



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

دیفرانسیل و انتگرال - ۱۰ سوال

۸۱- دنباله $a_n = \left(1 + \frac{3^n}{6^{n+1}}\right)^{2^n}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) e^6

(۲) $\sqrt[6]{e}$

(۳) e^3

(۴) $\sqrt[3]{e}$

آزمون ۲ آذر

۸۲- حد دنباله $\left\{ \frac{7^{-n} + 3^{-2n+1}}{7^{-n+1} + 3^{-2n}} \right\}$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{1}{7}$

(۳) ۷

(۴) $\frac{1}{3}$

آزمون ۲ آذر

۸۳- اگر $a_n = \frac{2n-5}{3n-2}$ باشد، دنباله $b_n = a_n a_{n+1}$ چند جمله منفی دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

آزمون ۲ آذر

۸۴- اگر $a_n = \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right]$ و $b_n = \frac{3^n}{2^n n^2}$ باشد، $a_n + b_n$ چگونه است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۱) همگرا و کران دار

(۲) همگرا و بی کران

(۳) واگرا و کران دار

(۴) واگرا و بی کران

آزمون ۲ آذر

۸۵- اگر $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ و $b_n = \tan\frac{(2n+1)\pi}{4}$ باشد، کدام دنباله همگراست؟

- (۱) $\{a_n \times b_n\}$ (۲) $\{a_n^2 + b_n^2\}$ (۳) $\{a_{2n-1} \times b_n\}$ (۴) $\{a_n + b_n\}$

آزمون ۲ آذر

۸۶- برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x} + \left[-\frac{1}{x} \right] \right]$ در $x=0$ ، کدام دنباله‌ها مناسب هستند؟ ($[\]$)، نماد جزء صحیح

است.)

- (۱) $\left\{ \frac{2}{n} \right\}, \left\{ -\frac{2}{n} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{1}{n+1} \right\}, \left\{ \frac{1}{n+0.05} \right\}$
- (۳) $\left\{ \frac{1}{n} \right\}, \left\{ -\frac{1}{2n} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}, \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$

آزمون ۲ آذر

۸۷- کدام یک از حدود زیر وجود ندارد؟ ($[\]$)، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{[x]}$
- (۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0} x[x]$

آزمون ۲ آذر

۸۸- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos([x] + [-x])}{\cos x}$ کدام است؟ ($[\]$)، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱
- (۳) -۱ (۴) حد ندارد.

آزمون ۲ آذر

۸۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left([2x - |x|] + x \right)$ کدام است؟ ($[\]$)، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) -۲
- (۳) -۴ (۴) -۵

آزمون ۲ آذر

۹۰- حاصل حد چپ تابع $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2}}$ در نقطه $x = a$ برابر ۶ می‌باشد. a کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲)

۳ (۳) -۳ (۴)

آزمون ۲ آذر

هندسه‌ی تحلیلی - ۱۰ سوال -

۱۱۱- نقطه $O' = (1, 2)$ مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - mx + 2ny + 1 = 0$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۱) $\sqrt{5}$ (۲)

۲ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۲- اگر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله نقطه $P = (4, -1)$ از نقاط دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$ به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشد

(P خارج دایره است)، مقدار m برابر کدام است؟

۲ (۱) ۱ (۲)

۴ (۳) ۴ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۳- دو دایره $C: (x+3)^2 + y^2 - (2m+1)^2 = 0$ و $C': x^2 + y^2 - 8y - m^2 + 16 = 0$ در دو نقطه متقاطع‌اند. اگر $m > 0$ باشد،

آنگاه مقادیر ممکن برای m کدام است؟

$m > \frac{4}{3}$ (۱) $0 < m < 4$ (۲)

$\frac{4}{3} < m < 4$ (۳) $m > 4$ یا $0 < m < \frac{4}{3}$ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۴- اگر نقطه $A = (1, 2)$ خارج دایره $C: x^2 + y^2 + 2x - 4y + m = 0$ واقع باشد، مقادیر m به کدام صورت است؟

$m < -1$ (۱) $-5 < m < -1$ (۲)

$m > 1$ (۳) $1 < m < 5$ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۵- نقطه $P = (x, y)$ با مختصات مثبت، به گونه‌ای حرکت می‌کند که مربع فاصله آن از نقطه $A = (0, 4)$ ، دو برابر مجموع فواصل

آن از محورهای مختصات است. در مکان هندسی نقطه P ، بیش‌ترین فاصله دو نقطه از یکدیگر کدام است؟

۸ (۱) $2\sqrt{10}$ (۲)

$8\sqrt{2}$ (۳) ۲۰ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۶- دایره‌ای از دو نقطه $A = (4, -5)$ و $B = (-2, 3)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $D: 3x + y - 17 = 0$ قرار دارد. شعاع این دایره

کدام است؟

۶ (۱) $3\sqrt{5}$ (۲)

$5\sqrt{2}$ (۳) ۸ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۷- دو دایره به معادله‌های $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y = a$ و $C_2: (x-5)^2 = 4y - y^2 - 3$ مماس خارج هستند. a کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲)

-۱ (۳) ۴ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۸- طول کوتاه‌ترین وتر گذرا از نقطه $M = (3, -1)$ در دایره $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ ، کدام است؟

$8\sqrt{2}$ (۱) ۳ (۲)

۶ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۱۹- طول بزرگ‌ترین مماسی که از نقاط واقع بر دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 14$ ، بر دایره $C': x^2 + y^2 - 2x = 0$ رسم می‌شود،

کدام است؟

۴ (۱) ۲ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴)

آزمون ۲ آذر

۱۲۰- مرکز دایره C روی محور y ها واقع بوده و این دایره در نقطه A = (1, 3) بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$ مماس است.

