروض‌اند و می‌دانیم امتداد وتر مشترک AB، مماس مشترک TT' را در

نقطه P قطع می‌کند. اگر مساحت چهارضلعی AOBO' برابر ۷۲ و طول TT' برابر ۱۲ باشد، طول PA کدام است؟



(۱) ۲

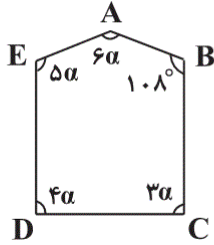
(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۵

۱۰۹- پنج ضلعی ABCDE مطابق شکل مفروض است. اگر عمودمنصف‌های اضلاع این پنج ضلعی در یک نقطه هم‌رس باشند، بزرگ‌ترین زاویه

چهارضلعی ABCD چند برابر کوچک‌ترین زاویه چهارضلعی ABCE است؟



(۱) ۱/۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۵

(۴) ۳

۱۱۰- در یک چندضلعی محیطی به مساحت ۸۴، اگر طول شعاع دایره محاطی برابر ۳ باشد، آن‌گاه مجموع طول اضلاع کدام است؟

(۴) ۶۰

(۳) ۳۰

(۲) ۵۶

(۱) ۲۸

### حسابان ۱ - سوالات موازی - ۲۰ سوال

۸۱- اگر  $a > 0 > b$  و  $|b| > |a|$  باشد، حاصل  $|a - b| - |a + b| - ||b| - |a||$  کدام است؟

(۴)  $a + b$

(۳)  $3a + b$

(۲)  $-a - b$

(۱)  $a - b$

۸۲- مجموع جواب‌های معادله  $|2x - 8| - |3x - 2| = 0$  کدام است؟

(۴) ۸

(۳) -۸

(۲) ۳

(۱) -۴

۸۳- معادله  $\sqrt{x} - ||x| - 1| = 0$ ، در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

۸۴- با توجه به تساوی  $4 + |2a - b| = 4a - a^2$ ، حاصل  $a + b$  کدام است؟ ( $a, b \in \mathbb{R}$ )

(۴) ۱۰

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۸۵- معادله  $\sqrt{9x^2 - 12\sqrt{x^2 + 4}} = 1$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۸۶- اگر مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $\frac{x+k}{x^2-2x} + \frac{x}{x^2-x} = \frac{1}{x^2-3x+2}$  برابر با  $\frac{13}{4}$  باشد،  $k$  کدام است؟

- (۱) فقط  $k=1$  (۲) فقط  $k=3$  (۳)  $k=1$  یا  $k=3$  (۴)  $k=-1$

۸۷- مساحت محصور بین نمودار  $f(x) = |x+1| + |x+4|$  و خط  $y = -x$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{5}$

۸۸- اگر به ازای  $x \in (a, b)$ ، قدرمطلق اختلاف دو عدد  $3x-1$  و  $x-3$  کم‌تر از ۶ باشد، بیش‌ترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۹- اگر معادله  $x - \frac{x}{|x|} = k$  دارای دو ریشه حقیقی باشد، مجموعه مقادیر  $k$  کدام است؟

- (۱)  $\{k | -1 < k < 1\}$  (۲)  $\{k | -1 \leq k \leq 1\}$   
(۳)  $\{k | k > -1 \text{ یا } k > 1\}$  (۴)  $\{k | k \leq -1 \text{ یا } k \geq 1\}$

۹۰- اگر بیش‌ترین مقدار عبارت  $\frac{24}{|x-4| + |x+a|}$  برابر ۴ باشد، کم‌ترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲  
(۳) ۱۰ (۴) -۱۰

۹۱- مجموع جواب‌های حقیقی معادله  $|x^2 - 2x| + x = 2$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۹۲- اگر معادله  $|x-a|=3$  ( $a > 0$ ) حداکثر سه جواب داشته باشد، مجموعه مقادیر قابل قبول برای  $a$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

۹۳- معادله  $\frac{3x+2\sqrt{x}}{x^2-5x+4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$  چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ فاقد جواب

۹۴- معادله  $\frac{x^2-x+1}{3x+6} = \frac{x^2-2x+4}{2x+2}$  چند جواب مثبت دارد؟

- یک (۱)      دو (۲)      سه (۳)      هیچ (۴)

۹۵- اگر تعداد جواب‌های معادله  $x+\sqrt{x}=6$  برابر  $k$  باشد، معادله  $\sqrt{x-\sqrt{x+1}}=k$  چند جواب دارد؟

- ۱ فاقد جواب (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۹۶- اگر  $x=1$  یکی از جواب‌های معادله  $\sqrt{3x+a}-\sqrt{2-x}=1$  باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- $\frac{1}{4}$  (۱)       $-\frac{1}{4}$  (۲)       $\frac{3}{16}$  (۳)      جواب دیگری ندارد (۴)

۹۷- ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۴ درصد موجود است. اگر ۴ کیلوگرم نمک اضافی به محلول اضافه شود، چند کیلوگرم آب باید

تبخیر شود تا غلظت محلول به ۶ درصد برسد؟

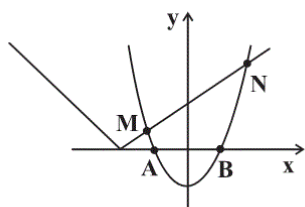
- ۲ (۱)      ۴ (۲)      ۶ (۳)      ۸ (۴)

۹۸- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله  $3x^2 + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 5(x^2 + x + 1)$  کدام است؟

- $\frac{3}{2}$  (۱)      ۳ (۲)       $\frac{9}{2}$  (۳)      ۶ (۴)

۹۹- شکل زیر روند حل معادله  $|x+2| = 2x^2 - 1$  را به روش هندسی نشان می‌دهد. نسبت مساحت مثلث ANB به مساحت مثلث AMB کدام

است؟



۲ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

۱۰۰- اگر  $|x^2 + 4x - 60| = 60 - 4x - x^2$  باشد، چند عدد صحیح در نامساوی  $|x+10| + |x-6| \geq |x+2| + 2$  صدق می‌کند؟

۴ بی‌شمار

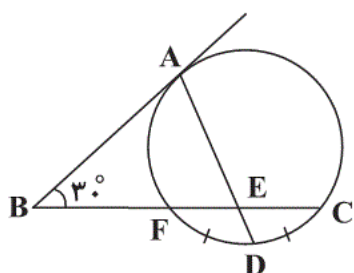
۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۲ (۱)

### هندسه ۲- سوالات موازی - ۱۰ سوال

۱۱۱- در شکل زیر، نیم‌خط BA در نقطه A بر دایره مماس است و  $\widehat{FD} = \widehat{DC}$ . اگر  $\hat{B} = 30^\circ$  باشد،  $\hat{AEC}$  کدام است؟



کدام است؟

۱۱۵° (۱)

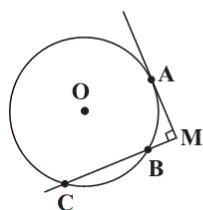
۱۱۰° (۲)

۱۰۵° (۳)

۱۰۰° (۴)

۱۱۲- مطابق شکل دایره‌ای به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. اگر مماس رسم شده در نقطه A و امتداد وتر BC یکدیگر را با زاویه  $90^\circ$

قطع کنند و  $\widehat{AB} = \widehat{BC}$  باشد، طول پاره‌خط BC کدام است؟



$\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۱)

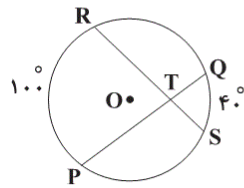
$\frac{1}{2}$  (۲)

$\sqrt{3}$  (۳)

۱ (۴)

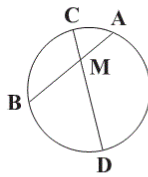
۱۱۳- در دایره  $C(O, r)$  وترهای  $PQ$  و  $RS$  با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه  $T$  قطع کرده‌اند. اگر  $\widehat{RP} = 100^\circ$  و  $\widehat{QS} = 40^\circ$  باشد، اندازه

زاویه  $\angle OTR$  کدام است؟



- (۱)  $70^\circ$
- (۲)  $35^\circ$
- (۳)  $30^\circ$
- (۴)  $40^\circ$

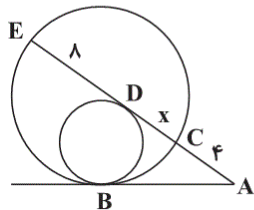
۱۱۴- در دایره زیر، وتر  $AB$  وتر  $CD$  را به نسبت ۱ به ۶ تقسیم کرده‌است. اگر  $AB = 10$  و  $CD = 14$  باشد، حاصل  $|AM - BM|$  کدام است؟