شعاع دایره C کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲)
۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

آزمون ۲ آذر

ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال -

۱۲۱- سه عدد صحیح به صورت $a = 6q + 1$ ، $b = 6q' + 3$ و $c = 6q'' + 5$ مفروض اند. مربع چند عدد از میان اعداد مفروض را می توان به صورت $8k + 1$ نوشت؟ ($k, q, q', q'' \in \mathbb{Z}$)

- ۱ (۱) صفر
۱ (۲) ۱
۲ (۳) ۲
۳ (۴) ۳

آزمون ۲ آذر

۱۲۲- اگر $x^3 - 3x^2 - 4x$ مضرب ۱۱ باشد، آنگاه مجموع ارقام بزرگ ترین عدد طبیعی دو رقمی x کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۲
۲ (۲) ۱۴
۳ (۳) ۱۶
۴ (۴) ۱۸

آزمون ۲ آذر

۱۲۳- اگر a و b اعداد صحیح متمایز و مثبتی باشند به طوری که باقیمانده تقسیم هر کدام از آنها بر ۲۳، دو برابر مکعب خارج قسمت باشد، آنگاه $2a + b$ کدام می تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۶۲
۲ (۲) ۲۵
۳ (۳) ۱۴۹
۴ (۴) ۸۷

آزمون ۲ آذر

۱۲۴- در تقسیم a بر عدد طبیعی b، باقی مانده ۳۴ و خارج قسمت عددی طبیعی است. چند مقدار طبیعی کم تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۱
۲ (۲) ۲
۳ (۳) ۳
۴ (۴) ۴

آزمون ۲ آذر

۱۲۵- در تقسیمی، مقسوم ۲۰ برابر باقی مانده و باقی مانده ما کسیم است. بیش ترین مقدار مقسوم علیه کدام است؟

- ۱ (۱) ۱۹
۲ (۲) ۲۰
۳ (۳) ۱۸
۴ (۴) ۲۱

آزمون ۲ آذر

۱۲۶- اگر a عضوی از مجموعه $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آنگاه به ازای چند مقدار a، عددی طبیعی مانند k می توان یافت به گونه ای که رابطه $a \mid k^2 + 2$ برقرار باشد؟

- ۱ (۱) صفر
۲ (۲) ۱
۳ (۳) ۲
۴ (۴) بی شمار

۱۲۷- چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $2xy - y - 9x + 11 = 0$ قرار دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۲۸- اگر $(xyz)_8 = (11010011)_7$ ، حاصل $x + y + z$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۲۹- چند عدد طبیعی می‌توان یافت به گونه‌ای که در مبنای ۷ به صورت $(abb)_7$ و در مبنای ۸ به صورت $(cba)_8$ نوشته شوند؟ ($a, c \neq 0$)

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۱۳۰- نمایش عدد $(1a6b)_6$ در مبنای ۱۰، چند رقم فرد دارد؟ ($b = 11, a = 10$)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

ریاضی پایه - ۲۰ سوال

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$$

۹۱- با توجه به الگوی روبه‌رو، جمله n ام آن کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{2^n\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt[2]{2}}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt[2]{2}}$ (۴) $\frac{2}{n+\sqrt{2}}$

۹۲- مجموع ۹ جمله اول دنباله $a_n = \log \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۹۳- در یک دنباله حسابی $a_1 + a_7 + a_8 + a_9 = 80$ است. جمله چهارم کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۲۵ (۴) $\frac{80}{3}$

۹۴- در یک دنباله هندسی غیرصفر، مجموع ۸ جمله اول ۸۲ برابر مجموع ۴ جمله اول آن است. چند مقدار برای قدرنسبت این دنباله به دست می‌آید؟

۹۵- اگر $\frac{x-1}{5} > 0$ و $2x+1 < 5$ / 2249 باشد، چند جمله از دنباله تقریبات اعشاری عدد x معلوم است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۶- اگر $x = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ باشد، x^2 کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}-1$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{5}$

۹۷- فرض کنید $a^x > x$ و $x(a^x + \frac{1}{a})x + a < 0$ باشد. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $ax < 0$ (۲) $ax > 1$ (۳) $a^x x < 1$ (۴) $a > 1$

۹۸- معادله $3x^2 + (a^2 + 1)x^2 + a^2 - 4 = 0$ فقط یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

- (۱) $|a| > 2$ (۲) $|a| < 2$ (۳) $a > 1$ (۴) $a < -1$

۹۹- در ساعت $1:30'$ زاویه بین عقربه ساعت شمار و دقیقه شمار چند درجه است؟

- (۱) ۱۲۵ (۲) ۱۳۰ (۳) ۱۳۵ (۴) ۱۴۰

۱۰۰- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 107^\circ$ ، $\hat{B} = 13^\circ$ ، طول ارتفاع BH برابر ۶ و پاره خط AH برابر x واحد است. اگر مساحت مثلث ABC برابر $9x$ واحد مربع باشد، محیط مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ (۲) $8\sqrt{3}$ (۳) $9\sqrt{3}$ (۴) $5\sqrt{3} + 6$

۱۰۱- در یک دنباله حسابی مجموع ۲۰ جمله اول، ۲۰ برابر مجموع ۵ جمله اول است. جمله دوم چند برابر جمله اول این دنباله است؟ ($a_1 \neq 0$)

- (۱) -۷ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۵

۱۰۲- مجموعه همه جملات دنباله‌ای به شکل $\dots, \frac{1}{300}, \frac{1}{200}, \frac{1}{100}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{55}{18}$ (۲) $\frac{55}{27}$ (۳) $\frac{55}{90}$ (۴) ۲

آزمون ۲ آذر

۱۰۳- اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب ۳ و ۱- باشد، باقی مانده تقسیم $g(x) = x^2 f(x) - 2x + 1$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

(۴) $11 + 9x$

(۳) $7 + 4x$

(۲) $7 - 4x$

(۱) $11 - 9x$

آزمون ۲ آذر

۱۰۴- در بسط دو جمله‌ای $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ ضریب x^5 کدام است؟

(۴) $\binom{10}{8}$

(۳) $\binom{10}{6}$

(۲) $\binom{10}{5}$

(۱) $\binom{10}{7}$

آزمون ۲ آذر

۱۰۵- مقدار کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $x^3 - x^2 - x - 2$ و $x^2 - 7x + 10$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) -۱۲

(۲) ۱

(۱) -۱

آزمون ۲ آذر

۱۰۶- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt[3]{3\alpha - 1} + \sqrt[3]{3\beta - 1}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{11}$

(۳) $\sqrt{7}$

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\sqrt{3}$

آزمون ۲ آذر

۱۰۷- اگر معادله $x^2 + mx + 54 = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، ریشه ساده آن کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۳

(۲) -۶

(۱) -۳

آزمون ۲ آذر

۱۰۸- برد تابع $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

(۴) $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(۳) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

(۲) $[0, 1]$

(۱) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

آزمون ۲ آذر

۱۰۹- اگر $\sin \frac{\pi}{n} = \sqrt{k}$ ($n \in \mathbb{N}, 0 < k < 1$) باشد، حاصل $\tan \left(\frac{n^2 - 1}{n}\right) \pi$ کدام است؟

(۴) \sqrt{k}

(۳) $-\sqrt{\frac{k}{1-k}}$

(۲) $\sqrt{\frac{k}{1-k}}$

(۱) $-\sqrt{k}$

آزمون ۲ آذر

۱۱۰- حاصل $\frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta}$ وقتی $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ باشد، کدام است؟

(۴) $-\frac{7}{9}$

(۳) $-\frac{5}{9}$

(۲) $-\frac{1}{3}$

(۱) $-\frac{1}{9}$

۱۳۱- در مثلث ABC ، متمم زاویه B با مکمل زاویه C و مکمل زاویه A با دو برابر متمم زاویه B برابر است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

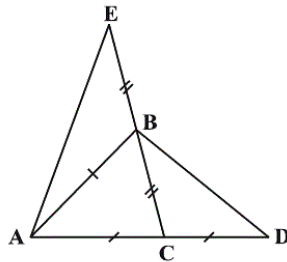
۳۰ (۴)

۲۷/۵ (۳)

۲۵ (۲)

۲۲/۵ (۱)

۱۳۲- در شکل زیر کدام تساوی لزوماً صحیح نیست؟



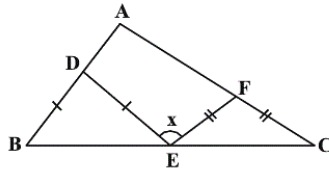
(۱) $\widehat{BCD} = \widehat{ABE}$

(۲) $\widehat{D} + \widehat{E} = \widehat{ABC}$

(۳) $AE = BD$

(۴) $\widehat{D} + \widehat{E} = \widehat{BAC}$

۱۳۳- در شکل مقابل اگر $\widehat{A} = ۸۴^\circ$ باشد، x کدام است؟



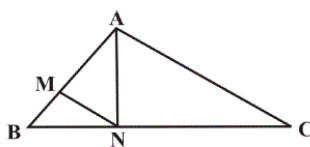
۹۶° (۲)

۸۴° (۱)

۵۸° (۴)

۴۸° (۳)

۱۳۴- در شکل زیر $AM = ۲BM$ و $NC = ۳BN$ است. مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



$\frac{1}{5}$ (۲)

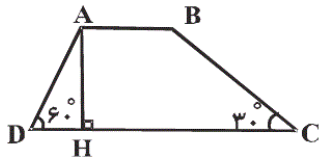
$\frac{2}{15}$ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{4}{15}$ (۳)

۱۳۵- در دوزنقه $ABCD$ ، زوایای مجاور قاعده بزرگ برابر 30° و 60° هستند. (مطابق شکل) اگر $AB = 5$ و $CD = 13$ ، قاعده‌های

دوزنقه باشند، اندازه ارتفاع AH کدام است؟



(۲) $2\sqrt{3}$

(۱) $4\sqrt{3}$

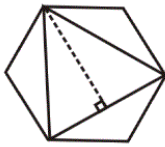
(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) $4\sqrt{2}$