- (۱) ۲
- (۲) ۵
- (۳) ۷
- (۴) ۱۰

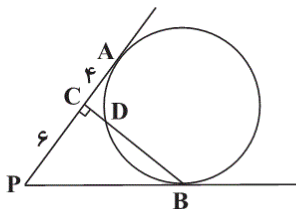
۱۱۵- در شکل زیر، دو دایره در نقطه  $B$  مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایره کوچک‌تر در نقطه  $D$ ، دایره بزرگ‌تر را در نقاط  $C$  و  $E$  و

مماس رسم شده در نقطه  $B$  را در نقطه  $A$  قطع کند، آن‌گاه طول  $CD$  کدام است؟ ( $DE = 8$  و  $AC = 4$ )



- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۱۱۶- در شکل زیر،  $PA$  و  $PB$  بر دایره مماس هستند و  $BC$  بر  $PA$  عمود است. اگر  $PC = 6$  و  $CA = 4$  باشند، طول  $CD$  کدام است؟



- (۱) ۳
- (۲)  $\sqrt{6}$
- (۳)  $\sqrt{5}$
- (۴) ۲

۱۱۷- از نقطه  $M$  خارج دایره  $C(O, r)$  به نقطه  $O$  وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه  $N$  قطع کند. می‌دانیم  $MN = r$  و دایره‌ای به مرکز  $N$  و

شعاع  $r$  رسم می‌کنیم تا دایره  $C$  را در دو نقطه  $T$  و  $T'$  قطع کند. زاویه  $\angle TNT'$  کدام است؟

- (۱)  $90^\circ$
- (۲)  $105^\circ$
- (۳)  $120^\circ$
- (۴)  $135^\circ$

۱۱۸- می دانیم طول مماس مشترک داخلی دو دایره با شعاع‌های مساوی، برابر ۱۵ است. اگر طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۱۷ باشد و  $T_1T_2$

و  $T_1'T_2'$  مماس مشترک‌های خارجی این دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی  $T_1T_2T_1'T_2'$  کدام است؟

- ۶۸ (۱)      ۱۳۶ (۲)       $68\sqrt{3}$  (۳)       $136\sqrt{3}$  (۴)

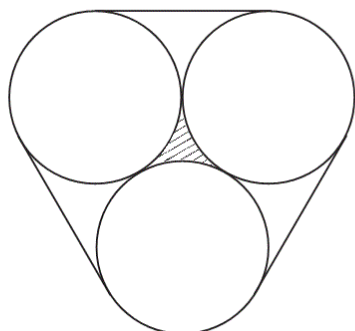
۱۱۹- طول خط‌المركزین دو دایره که نسبت به هم مماس درونی‌اند، ۴ و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها  $32\pi$  است. طول شعاع دایره کوچک‌تر

کدام است؟

- ۶ (۱)      ۴ (۲)      ۲ (۳)      ۱ (۴)

۱۲۰- سه دایره به شعاع‌های برابر، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل زیر، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. اگر مساحت قسمت

هاشورخورده برابر  $(4\sqrt{3} - 2\pi)$  باشد، طول نخ کدام است؟



$12 - 2\pi$  (۱)

$24 - 4\pi$  (۲)

$12 + 4\pi$  (۳)

$24 + 8\pi$  (۴)

### آمار و احتمال - ۱۰ سوال

۱۲۱- برای سه مجموعه  $A = \{\emptyset\}$ ،  $B = \{\{\emptyset\}, 1\}$  و  $C = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, 1\}, 2\}$ ، کدام گزینه درست است؟

$A \in B$  و  $B \in C$ ،  $A \in C$  (۲)

$A \in B$  و  $B \in C$ ،  $A \notin C$  (۱)

$A \subseteq B$  و  $B \subseteq C$  (۴)

$A \in B$  و  $B \subseteq C$  (۳)

۱۲۲- فرض کنید  $P$  مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از ۲۰ باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر یک افراز برای  $P$  محسوب

می‌شود؟

$\{13, 17, 19\}$ ،  $\{3, 5, 7\}$ ،  $\{2, 5, 11\}$  (۲)

$\{17, 19\}$ ،  $\{7, 11, 13\}$ ،  $\{1, 3, 5\}$  (۱)

$\{2, 5\}$ ،  $\{3, 7, 11\}$ ،  $\{13, 17, 19\}$  (۴)

$\{\}$ ،  $\{5, 11, 2, 7, 13\}$ ،  $\{3, 17, 19\}$  (۳)

۱۲۳- اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+3$  عضو، ۱۹۲ عدد بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $k+1$  عضو باشد، مجموعه  $k+2$  عضو چند زیرمجموعه ۳ عضو دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۵۶ (۳) ۳۵ (۴) ۲۰

۱۲۴- کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

(۱)  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

(۲)  $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)]$

(۳)  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$

(۴)  $\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B \vee x \in C) \Rightarrow A \subseteq B \cup C$

۱۲۵- اگر داشته باشیم  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$ ، آن‌گاه کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

(۱)  $A \cap C \subseteq B \cap D$

(۲)  $A \cap C \subseteq B \cup D$

(۳)  $A \cup C \subseteq B \cup D$

(۴)  $A \cup C \subseteq B \cap D$

۱۲۶- برای دو مجموعه متمایز  $A$  و  $B$ ، اگر  $A \subseteq B$  و  $A' \subseteq B$ ، آن‌گاه کدام یک از مجموعه‌های زیر همواره تهی است؟

(۱)  $A \cap B'$

(۲)  $A \cap B$

(۳)  $B - (A' \cap B')$

(۴)  $B - (A \cup B')$

۱۲۷- حاصل عبارت  $(A \cup B) \cap (B' \cup A)$ ، همواره برابر کدام مجموعه است؟

(۱)  $A$

(۲)  $A \cup B$

(۳)  $B$

(۴)  $A \cap B$

۱۲۸- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

(۱)  $A - B = B' - A'$

(۲)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

(۳)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(۴)  $A - B = A - (A \cap B)$

۱۲۹- اگر  $(A \cup B) \cap B \subseteq C$  باشد، حاصل  $(B \cap C) \cup (B' \cup C) \cup (C - B)$  کدام است؟

(۱)  $B$

(۲)  $A$

(۳)  $C$

(۴)  $B'$

۱۳۰- اگر  $A \subseteq C \subseteq B'$  باشد، حاصل  $U - [(A' \cap C) \cap (B \cup C)]$  کدام است؟ ( $U$  مجموعه مرجع است.)

(۱)  $C$

(۲)  $C'$

(۳)  $B$

(۴)  $B'$

-۶۱

(ابراهیم نجفی)

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a \quad b < 0 \Rightarrow |b| = -b$$

$$a > 0 > b, |b| > |a| \Rightarrow a + b < 0, a - b > 0, |b| - |a| > 0$$

$$|a - b| - |a + b| - ||b| - |a|| = (a - b) - (-a - b) - (|b| - |a|)$$

$$= a - b + a + b - (-b - a) = 2a + b + a = 3a + b$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱

-۶۲

(علی شهبابی)

از ویژگی زیر در حل معادله استفاده می‌کنیم:

$$|A| = |B| \Rightarrow A = \pm B$$

$$|2x - 8| - |3x - 2| = 0 \Rightarrow |2x - 8| = |3x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 8 = 3x - 2 \Rightarrow x = -6 \\ 2x - 8 = -3x + 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های این معادله برابر با  $-6 + 2 = -4$  است.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

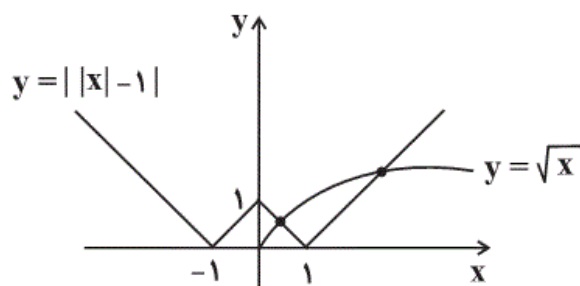
۲

۱

-۶۳

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

برای رسم نمودار تابع  $y = ||x| - 1|$ ، قسمت‌هایی از نمودار تابع  $y = |x| - 1$  را که زیر محور  $x$  ها قرار می‌گیرد، نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.



مطابق شکل نمودار توابع  $y = ||x| - 1|$  و  $y = \sqrt{x}$  در دو نقطه با همدیگر برخورد می‌کنند. پس معادله  $\sqrt{x} = ||x| - 1|$ ، ۲ جواب دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

-۶۴

(علی شهبابی)

$$4 + |2a - b| = 4a - a^2 \Rightarrow \underbrace{a^2 - 4a + 4}_{\text{اتحاد مربع}} + |2a - b| = 0$$

$$(a - 2)^2 + |2a - b| = 0$$

زمانی جمع دو عبارت نامنفی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند.

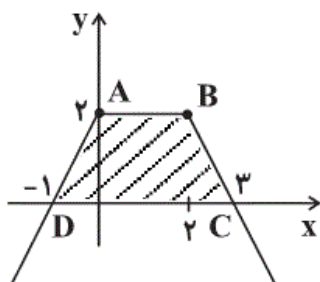
$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$2a - b = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 2 + 4 = 6$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

$$f(x) = \begin{cases} -2x+6 & ; x \geq 2 \\ 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ 2x+2 & ; x < 0 \end{cases}$$

تابع را با نقطه گذاری رسم می کنیم:



x	-1	0	2	3
y	0	2	2	0

پس سطح به وجود آمده، یک ذوزنقه به ارتفاع ۲ و قاعده‌های ۲ و ۴ است

$$S = \frac{2 \times (2 + 4)}{2} = 6$$

که مساحت آن برابر است با:

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱

-۶۶

(معمد بگیری)

$$\text{اگر } x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \text{ یا } \Rightarrow x^2 - 1 + 1 = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{قابل قبول} \\ x = 3 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$\text{اگر } x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -x^2 + 1 + 1 = 2x + 3$$

$$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

دقت کنید که جواب  $x = -1$  در محدوده  $-1 < x < 1$  نیست و قبلاً با

شرط  $x^2 - 1 \geq 0$  به دست آمده است.

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 3 + (-1) = 2$$

(مسابان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

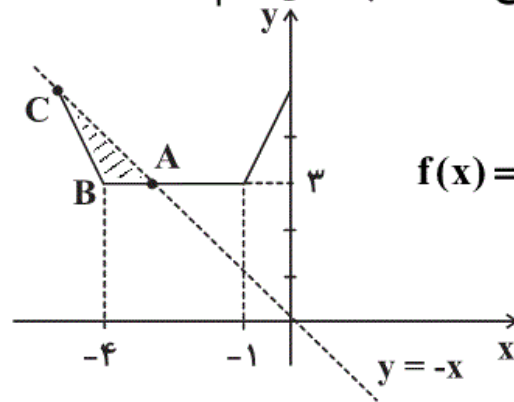
۳

۲

۱



دو نمودار را رسم کرده و محل تقاطع آن‌ها را پیدا می‌کنیم.



$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & ; x \geq -1 \\ 3 & ; -4 \leq x < -1 \\ -2x - 5 & ; x < -4 \end{cases}$$

$$|x+1| + |x+4| = -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 \Rightarrow -x-1-x-4 = -x \Rightarrow x_C = -5 \Rightarrow y_C = 5 \\ -4 < x < -1 \Rightarrow -x-1+x+4 = -x \Rightarrow x_A = -3 \Rightarrow y_A = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 < x < -1 \Rightarrow -x-1+x+4 = -x \Rightarrow x_A = -3 \Rightarrow y_A = 3 \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{(x_A - x_B)(y_C - y_B)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

(مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$|(3x-1) - (x-3)| = |2x+2| = 2|x+1|$$

می‌خواهیم این فاصله کم‌تر از ۶ باشد، پس:

$$2|x+1| < 6 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

پس بیش‌ترین مقدار  $b - a$  برابر است با:

$$2 - (-4) = 6$$

(مسئله‌های ۲۳ تا ۲۹)

 ۴

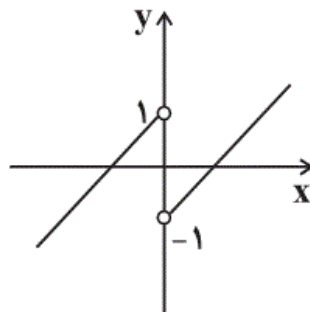
 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهبازی)

نمودار تابع  $y = x - \frac{x}{|x|}$  مطابق شکل زیر است:



$$y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x - 1 & ; x > 0 \\ x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

اگر  $-1 < k < 1$  باشد، خط  $y = k$ ، نمودار بالا را در ۲ نقطه قطع می‌کند و معادله دو جواب دارد.

(مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۷۰

(مهمترین صابری)

اگر بخواهد این عبارت  $\max$  شود باید مخرج آن  $\min$  شود، یعنی کمترین مقدار مخرج برابر با ۶ است. در این حالت داریم:

$$|x-4| + |x+a| = 6$$

$$-a < 4 \Rightarrow a > -4 \Rightarrow \text{اگر } -a < x < 4 \Rightarrow a+4=6 \Rightarrow a=2 \checkmark$$

$$-a > 4 \Rightarrow a < -4 \Rightarrow \text{اگر } 4 < x < -a \Rightarrow -a-4=6 \Rightarrow a=-10 \checkmark$$

در نتیجه کمترین مقدار  $a$ ، برابر  $-10$  است.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

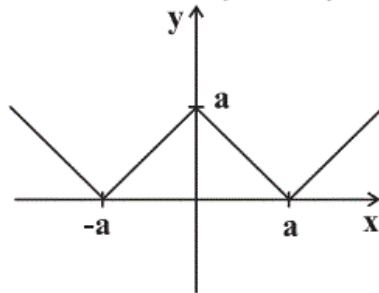
۲

۱

-۷۱

(مهمترین صابری)

نمودار تابع  $y = ||x| - a|$  با فرض  $a > 0$  به صورت زیر است.



برای آن که معادله  $||x| - a| = 3$  حداکثر سه ریشه داشته باشد، باید:

$$a \leq 3$$

از طرفی چون  $0 < a$  است، پس مجموعه مقادیر  $a$  به صورت  $\{a | 0 < a \leq 3\}$  و شامل ۳ مقدار صحیح است.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱

-۷۲

(شروین سیاح‌نیا)

نقطه وسط پاره‌خط  $AB$  روی خط  $y + x = 5$  قرار دارد. اگر این نقطه را  $M$  بنامیم، داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{m-1+3}{2}, \frac{2+m+4}{2}\right) = \left(\frac{m+2}{2}, \frac{m+6}{2}\right)$$

$$M \in d \Rightarrow \frac{m+2}{2} + \frac{m+6}{2} = 5 \Rightarrow 2m+8=10 \Rightarrow m=1$$

(مسایان ۱- صفحه ۳۲)

۴

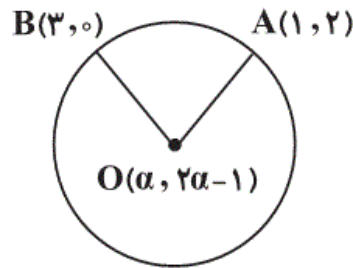
۳

۲

۱

(شروین سیاح‌نیا)

اگر  $O(\alpha, 2\alpha - 1)$  مرکز دایره باشد، فاصله آن از هر دو نقطه  $A(1, 2)$  و  $B(3, 0)$  یکسان و برابر با شعاع دایره است. بنابراین داریم:



$$\begin{aligned}
 OA = OB &\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \\
 &\Rightarrow (\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \\
 &\Rightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 4\alpha^2 + 9 - 12\alpha = \alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha^2 + 1 - 4\alpha \\
 &\Rightarrow -14\alpha = -10\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow O(0, -1)
 \end{aligned}$$

$$R = OA = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}$$

(مسئله ۱ - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(یاسین سپهر)

معادله عمودمنصف پاره‌خط مفروض را می‌نویسیم. شیب پاره‌خط واصل دو نقطه  $A(0, -3)$  و  $B(6, 15)$  برابر  $\frac{15 - (-3)}{6 - 0}$  یعنی ۳ می‌باشد. پس شیب عمودمنصف برابر  $-\frac{1}{3}$  می‌باشد. از طرفی عمودمنصف از وسط پاره‌خط  $AB$  یعنی نقطه  $(3, 6) = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{15+(-3)}{2}\right)$  می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$\text{معادله عمودمنصف: } y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 7$$

چون نقطه  $P(-12, k)$  روی عمودمنصف قرار دارد، پس در معادله  $y = -\frac{1}{3}x + 7$  صدق می‌کند.