آزمون ۲ آذر

۱۳۶- در شکل زیر، مثلثی درون یک شش ضلعی منتظم قرار دارد. اگر اندازه ارتفاع مثلث برابر ۶ باشد، مساحت شش ضلعی کدام

است؟



(۲) $18\sqrt{3}$

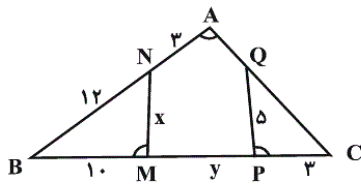
(۱) $24\sqrt{3}$

(۴) $36\sqrt{3}$

(۳) $32\sqrt{3}$

آزمون ۲ آذر

۱۳۷- در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{A} = \hat{BMN} = \hat{CPQ}$ باشد، حاصل $x + y$ کدام است؟



(۲) ۱۱

(۱) ۸

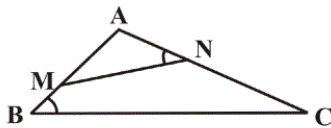
(۴) ۱۴

(۳) ۱۲

آزمون ۲ آذر

۱۳۸- مساحت مثلث ABC در شکل زیر، سه برابر مساحت مثلث AMN است. اگر فاصله نقطه A تا ضلع BC برابر ۶

و $\hat{ANM} = \hat{ABC}$ باشد، فاصله نقطه A تا ضلع MN کدام است؟



(۲) ۳

(۱) ۲

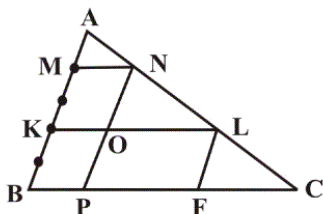
(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{3}$

آزمون ۲ آذر

۱۳۹- در شکل زیر، چهارضلعی‌های $MNPB$ و $KLFB$ متوازی‌الاضلاع هستند. چنانچه مطابق شکل، ضلع AB به ۵ قسمت مساوی

تقسیم شده باشد، محیط مثلث NOL ، چند برابر محیط مثلث ABC است؟



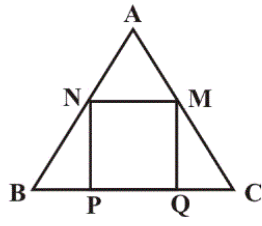
(۲) $0/5$

(۱) $0/6$

(۴) $0/3$

(۳) $0/4$

۱۴۰- در شکل زیر، چهارضلعی $MNPQ$ مربع است و مساحت آن برابر ۱۶ می باشد. اگر $BC = ۱۲$ باشد، مساحت مثلث AMN کدام



است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۴/۵ (۴)

۳/۵ (۳)

(عمید علیزاده)

-۸۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{6^{n+1}}{3^n}} \right)^{2^n}$$

قرار می‌دهیم $T = 6 \times 2^n$ ؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T} \right)^{\frac{T}{6}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\left(1 + \frac{1}{T} \right)^T} \\ &= \sqrt[6]{\lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{T} \right)^T} = \sqrt[6]{e} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(کیا مقدس نیاک)

-۸۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{-n} + 3^{-2n+1}}{7^{-n+1} + 3^{-2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} + \frac{3}{3^{2n}}}{\frac{7}{7^n} + \frac{1}{3^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} + \frac{3}{9^n}}{\frac{7}{7^n} + \frac{1}{9^n}}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9^n + 3(7^n)}{7^n \times 9^n}}{\frac{7(9^n) + 7^n}{7^n \times 9^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 3(7^n)}{7(9^n) + 7^n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n}{7(9^n)} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

(مدرس مصطفی ابراهیمی)

جملات دنباله a_n را پشت سر هم می‌نویسیم:

$$\frac{-3}{1}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{10}, \frac{5}{13}, \dots$$

مشخص است که دو جمله اول دنباله منفی و بقیه جملات مثبت هستند. دنباله

 b_n برابر حاصل ضرب دو جمله متوالی دنباله a_n است. در دنباله a_n فقطحاصل ضرب جملات متوالی a_2 و a_3 منفی است و بقیه مثبت هستند. یعنیتنها جمله دوم دنباله b_n منفی است:

$$b_2 = a_2 \times a_3 = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{-1}{28}$$

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \right] = \begin{cases} -1 & ; n = 4k - 1 \\ 0 & ; n = 2k, 4k + 1 \\ 1 & ; n = 1 \end{cases}$$

بنابراین دنباله a_n کران دار اما واگراست. از طرفی وقتی $n \rightarrow \infty$ ، سرعت

رشد دنباله‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\log n < n^k < a^n < n! < n^n \quad ; (a, k > 1)$$

بنابراین دنباله $b_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^2}$ ، واگرا و بی کران است؛ در نتیجه دنباله

$a_n + b_n$ نیز واگرا و بی کران است.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(کیا مقدس نیاک)

$$a_n = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} a_{2n-1} = \{1, -1, 1, -1, \dots\} \\ a_{2n} = 0 \end{cases}$$

$$b_n = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

واگرای نوسانی $\rightarrow a_n \cdot b_n = \{-1, 0, 1, 0, -1, \dots\}$: گزینه «۱»