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 7 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}(-12) + 7 \Rightarrow k = 11$$

(مسئله ۱ - صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(حسن باطنی)

ابتدا معادله ضلع AB را می نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{5 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \xrightarrow{\times 4} -3x + 4y + 7 = 0$$

طول ارتفاع CH، همان فاصله رأس C از ضلع AB است.

$$CH = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow CH = \frac{|-3(-3) + 4(1) + 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

(مسایان ۱- صفحه های ۳۳ تا ۳۶)

۴

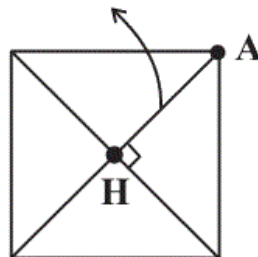
۳ ✓

۲

۱

(بابک حاجی اکبری)

$$x - y + 3 = 0$$



$$\text{اقطار عمودند} \Rightarrow mm' = -1 \Rightarrow (k + 2)\left(\frac{1}{k}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{k + 2 + k}{k} = 0 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow \text{معادلات قطر ها: } \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x - b \end{cases}$$

رأس A(1, 3) روی قطر  $y = x + 3$  قرار ندارد؛ بنابراین فاصله A از آن برابر نصف قطر است.

$$\text{نصف قطر } d = \frac{|1 - 3 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{قطر } l = 2d = \sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

(مسایان ۱- صفحه های ۳۱ تا ۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(ابراهیم نبغی)

$$ay - x = \delta \Rightarrow x - ay + \delta = 0$$

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط} \Rightarrow d_1 = \frac{|2 - a + \delta|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \frac{|7 - a|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\text{فاصله نقطه } B \text{ از خط} \Rightarrow d_2 = \frac{|4 - 7a + \delta|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = \frac{|9 - 7a|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|7 - a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|9 - 7a|}{\sqrt{1 + a^2}} \Rightarrow |7 - a| = |9 - 7a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 - a = 9 - 7a \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \\ 7 - a = 7a - 9 \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

(مسابقه ۱- صفحه‌های ۲۵ تا ۲۸ و ۲۹ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(محمد مصطفی پور)

چون دو خط موازیند و بر دایره C مماس‌اند پس فاصله دو خط، اندازه قطر دایره است.

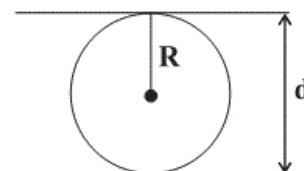
$$y = \frac{3}{4}x + 10 \Rightarrow 3x - 4y + 40 = 0$$

$$3x - 4y - 6 = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|40 - (-6)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{2}$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{9\frac{1}{2}}{2} = 4\frac{1}{4}$$

(مسابقه ۱- صفحه ۳۵)



۴ ✓

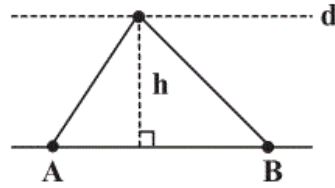
۳

۲

۱

(صالح ارشاد)

اگر طول دو رأس واقع بر خط  $y = x + 1$ ، ۱ و ۲ باشد مختصات دو نقطه به صورت  $A(1, 2)$  و  $B(2, 3)$  است. مطابق شکل زیر باید مختصات رأس سوم بر روی خطی موازی خط به معادله  $y = x + 1$  باشد، تا مساحت مثلث بدون تغییر باشد:



طول ضلع  $AB$  برابر است با:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

پس طول ارتفاع را می‌توانیم حساب کنیم:

$$S = \frac{AB \times h}{2} = 1 \xrightarrow{AB=\sqrt{2}} h = \sqrt{2}$$

پس خط  $d$  موازی خط گذرنده از  $A$  و  $B$  و به فاصله  $\sqrt{2}$  از آن است. پس اگر معادله این خط به صورت  $y = x + b$  باشد،  $b$  را طوری می‌یابیم که فاصله این دو خط موازی برابر  $\sqrt{2}$  باشد:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|b-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |b-1| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-1 = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow y = x + 3 \\ b-1 = -2 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = x - 1 \end{cases}$$

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱ و ۳۳ تا ۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$|x^2 + 4x - 60|$  برابر  $-(x^2 + 4x - 60)$  شده است، در نتیجه عبارت داخل قدرمطلق کوچک تر یا مساوی صفر است:

$$x^2 + 4x - 60 \leq 0 \Rightarrow (x+10)(x-6) \leq 0 \Rightarrow -10 \leq x \leq 6 \quad (*)$$

حال اگر نامساوی مثلثی را برای دو عبارت  $(x+10)$  و  $(x-6)$  بنویسیم شکل کلی این نامساوی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} |(x+10) + (x-6)| &\leq |x+10| + |x-6| \\ \Rightarrow |2x+4| &\leq |x+10| + |x-6| \\ \Rightarrow 2|x+2| &\leq |x+10| + |x-6| \quad (1) \end{aligned}$$

نابرابری صورت سوال:

$$2|x+2| \geq |x+10| + |x-6| \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (1) و (2)}} 2|x+2| = |x+10| + |x-6|$$

و می دانیم که در نامساوی مثلثی تساوی زمانی رخ می دهد که  $x+10$  و  $x-6$  هم علامت باشند یعنی  $(x+10)(x-6) \geq 0$  که همان  $x \leq -10$  یا  $x \geq 6$  است. با توجه به محدوده ای از  $x$  که در (\*) به دست آوردیم فقط  $x = -10$  و  $x = 6$  در این نامساوی صدق می کند.

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

وتر CD به نسبت ۱ به ۶ تقسیم شده است. پس:

$$\frac{CM}{DM} = \frac{1}{6}, \quad CD = 14 \Rightarrow CM = 2, \quad DM = 12$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$CM \cdot DM = BM \cdot AM$$

$$\Rightarrow BM \cdot AM = 2 \times 12 = 24$$

$$AB = 10 \Rightarrow AM + BM = 10$$

$$\begin{cases} AM + BM = 10 \\ AM \cdot BM = 24 \end{cases}$$

$$(AM + BM)^2 - 4AM \cdot BM = (AM - BM)^2 = 4$$

$$\Rightarrow |AM - BM| = 2$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مماس‌های رسم شده از A بر دایره کوچک‌تر با هم مساوی‌اند، پس:

$$AB = AD \Rightarrow AB = x + 4$$

با استفاده از روابط طولی در دایره بزرگ‌تر داریم:

$$AB^2 = AC \cdot AE \Rightarrow (x + 4)^2 = 4(x + 12)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 & \text{غ ق} \\ x = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$MA \times MB = MD \times ME = (MO - r)(MO + r)$$

$$\Rightarrow 6 \times 12 = (MO^2 - 6^2) \Rightarrow MO = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علیرضا ادری)

-۱۰۴

از آنجایی که  $NO = MN = r$  پس  $MT$  و  $MT'$  بر دایره  $C$  مماس

هستند. پس  $\widehat{OTM} = \widehat{OT'M} = 90^\circ$ . در مثلث قائم‌الزاویه  $OTM$ ،

$OT$  برابر  $r$  یعنی نصف وتر است. پس  $\widehat{TMO} = 30^\circ$ . به طریق مشابه

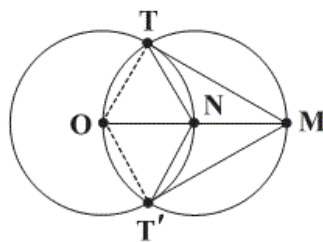
می‌توان گفت  $\widehat{T'MO} = 30^\circ$ . بنابراین در دایره دوم داریم:

$$\frac{\widehat{TOT'}}{2} = \widehat{TMT'} \Rightarrow \widehat{TOT'} = 120^\circ$$