واگرای نوسانی $\rightarrow a_n^2 + b_n^2 = \{2, 1, 2, 1, \dots\}$: گزینه «۲»

همگرا به -1 $\rightarrow a_{2n-1} \cdot b_n = \{-1, -1, -1, -1, \dots\}$: گزینه «۳»

واگرای نوسانی $\rightarrow a_n + b_n = \{0, 1, -2, 1, \dots\}$: گزینه «۴»

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

ابتدا به بررسی گزینه «۲» می‌پردازیم. اگر فرض کنیم $a_n = \frac{1}{n+0.5}$ و

$$b_n = \frac{1}{n+1} \text{ باشد، داریم:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+0.5} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

پس هر دو دنباله a_n و b_n به عدد صفر همگرا هستند. حال حدهای

$f(a_n)$ و $f(b_n)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [n+0.5] + [-n-0.5]$$

$$= n + (-n - 1) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [n+1] + [-n-1] = 0$$

چون $f(a_n)$ و $f(b_n)$ به دو عدد مختلف همگرا شدند، پس $f(x)$ در

نقطه $x=0$ حد ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: هر دو دنباله به صفر همگرا هستند و $f(a_n)$ و $f(b_n)$ در

صورت زوج بودن n به صفر، و در صورت فرد بودن n ، به -1 همگرا

هستند.

گزینه «۳»: هر دو دنباله به صفر همگرا هستند و $f(a_n)$ و $f(b_n)$ هم هر

دو به صفر همگرا هستند.

گزینه «۴»: هر دو دنباله به صفر همگرا هستند و باز هم $f(a_n)$ و $f(b_n)$

هر دو به صفر همگرا هستند.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$

گزینه «۴»:
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ وجود ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x[x] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x[x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x[x] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \times (-1) = 0 \times (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0$$

(مسئله بان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(سید عادل حسینی)

-۸۸

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} ([x] + [-x]) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos([x] + [-x])}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(-1)}{\cos x} = \frac{\cos 1}{\cos 1} = 1$$

(مسئله بان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(کامظم سالار)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [\sqrt{x - |x|}] + x &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [\sqrt{x + x}] + x \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [2x] + x = [2(-1)^-] + (-1) = [(-2)^-] - 1 \\ &= -4 - 1 = -5 \end{aligned}$$

(مسابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(عمید علیزاده)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + a^2}} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-a)(x+a)}{\sqrt{(x-a)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-a)(x+a)}{|x-a|} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x-a)(x+a)}{-(x-a)} \\ &= -2a = 6 \Rightarrow a = -3 \end{aligned}$$

(مسابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(مهرداد ملونری)

$$x^2 + y^2 - mx + 2ny + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + ((y+n)^2 - n^2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + (y+n)^2 = \frac{m^2}{4} + n^2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره : } O' = \left(\frac{m}{2}, -n\right) \\ \text{شعاع دایره : } R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2 - 1} \end{cases}$$

$$\text{فرض : } O' = \left(\frac{m}{2}, -n\right) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -2 \end{cases}$$

$$\text{شعاع دایره : } R = \sqrt{\frac{m^2}{4} + n^2 - 1} = \sqrt{\frac{4}{4} + 4 - 1} = 2$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

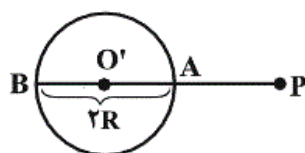
(مهمد علی نادرپور)

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 - m$$

$$\Rightarrow O' = (2, -1), R = \sqrt{5 - m}$$

$$PB = PA + 2R \Rightarrow 2R = 3 - 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sqrt{5 - m} = 1 \Rightarrow m = 4$$



(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

اگر O و O' مرکزها، R و R' شعاع‌ها و $d = OO'$ طول خط‌المركزین دودایره باشد، باید $|R - R'| < d < R + R'$. بنابراین داریم:

$$C' : x^2 + (y - 4)^2 = m^2 \xrightarrow{m > 0} C' : \begin{cases} O' = (0, 4) \\ R' = m \end{cases}$$

$$C : (x + 3)^2 + y^2 = (2m + 1)^2 \xrightarrow{m > 0} C : \begin{cases} O = (-3, 0) \\ R = 2m + 1 \end{cases}$$

$$d = OO' = \sqrt{9 + 16} = 5$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

به $C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در صورتی معادله یک دایره به

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0 \text{ شعاع } R \text{ است که}$$

نقطه $M = (x_1, y_1)$ وقتی خارج دایره $C(x, y) = 0$ قرار دارد که $C(x_1, y_1) > 0$. در این جا باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2^2}{4} + \frac{4^2}{4} - m > 0 \Rightarrow m < 5 \\ C(1, 2) = 1 + 4 + 2 - 8 + m > 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

بنابراین مقادیر ممکن برای m ، به صورت $1 < m < 5$ است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

فاصله نقطه $P = (x, y)$ از محورهای x و y به ترتیب برابر $|y|$ و $|x|$

است. با توجه به این که x و y هر دو مثبت هستند، داریم:

$$2(x+y) = |PA|^2 \Rightarrow 2x + 2y = x^2 + (y-4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 - 2x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 - 1 - 25 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-5)^2 = 10$$