از آنجا که زاویه  $\widehat{TNT'}$ ، زاویه مرکزی روبه‌روی کمان  $TOT'$  است،

$$\widehat{TNT'} = 120^\circ$$

نتیجه می‌شود:



(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

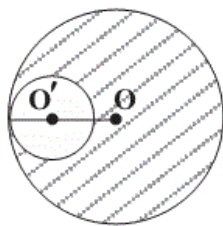
۴

۳ ✓

۲

۱

اگر شعاع دایره بزرگ را برابر  $R$  و شعاع دایره کوچک را برابر  $r$  در نظر بگیریم، داریم:



$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \quad (1)$$

مساحت ناحیه هاشورخورده:

$$OO' = R - r \quad (2) \quad \text{از طرفی دو دایره مماس درون‌اند، بنابراین:}$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

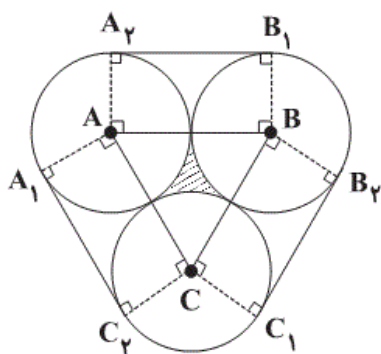
$$\pi(R - r)(R + r) = 32\pi \Rightarrow 4(R + r) = 32 \Rightarrow R + r = 8$$

۴

۳ ✓

۲

۱



فرض می‌کنیم شعاع دایره‌ها برابر  $r$  باشد. پاره‌خط‌های  $AA_1$  و  $BB_1$  بر  $A_1B_1$  عمود هستند. پس با هم موازی‌اند و هر دو برابر  $r$  هستند. پس چهارضلعی  $ABB_1A_1$  مستطیل است و بنابراین داریم:

$$A_1B_1 = AB = 2r$$

$$BC = AC = 2r$$

و به طریق مشابه داریم:

برای زاویه  $A_1AA_2$  داریم:

$$A_1 \hat{A} A_2 = 36^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{B} \hat{A} C = 36^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 6^\circ = 12^\circ$$

بنابراین طول کمان  $A_1 A_2$  برابر  $\frac{12^\circ}{36^\circ}$  محیط دایره است. پس برای

مجموع طول کمان‌های  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2$  نتیجه می‌گیریم که

برابر محیط یک دایره کامل است:  $2\pi r =$  محیط دایره

پس طول نخ برابر  $(2r + 2r + 2r + 2\pi r)$  است.

برای مساحت هاشورخورده داریم:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\text{هاشورخورده}} + 3S_{\text{قطاع } 60^\circ \text{ دایره}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 = \sqrt{3} r^2$$

$$S_{\text{قطاع } 60^\circ \text{ دایره}} = \frac{S_{\text{دایره}}}{6} = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = \sqrt{3} r^2 - 3\left(\frac{\pi r^2}{6}\right) = \sqrt{3} r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

۴

۳ ✓

۲

۱

از آنجایی که تنها ۲ مماس مشترک قابل رسم است یعنی:

$$O_1O_2 < r_1 + r_2$$

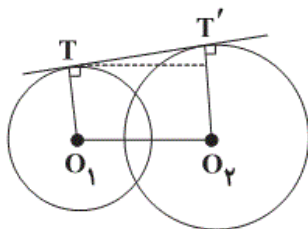
حال ابتدا طول مماس مشترک خارجی دو دایره را در حالتی که نسبت به

هم مماس خارج اند، به دست می آوریم:

$$TT' = \sqrt{(O_1O_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{(10)^2 - 2^2} = \sqrt{96}$$

حال از آنجایی که دو دایره نسبت به هم متداخل اند، لذا طول مماس

مشترک آن‌ها نسبت به حالت قبلی کم تر خواهد شد.



$$TT' < 4\sqrt{6}$$

در نتیجه:

توجه کنید که در بین گزینه‌ها، تنها عدد  $\sqrt{92} = 2\sqrt{23}$  قابل قبول است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$S_{AOBO'} = \frac{1}{2} OO' \cdot AB \Rightarrow ۷۲ = \frac{1}{2} \times ۱۶ \times AB \Rightarrow AB = ۹$$

بنابراین:

$$PA \cdot PB = PT^2 \Rightarrow PA(PA + AB) = ۶^2 \Rightarrow PA^2 + ۹ \times PA - ۳۶ = 0 \\ \Rightarrow (PA + ۱۲)(PA - ۳) = 0 \Rightarrow PA = ۳$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۳)

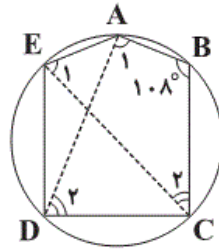
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به فرض سوال می توان نتیجه گرفت که پنج ضلعی  $ABCDE$ ، محاطی است.



از طرفی داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540^\circ \Rightarrow 18\alpha + 108^\circ = 540^\circ \Rightarrow \alpha = 24^\circ$$

حال در چهارضلعی محاطی  $ABCE$  داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{E}_1 = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{E}_1 = 72^\circ, \hat{C}_2 = 36^\circ$$

همچنین در چهارضلعی محاطی  $ABCD$  داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = 108^\circ, \hat{D}_2 = 72^\circ$$

بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\hat{A}_1}{\hat{C}_2} = \frac{108^\circ}{36^\circ} = 3$$

(هندسه ۲- صفحه های ۲۴ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱

$$S = r \cdot P \Rightarrow P = \frac{S}{r} \Rightarrow P = \frac{84}{3} = 28$$

در نتیجه مجموع طول اضلاع یا به عبارت دیگر محیط این چندضلعی برابر

$$2P = 2 \times 28 = 56 \quad \text{است با:}$$

(هنر سه ۲ - صفحه ۲۵)

۴

۳

۲

۱

(ابراهیم نبفی)

-۸۱

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a \quad b < 0 \Rightarrow |b| = -b$$

$$a > 0 > b, |b| > |a| \Rightarrow a + b < 0, a - b > 0, |b| - |a| > 0$$

$$|a - b| - |a + b| - ||b| - |a|| = (a - b) - (-a - b) - (|b| - |a|) \\ = a - b + a + b - (-b - a) = 2a + b + a = 3a + b$$

(مسئله ۱ - صفحه‌های ۲۳ و ۲۵)

۴

۳

۲

۱

(علی شورابی)

-۸۲

از ویژگی زیر در حل معادله استفاده می‌کنیم:

$$|A| = |B| \Rightarrow A = \pm B$$

$$|2x - 8| - |3x - 2| = 0 \Rightarrow |2x - 8| = |3x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 8 = 3x - 2 \Rightarrow x = -6 \\ 2x - 8 = -3x + 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های این معادله برابر با  $-6 + 2 = -4$  است.

(مسئله ۱ - صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

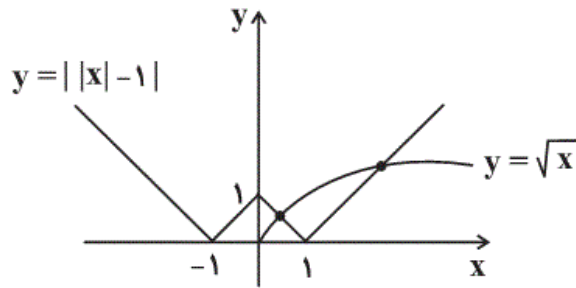
۲

۱

-۸۳

(مهمدمصطفی ابراهیمی)

برای رسم نمودار تابع  $y = ||x| - 1|$ ، قسمت‌هایی از نمودار تابع  $y = |x| - 1$  را که زیر محور  $x$  قرار می‌گیرد، نسبت به محور  $x$  ها قرینه می‌کنیم.



مطابق شکل نمودار توابع  $y = ||x| - 1|$  و  $y = \sqrt{x}$  در دو نقطه با همدیگر برخورد می‌کنند. پس معادله  $\sqrt{x} = ||x| - 1|$ ، ۲ جواب دارد. (مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۸۴

(علی شوراچی)

$$4 + |2a - b| = 4a - a^2 \Rightarrow \underbrace{a^2 - 4a + 4}_{\text{اتحاد مربع}} + |2a - b| = 0$$

$$(a - 2)^2 + |2a - b| = 0$$

زمانی جمع دو عبارت نامنفی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند.

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$2a - b = 0 \Rightarrow 4 - b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 2 + 4 = 6$$

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\frac{\sqrt{A^2} = |A|}{\rightarrow} |3|x| - 2| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3|x| - 2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 3|x| - 2 = -1 \Rightarrow |x| = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس این معادله، ۴ جواب حقیقی دارد.

(مسئله‌ها ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی شهبازی)

$$\frac{x+k}{x(x-2)} + \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+k)(x-1) + x(x-2)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad x \neq 1, 2, 0$$

$$x^2 + kx - x - k + x^2 - 2x = x \Rightarrow 2x^2 + (k-4)x - k = 0$$

مجموع مربعات ریشه‌های معادله درجه دوم از

رابطه  $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$  به دست می‌آید، پس:

$$S^2 - 2P = \frac{13}{4} \Rightarrow \left(\frac{-(k-4)}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{k}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2 - 8k + 16}{4} + k = \frac{13}{4} \xrightarrow{\times 4} k^2 - 8k + 16 + 4k - 13 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow (k-1)(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 & \text{ق ق} \\ k=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار به دست آمده دلتای معادله عددی مثبت است، و در هیچ کدام از این حالت‌ها جواب‌های  $x = 0, 1, 2$  به دست نمی‌آید. پس هر دو مقدار قابل قبول است.

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۴

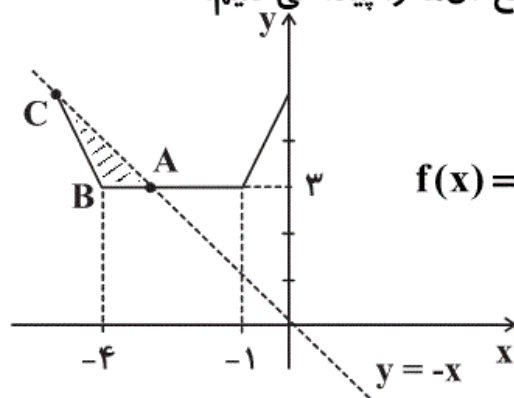
۳✓

۲

۱

(مهمربضا غریب دوست)

دو نمودار را رسم کرده و محل تقاطع آن‌ها را پیدا می‌کنیم.



$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & ; x \geq -1 \\ 3 & ; -4 \leq x < -1 \\ -2x-5 & ; x < -4 \end{cases}$$

$$|x+1| + |x+4| = -x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -4 \Rightarrow -x-1-x-4 = -x \Rightarrow x_C = -5 \text{ ق ق} \Rightarrow y_C = 5 \\ -4 < x < -1 \Rightarrow -x-1+x+4 = -x \Rightarrow x_A = -3 \Rightarrow y_A = 3 \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{(x_A - x_B)(y_C - y_B)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

(مسئله ۱- صفحه‌های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱



(سینا مسمرپور)

$$|(3x-1)-(x-3)| = |2x+2| = 2|x+1|$$

می خواهیم حاصل کم تر از ۶ باشد، پس:

$$2|x+1| < 6 \Rightarrow |x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

پس بیش ترین مقدار  $b-a$  برابر است با:

$$2 - (-4) = 6$$

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

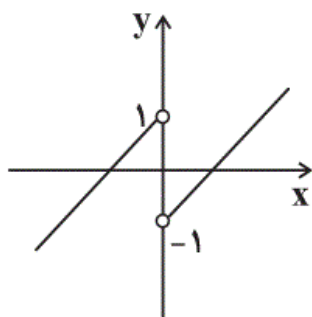
۴

۳✓

۲

۱

(علی شهرابی)

نمودار تابع  $y = x - \frac{x}{|x|}$  مطابق شکل زیر است:

$$y = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

اگر  $-1 < k < 1$  باشد، خط  $y = k$ ، نمودار بالا را در ۲ نقطه قطع می کند و معادله دو جواب دارد.

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱✓

(مهمربین صابری)

اگر بخواهد این عبارت  $\max$  شود باید مخرج آن  $\min$  شود، یعنی کم ترین مقدار مخرج برابر با ۶ است. در این حالت داریم:

$$|x-4| + |x+a| = 6$$

$$-a < 4 \Rightarrow a > -4 \Rightarrow \text{اگر } -a < x < 4 \Rightarrow a+4 = 6 \Rightarrow a = 2 \checkmark$$

$$-a > 4 \Rightarrow a < -4 \Rightarrow \text{اگر } 4 < x < -a \Rightarrow -a-4 = 6 \Rightarrow a = -10 \checkmark$$

در نتیجه کم ترین مقدار  $a$ ، برابر  $-10$  است.

(مسایان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

۴✓

۳

۲

۱

ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق صفر و ۲ است. با بازه‌بندی معادله را حل می‌کنیم:

$$x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0: \quad x^2 - 2x + x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ x=-1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2: \quad -x^2 + 2x + x = 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{(تکراری)} \\ x=1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس این معادله ۳ جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$2 + (-1) + 1 = 2$$

(مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای آن که معادله  $||x| - a| = 3$  حداکثر سه ریشه داشته باشد، باید:

$$a \leq 3$$

از طرفی چون  $a > 0$  است، پس مجموعه مقادیر  $a$  به صورت  $\{a \mid 0 < a \leq 3\}$  و شامل ۳ مقدار صحیح است.

(مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سپهر حقیقت افشار)

$$\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$\xrightarrow{x \neq 1, 4} 3\sqrt{x}(x-1) = \sqrt{x}(x-1)(x-4)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(x-1)(x-7) = 0 \xrightarrow{x \neq 1} \begin{cases} x=0 \\ x=7 \end{cases}$$

(مسئله‌های ۱۷ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمرسین صابری)

با فرض  $x \neq -1$  و  $x \neq -2$  و ضرب طرفین معادله در  $(2x+2)(3x+6)$  داریم:

$$2(x+1)(x^2 - x + 1) = 3(x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\Rightarrow 2(x^3 + 1) = 3(x^3 + 8) \Rightarrow 2x^3 + 2 = 3x^3 + 24$$

$$\Rightarrow x^3 = -22 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-22}$$

بنابراین معادله فقط یک ریشه منفی دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

ابتدا معادله  $x + \sqrt{x} = 6$  را حل می‌کنیم تا تعداد جواب‌های آن یعنی  $k$  به دست آید.

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$(\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 9$$

ولی با استفاده از جای‌گذاری متوجه می‌شویم که  $x = 9$  جواب معادله نیست پس معادله یک جواب دارد. یعنی  $k = 1$ . حال معادله دوم را حل می‌کنیم.

$$\sqrt{x - \sqrt{x+1}} = k \xrightarrow{k=1} \sqrt{x - \sqrt{x+1}} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$x - \sqrt{x+1} = 1 \Rightarrow (x-1) = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 3$$

ولی  $x = 0$  در معادله صدق نمی‌کند، پس معادله فقط یک جواب دارد.

(مسایان ۱- صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمد مصطفی ابراهیمی)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+a} - \sqrt{2-x} &= 1 \xrightarrow{x=1} \sqrt{3+a-1} - 1 = 1 \Rightarrow 3+a=4 \Rightarrow a=1 \\ \sqrt{3x+1} &= \sqrt{2-x} + 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3x+1 = 2-x+1+2\sqrt{2-x} \\ \Rightarrow 4x-2 &= 2\sqrt{2-x} \xrightarrow{\div 2} 2x-1 = \sqrt{2-x} \xrightarrow{\text{توان } 2} \\ 4x^2 - 4x + 1 &= 2-x \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Rightarrow (x-1)(4x+1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=-\frac{1}{4} & \text{غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{4}$  در معادله صدق نمی کند، پس قابل قبول نیست.

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2-x} = 1 \xrightarrow{x=-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

پس معادله فقط یک جواب  $x=1$  را دارد.