این معادله، معادله دایره‌ای به شعاع $\sqrt{10}$ است (به دلیل مثبت بودن

مختصات x و y ، عملاً بخشی از یک دایره را شامل می‌شود که با توجه به

معادله، بزرگ‌تر از نیم‌دایره است)، می‌دانیم که بیش‌ترین فاصله میان نقاط

دایره، برابر با اندازه قطر آن است. که در این سؤال، برابر $2\sqrt{10}$ خواهد بود.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

مرکز دایره نقطه تلاقی خط D و عمودمنصف پاره خط AB است. این عمودمنصف را خط Δ می‌نامیم. معادله خط Δ را به دست می‌آوریم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 + 5}{-2 - 4} = -\frac{4}{3} \quad (\text{شیب خط } AB)$$

$$\Delta \perp AB \Rightarrow m_{\Delta} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{4}$$

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (1, -1) \quad (\text{نقطه وسط } AB)$$

$$\Delta : y + 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow \Delta : 3x - 4y - 7 = 0$$

$$O : \{(x, y) \mid (x, y) \in D \cap \Delta\} \Rightarrow O = (5, 2)$$

$$R = OA = \sqrt{(4 - 5)^2 + (-5 - 2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

اگر R و R' شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین آنها باشد، برای دو دایره مماس خارج داریم:

$$d = R + R'$$

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - a = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = a+5$$

$$\Rightarrow O_1 = (1, 2), R_1 = \sqrt{a+5}$$

$$C_2: (x-5)^2 + y^2 - 4y = -3 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow O_2 = (5, 2), R_2 = 1$$

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = 4$$

$$d = R_1 + R_2 \Rightarrow 4 = 1 + \sqrt{a+5} \Rightarrow a = 4$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(بونام قلعی)

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9 \Rightarrow$$

$R = 3$: شعاع و $(3, -1)$: مرکز

M مرکز دایره است، پس تمام وترهای گذرا از M ، همگی قطر دایره هستند. طول قطر این دایره برابر $2R = 6$ است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(نهیبر ممیی نژاد)

$$C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$$

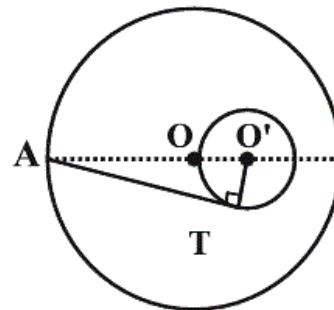
$R = 4$: شعاع دایره و $O = (1, -1)$: مرکز دایره

$$C': (x-1)^2 + y^2 = 1$$

$R' = 1$: شعاع دایره و $O' = (1, 0)$: مرکز دایره

$$OO' = \sqrt{(1-1)^2 + (0+1)^2} = 1$$

$OO' < |R - R'|$ ، پس دو دایره متداخل هستند.



مطابق شکل، نقطه A بیشترین فاصله را تا مرکز دایره C' دارا می‌باشد و در نتیجه بزرگ‌ترین مماس بر دایره C، از این نقطه قابل رسم است. داریم:

$$AT^2 = AO'^2 - O'T^2 = 5^2 - 1^2 = 24 \Rightarrow AT = 2\sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

مرکز دایره C بر روی خطی واقع است که مرکز دایره C' را به نقطه A وصل می کند.

$$C' : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow \text{مرکز} : O'(-1, 1)$$

$$O'A \text{ معادله خط} : y - 3 = \frac{3-1}{1-(-1)}(x-1) \Rightarrow y = x + 2$$

$$\xrightarrow{x=0} y = 2$$

بنابراین مرکز دایره C، نقطه O = (0, 2) است و در نتیجه داریم:

$$\text{شعاع دایره} : R = OA = \sqrt{(1-0)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

هر یک از اعداد a، b و c، عددی فرد هستند. همچنین می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)، است. پس مربع هر سه عدد a، b و c را می توان به فرم خواسته شده نوشت.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه های ۳۰ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(علی ایمانی)

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1)$$

$$11 | x(x-4)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} 11 | x \\ 11 | (x-4) \\ 11 | (x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11k \\ x = 11k + 4 \\ x = 11k - 1 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی که در یکی از روابط فوق صدق کند، عدد ۹۹ است که مجموع ارقام آن برابر ۱۸ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(علی ایمانی)

$$a = 23q + 2q^3, 2q^3 < 23$$

$$q^3 \leq 11 \Rightarrow q = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \Rightarrow a = 23 + 2 = 25 \\ q = 2 \Rightarrow b = 46 + 16 = 62 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 62 \\ b = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a + b = \begin{cases} 50 + 62 = 112 \\ 124 + 25 = 149 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(سروش موئینی)

طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$a = bq + 34 \xrightarrow{0 \leq r < b} 34 < b$$

پس $b \geq 35$ و $q \geq 1$ است. بنابراین حداقل مقدار a برابر $35 + 34 = 69$ است. با این شرایط $a = 69$ تنها جواب است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(سروش موئینی)

$$\left. \begin{array}{l} a = bq + r \\ r = r_{\max} = b - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{r}_{a} = \underbrace{(r+1)}_b q + r$$

$$\Rightarrow 19r = (r+1)q \Rightarrow r+1 \mid 19r$$

$19r$ بر $r+1$ بخش پذیر است. پس $r+1=19$ و در نتیجه $b=19$.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲ آذر

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر $a=2$ ، آن گاه به ازای هر عدد طبیعی زوج k ، رابطه $a \mid k^2 + 2$ برقرار است. اما به ازای $a=4$ ، رابطه هیچ گاه برقرار نیست، زیرا اگر k زوج باشد، k^2 مضرب ۴ بوده و باقی مانده تقسیم $k^2 + 2$ بر ۴، برابر ۲ است. در صورتی که k فرد باشد، k^2 در تقسیم بر ۴، دارای باقی مانده یک است و در نتیجه $k^2 + 2$ بر ۴، بخش پذیر نیست. سایر اعضای مجموعه A ، قطعاً مضرب ۴ هستند و رابطه برای آنان نیز برقرار نیست.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$2xy - y - 9x + 11 = 0 \Rightarrow y(2x - 1) = 9x - 11$$

$$\Rightarrow y = \frac{9x - 11}{2x - 1} \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 1 \mid 9x - 11 \Rightarrow 2x - 1 \mid 18x - 22 \\ 2x - 1 \mid 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 \mid 18x - 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 1 \mid 13$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{غ.ق.ق} \quad 2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ \text{غ.ق.ق} \quad 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \\ 2x - 1 = 13 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 4 \\ \text{غ.ق.ق} \quad 2x - 1 = -13 \Rightarrow x = -6 \end{array} \right.$$

بنابراین تنها یک نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی موجود است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

(مفید مسمری نویسی)

$$((1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1))_2 = (x \ y \ z)_8$$

$$\left. \begin{array}{l} (011)_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 = 3 \Rightarrow z = 3 \\ (010)_2 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 = 2 \Rightarrow y = 2 \\ (11)_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 3 \Rightarrow x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = 8$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(امیر حسین ابومحبوب)

با توجه به این که $1 \leq a \leq 6$ ، $0 \leq b \leq 6$ و $1 \leq c \leq 7$ است، داریم:

$$(abb)_7 = (cba)_8 \Rightarrow b + 7b + 49a = a + 8b + 64c$$

$$\Rightarrow 48a = 64c \Rightarrow 3a = 4c \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

بنابراین b می‌تواند تمامی مقادیر صفر تا ۶ را بپذیرد، یعنی ۷ عدد طبیعی با این مشخصات وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(نوید میدری)

$$(1a6b)_{16} = 1 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 6 \times 16 + 11$$

$$= 16(256 + 160 + 6) + 11 = 16 \times 422 + 11 = 6763$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سید عادل حسینی)

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \dots$$

با توجه به الگو داریم:

$$\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^4}, \frac{7}{2^8}, \frac{15}{2^{16}}$$

می‌بینیم که الگو با جمله عمومی a_n دنبال می‌شود:

$$a_n = 2^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n} \sqrt{2}}}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(میرهادی سرکارفرشی)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

$$= \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{9}{10}$$

$$= \log \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{9}{10}$$

$$= \log \frac{1}{10} = -1$$

(ریاضی ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲ آذر

(حسن فتح‌قربیب)

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

$$\begin{cases} a_1 + a_7 = a_4 + a_4 \\ a_3 + a_5 = a_4 + a_4 \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 8a_4$$

$$\Rightarrow 4a_4 = 8a_4 \Rightarrow a_4 = 20$$

(ریاضی ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

$$\Rightarrow q^8 - 1 = 82(q^4 - 1) \Rightarrow (q^4 - 1)(q^4 + 1) = 82(q^4 - 1)$$

$$\xrightarrow[\text{می‌بریم}]{\text{همه را به طرف راست}} 82(q^4 - 1) - (q^4 - 1)(q^4 + 1) = 0$$

$$(q^4 - 1)[82 - (q^4 + 1)] = 0 \Rightarrow \begin{cases} q^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = +1 \\ q = -1 \end{cases} \\ 82 - (q^4 + 1) = 0 \Rightarrow q^4 + 1 = 82 \\ \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow \begin{cases} q = +3 \\ q = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$q = +1$ غیر قابل قبول است زیرا اگر $q = 1$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} S_8 = 8a_1 \\ S_4 = 4a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow S_8 \neq 8S_4$$

بنابراین ۳ مقدار برای q به دست می‌آید و گزینه «۲» صحیح است.

(ریاضی ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(مهم‌درضا اسلامی)

-۹۵

محدوده x را محاسبه می‌کنیم:

$$2x + 1 < 5/2492 \Rightarrow 2x < 4/2492 \Rightarrow x < 2/1246$$

$$\frac{x-1}{5} > 0/2249 \Rightarrow x-1 > 1/1245 \Rightarrow x > 2/1245$$

$$\Rightarrow 2/1245 < x < 2/1246$$

بنابراین ۴ جمله اول دنباله تقریباً اعشاری به صورت

$2/1, 2/12, 2/124, 2/1245$ است.