(مسئله ۱- صفحه های ۲۰ تا ۲۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(معمد پورامیری)

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ میزان نمک در محلول اولیه بر حسب کیلوگرم}$$

فرض کنیم  $x$  کیلوگرم آب باید تبخیر شود تا محلول  $204$  کیلوگرمی به غلظت  $6$  درصد برسد. بنابراین داریم:

$$\frac{8+4}{204-x} = \frac{6}{100} \Rightarrow \frac{12}{204-x} = \frac{6}{100}$$

$$\Rightarrow 6(204-x) = 12 \times 100 \Rightarrow 204-x = 200 \Rightarrow x = 4 \text{ کیلوگرم}$$

(مسئله ۱- صفحه های ۱۷ تا ۱۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

معادله را ساده تر می نویسیم:

$$3x^2 + \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 5x^2 + 5x + 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 2x^2 + 5x + 5$$

با فرض  $t = 2x^2 + 5x + 5$ ، داریم:

$$\sqrt{t+2} = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 & \text{ق ق} \\ t=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

با جای گذاری  $t=2$  در  $2x^2 + 5x + 5 = t$ ، داریم:

$$2x^2 + 5x + 5 = 2 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

پس حاصل ضرب ریشه های حقیقی این معادله  $\frac{3}{2}$  است. البته چون

می دانستیم جواب های معادله  $2x^2 + 5x + 3 = 0$ ، قابل قبول اند،

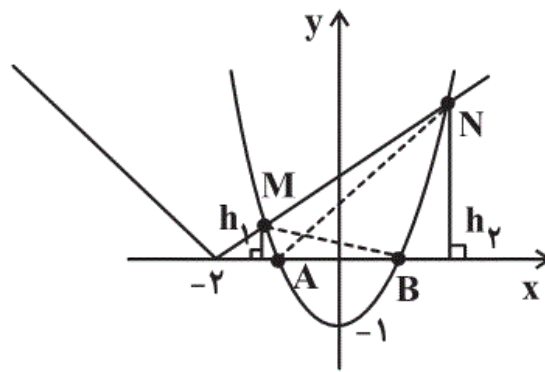
می توانستیم از ضرب ریشه های معادله درجه دوم هم استفاده کنیم:

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\frac{S_{\Delta ANB}}{S_{\Delta AMB}} = \frac{h_2}{h_1}$$

$h_1$  و  $h_2$  به ترتیب برابر با عرض نقاط  $M$  و  $N$  می‌باشند. لذا کفایت مختصات نقاط تلاقی دو نمودار را بیابیم:

$$|x+2| = 2x^2 - 1 \xrightarrow{x > -2} x+2 = 2x^2 - 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(-1, 1) \\ N\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

$$\frac{S_{\Delta ANB}}{S_{\Delta AMB}} = \frac{\frac{7}{2}}{1} = \frac{7}{2} = 3.5$$

بنابراین:

(مسئله ۱- صفحه‌های ۱۴ و ۲۳ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱

$|x^2 + 4x - 60|$  برابر  $-(x^2 + 4x - 60)$  شده است، در نتیجه عبارت داخل قدرمطلق کوچک تر یا مساوی صفر است:

$$x^2 + 4x - 60 \leq 0 \Rightarrow (x+10)(x-6) \leq 0 \Rightarrow -10 \leq x \leq 6 \quad (*)$$

حال اگر نامساوی مثلثی را برای دو عبارت  $(x+10)$  و  $(x-6)$  بنویسیم شکل کلی این نامساوی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} |(x+10) + (x-6)| &\leq |x+10| + |x-6| \\ \Rightarrow |2x+4| &\leq |x+10| + |x-6| \\ \Rightarrow 2|x+2| &\leq |x+10| + |x-6| \quad (1) \end{aligned}$$

نابرابری صورت سوال:

$$2|x+2| \geq |x+10| + |x-6| \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (1) و (2)}} 2|x+2| = |x+10| + |x-6|$$

و می دانیم که در نامساوی مثلثی تساوی زمانی رخ می دهد که  $x+10$  و  $x-6$  هم علامت باشند یعنی  $(x+10)(x-6) \geq 0$  که همان  $x \leq -10$  یا  $x \geq 6$  است. با توجه به محدوده ای از  $x$  که در  $(*)$  به دست آوردیم فقط  $x = -10$  و  $x = 6$  در این نامساوی صدق می کند.

(مسابان ۱- صفحه های ۲۳ تا ۲۸)

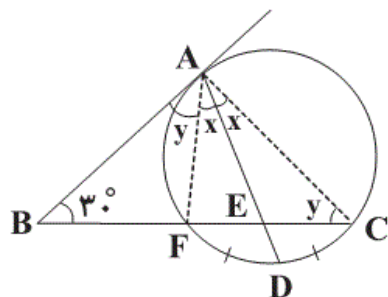
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از A به نقاط F و C وصل می‌کنیم. آن‌گاه:



$$\begin{cases} \widehat{FAE} = \widehat{EAC} = x \\ \widehat{BAF} = y \end{cases}$$

$$\widehat{ACF} = \widehat{BAF} = \frac{\widehat{AF}}{2} = y$$

در نتیجه:

بنابراین، در مثلث ABC داریم:

$$30^\circ + (y + 2x) + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 75^\circ$$

$\widehat{AEC}$  زاویه خارجی مثلث ABE است:

$$\widehat{AEC} = x + y + 30^\circ = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱

با فرض  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \alpha$  داریم:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2} = \frac{(36^\circ - 2\alpha) - \alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BOC \text{ متساوی‌الاضلاع است.} \Rightarrow BC = 1$$

(هندسه ۲ - صفحه ۱۵)

۴

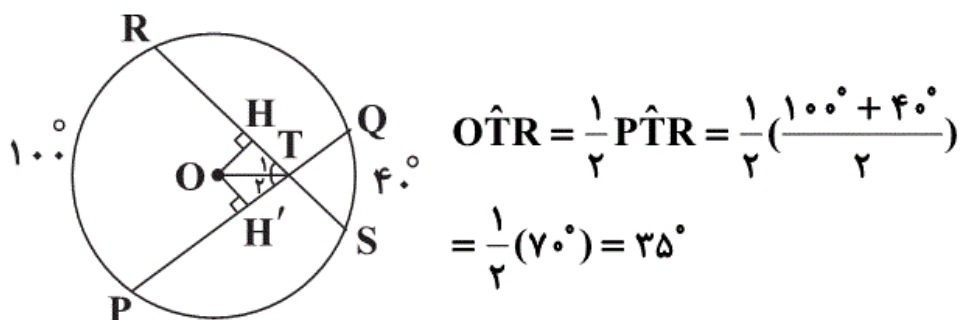
۳

۲

۱



از O به وترهای RS و PQ عمود می‌کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' نام‌گذاری می‌کنیم. چون وترهای RS و PQ برابرند پس فاصله آنها از مرکز برابر است یعنی  $OH = OH'$ . دو مثلث قائم‌الزاویه OHT و OH'T به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند (وتر OT و اضلاع OH و OH'). پس  $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$  و در نتیجه OT نیمساز زاویه PTR است. پس:



$$\begin{aligned} \hat{O}TR &= \frac{1}{2} \hat{P}TR = \frac{1}{2} \left( \frac{100^\circ + 40^\circ}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (70^\circ) = 35^\circ \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

وتر CD به نسبت ۱ به ۶ تقسیم شده است. پس:

$$\frac{CM}{DM} = \frac{1}{6}, \quad CD = 14 \Rightarrow CM = 2, \quad DM = 12$$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$CM \cdot DM = BM \cdot AM$$

$$\Rightarrow BM \cdot AM = 2 \times 12 = 24$$

$$AB = 10 \Rightarrow AM + BM = 10$$

$$\begin{cases} AM + BM = 10 \\ AM \cdot BM = 24 \end{cases}$$

$$(AM + BM)^2 - 4AM \cdot BM = (AM - BM)^2 = 4$$

$$\Rightarrow |AM - BM| = 2$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ و ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با استفاده از روابط طولی در دایره بزرگ‌تر داریم:

$$AB^2 = AC \cdot AE \Rightarrow (x + 4)^2 = 4(x + 12)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 32 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -8 \text{ غ ق} \\ x = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم که مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای خارج دایره طول‌های مساوی دارند. لذا:  $PA = PB = ۱۰$ . در نتیجه، طبق قضیه فیثاغورس:

$$BC = \sqrt{PB^2 - PC^2} = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$

اکنون بنابر روابط طولی در دایره، داریم:

$$CA^2 = CD \times CB \Rightarrow ۴^2 = CD \times ۸ \Rightarrow CD = ۲$$

(هنر سه ۲ - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

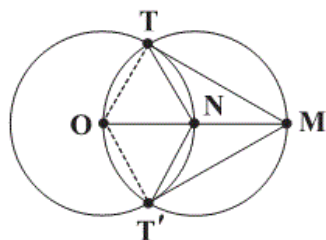
از آنجایی که  $NO = MN = r$  پس  $MT$  و  $MT'$  بر دایره  $C$  مماس هستند. پس  $\hat{OTM} = \hat{OT'M} = ۹۰^\circ$ . در مثلث قائم‌الزاویه  $OTM$ ،  $OT$  برابر  $r$  یعنی نصف وتر است. پس  $\hat{TMO} = ۳۰^\circ$ . به طریق مشابه می‌توان گفت  $\hat{T'MO} = ۳۰^\circ$ . بنابراین در دایره دوم داریم:

$$\frac{\widehat{TOT'}}{۲} = \hat{TMT'} \Rightarrow \widehat{TOT'} = ۱۲۰^\circ$$

از آنجا که زاویه  $TNT'$ ، زاویه مرکزی روبه‌روی کمان  $TOT'$  است،

$$\hat{TNT} = ۱۲۰^\circ$$

نتیجه می‌شود:



(هنر سه ۲ - صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

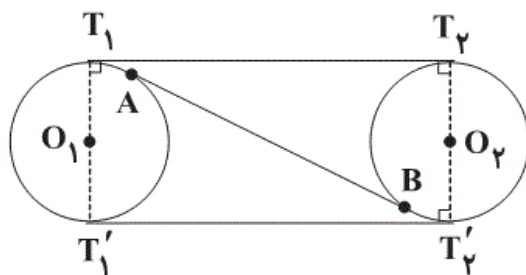
۴

۳ ✓

۲

۱

(سجاد عابد)



طول مماس مشترک داخلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{17^2 - (2r)^2} = 15 \Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r = 4$$

چهارضلعی  $T_1 T_2 T_2' T_1'$  مستطیل بوده و مساحتش برابر است با:

$$S = (2r)d = 136$$

(هنر سه ۲ - صفحه‌های ۲۱ و ۲۲)

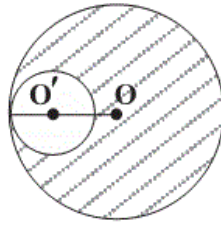
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر شعاع دایره بزرگ را برابر  $R$  و شعاع دایره کوچک را برابر  $r$  در نظر بگیریم، داریم:



$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \quad (1)$$

مساحت ناحیه هاشورخورده

$$OO' = R - r \quad (2)$$

از طرفی دو دایره مماس درون‌اند، بنابراین:

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\pi(R - r)(R + r) = 32\pi \Rightarrow 4(R + r) = 32 \Rightarrow R + r = 8$$

$$\begin{cases} R + r = 8 \\ R - r = 4 \end{cases} \Rightarrow R = 6, r = 2$$

بنابراین:

(هنر سه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

فرض می‌کنیم شعاع دایره‌ها برابر  $r$  باشد. پاره‌خط‌های  $AA_2$  و  $BB_1$

بر  $A_2B_1$  عمود هستند. پس با هم موازی‌اند و هر دو برابر  $r$  هستند. پس

چهارضلعی  $ABB_1A_2$  مستطیل است و بنابراین داریم:

$$A_2B_1 = AB = 2r$$

$$BC = AC = 2r$$

و به طریق مشابه داریم:

برای زاویه  $A_1AA_2$  داریم:

$$A_1\hat{A}A_2 = 36^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \hat{B}AC = 36^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 6^\circ = 120^\circ$$

بنابراین طول کمان  $A_1A_2$  برابر  $\frac{120^\circ}{360^\circ}$  محیط دایره است. پس برای

مجموع طول کمان‌های  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$  نتیجه می‌گیریم که

برابر محیط یک دایره کامل است:  $2\pi r =$  محیط دایره

پس طول نخ برابر  $(2r + 2r + 2r + 2\pi r)$  است.

برای مساحت هاشورخورده داریم:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\text{هاشورخورده}} + 3S_{\text{قطاع } 60^\circ \text{ دایره}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 = \sqrt{3}r^2$$

$$S_{\text{قطاع } 60^\circ \text{ دایره}} = \frac{S_{\text{دایره}}}{6} = \frac{\pi r^2}{6}$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}} = \sqrt{3}r^2 - 3\left(\frac{\pi r^2}{6}\right) = \sqrt{3}r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

با توجه به این که مساحت هاشورخورده برابر  $(4\sqrt{3} - 2\pi)$  است، شعاع

برابر ۲ می‌شود و طول نخ برابر  $(12 + 4\pi)$  خواهد بود.

(هنرسه ۲ - صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

۴

۳

۲

۱

با استفاده از فرض مسئله داریم:

$$\{\emptyset\} \in B \Rightarrow A \in B$$

$$\{\emptyset\} \in C \Rightarrow A \in C$$

$$\{\{\emptyset\}, 1\} \in C \Rightarrow B \in C$$

$$1 \in B, 1 \notin C \Rightarrow B \not\subseteq C$$

$$\emptyset \in A, \emptyset \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B$$

(آمار و احتمال - صفحه ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

در گزینه «۴» هر یک از سه شرط لازم برای افراز برقرار است. چون:

الف) هر یک از سه مجموعه ناتهی هستند.

ب) اشتراک دوبه دوی آنها تهی است.

ج) اجتماع سه مجموعه برابر مجموعه P است.

(آمار و احتمال - صفحه ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

$$2^{k+3} = 2^{k+1} + 192 \Rightarrow 8 \times 2^k - 2 \times 2^k = 192$$

$$\Rightarrow 6 \times 2^k = 192 \Rightarrow 2^k = 32 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow k + 2 = 7$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه ۷ عضوی برابر است با:

$$\binom{7}{3} = 35$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعریف تساوی در مجموعه‌ها به صورت زیر است:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

گزاره دوشروطی داده شده در گزینه «۲» نادرست است، چون از رابطه  $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ ، نمی‌توان به رابطه  $A = B$  رسید.

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از مثال نقض استفاده می‌کنیم:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\} \\ C = \{2\}, D = \{2, 4\} \Rightarrow A \cup C \not\subseteq B \cap D$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A \cap B' = A \cap \emptyset = \emptyset$$

گزینه «۱»:

$$A \cap B = A$$

گزینه «۲»:

$$B - (A' \cap B') = B - (A' \cap \emptyset) = B - \emptyset = B = U$$

گزینه «۳»:

$$B - (A \cup B') = B - (A \cup \emptyset) = B - A = U - A = A'$$

گزینه «۴»:

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = A$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



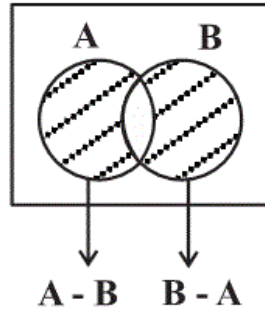
گزینه «۱»: صحیح است.

$$A - B = A \cap B' = B' \cap A = B' - A'$$

گزینه «۲»: نادرست است.

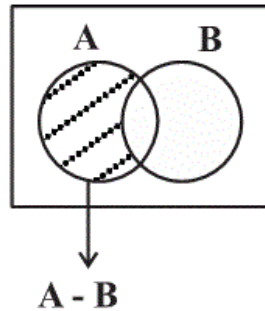
$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A - C) &= (A \cap B') \cup (A \cap C') \\ &= A \cap (B' \cup C') = A \cap (B \cap C)' = A - (B \cap C) \end{aligned}$$

گزینه «۳»: صحیح است.



$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

گزینه «۴»: صحیح است.



$$A - B = A - (A \cap B)$$

A - B  
(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap B &\subseteq C \Rightarrow B \subseteq C \\ (B \cap C) \cup (B' \cup C)' \cup (C - B) \\ &= [(B \cap C) \cup (B \cap C')] \cup (C - B) = [B \cap \underbrace{(C \cup C')}_{U}] \cup (C - B) \\ &= B \cup (C \cap B') = (B \cup C) \cap \underbrace{(B \cup B')}_{U} = B \cup C = C \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - صفحه‌های ۲۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

اگر از  $A \subseteq C' \subseteq B'$  متمم بگیریم رابطه  $B \subseteq C \subseteq A'$  به دست می آید.

$$U - [\underbrace{(A' \cap C)}_C \cap \underbrace{(B \cup C)}_C] = U - C = C'$$

(آمار و احتمال - صفحه های ۲۲ تا ۳۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