(ریاضی ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱

(عباس امیدوار)

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{(\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2})^2}{(\sqrt{\sqrt{5}+1})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+2 + \sqrt{5}-2 + 2\sqrt{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}}{\sqrt{5}+1} \\
 &= \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1} = 2
 \end{aligned}$$

(ریاضی ۲- الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به تجزیه $x^2 - (a^2 + \frac{1}{a})x + a = (x - a^2)(x - \frac{1}{a})$ داریم:

$$(x - a^2)(x - \frac{1}{a}) < 0 \Rightarrow a^2 < x < \frac{1}{a} \text{ یا } \frac{1}{a} < x < a^2$$

که با توجه به شرط مسئله باید حالت $a^2 < x < \frac{1}{a}$ را بپذیریم. که این یعنی:

$$a^2 < \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a^3 - 1}{a} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} a & & 0 & 1 \\ \hline \frac{a^3 - 1}{a} & + & \text{ت} & - \\ & & \text{ان} & \\ & & & + \end{array}$$

لذا $0 < a < 1$. بنابراین چون $x < \frac{1}{a}$ ، با توجه به مثبت بودن a می‌توان طرفین

$$xa < 1 \Rightarrow xa^2 < a < 1 \quad \text{رادر } a \text{ ضرب کرد:}$$

لذا $a^2 x < 1$ و گزینه سوم صحیح است.

(ریاضی ۲- توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

در دو حالت معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ دو ریشه دارد:

$$\text{الف) } \frac{-b}{2a} > 0, \Delta = 0, \text{ ب) } \Delta > 0 \text{ و } \frac{c}{a} < 0$$

حالت الف هیچ گاه در این معادله رخ نمی‌دهد، زیرا $\frac{-b}{2a} < 0$ است. بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta = (a^2 + 1)^2 - 12(a^2 - 4) = a^4 - 10a^2 + 49 > 0 \\ P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 4}{3} < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow -2 < a < 2 \Rightarrow |a| < 2 \end{cases}$$

(ریاضی ۲- توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

$$\left. \begin{aligned} \text{عقربه دقیقه‌شمار} &= m \times 6^\circ \\ \text{عقربه ساعت‌شمار} &= h \times 30^\circ + m \times \frac{1}{2}^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{زاویه بین دو عقربه} = \left| 6m - \left(30h + \frac{1}{2}m \right) \right| = |5m - 30h|$$

$$1:30' \text{ زاویه بین دو عقربه در ساعت} = |5 \times 5 - 30 \times 1| = 135^\circ$$

(ریاضی ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

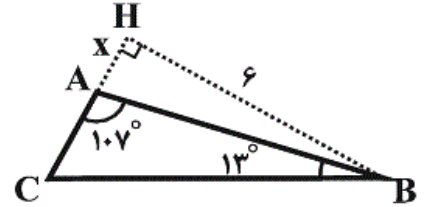
آزمون ۲ آذر

$$\hat{C} = 60^\circ, \triangle HBC: \tan 60^\circ = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{CH}$$

$$\Rightarrow CH = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2\sqrt{3} - x$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC)(BH) \Rightarrow 9x = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - x)(6)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



$$\triangle HBC: \sin 60^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle BHA: (AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (AB)^2 = \frac{3}{4} + 36 = \frac{147}{4} (3)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$ABC \text{ محیط} = AC + BC + AB = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} + \frac{7}{2}\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

(ریاضی ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

$$S_{20} = 20 \cdot S_5 \Rightarrow \frac{20(2a_1 + 19d)}{2} = 20 \cdot \left(\frac{5(2a_1 + 4d)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 19d = 10a_1 + 20d \Rightarrow d = -8a_1$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + (-8a_1)}{a_1} = -7$$

(مسئله - تناسب گیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \dots\right)}_{\sum_{n=1}^{\infty} b_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \dots\right)}_{\sum_{n=1}^{\infty} c_n} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \dots\right)}_{\sum_{n=1}^{\infty} d_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{10}{9} + \frac{5}{9} + \frac{10}{27} = \frac{55}{27}$$

(مسئله - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه های ۲ تا ۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=-1$$

فرض می‌کنیم باقی‌مانده تقسیم $g(x)$ بر x^2-3x+2 برابر $ax+b$

باشد. آن‌گاه:

$$g(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (ax + b)$$

$$\Rightarrow x^2 f(x) - 2x + 1 = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (ax + b)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow f(1) - 2 + 1 = a + b \Rightarrow a + b = 2 \\ x=2 \Rightarrow 4f(2) - 4 + 1 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 11 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده، $r(x) = -9x + 11$ است.

(مسئله‌بان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲ آذر

(مرتضی روزبهانی)

$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{2(10-k)} x^{-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{20-3k}$$

$$x^{20-3k} = x^5$$

$$\Rightarrow 20 - 3k = 5 \Rightarrow 3k = 15 \Rightarrow k = 5$$

بنابراین ضریب جمله x^5 ، عدد $\binom{10}{5}$ است.

(حسابان- معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

تجزیه عبارت $x^2 - 7x + 10$ به صورت $(x-2)(x-5)$ است. ریشه‌های ۲ و ۵ را در عبارت درجه ۳ امتحان می‌کنیم. عبارت به ازای $x=2$ صفر می‌شود، پس بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - x - 2 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \quad | \\
 x^2 + x + 1 \\
 \\
 x^2 - x - 2 \\
 \underline{-(x^2 - 2x)} \\
 x - 2 \\
 \underline{-(x - 2)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{م.م.ک} = (x-2)(x^2 + x + 1)(x-5) \xrightarrow{x=1} -1 \times 3 \times (-4) = 12$$

(مسئله - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(صیب شفیع)

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۳, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 3\alpha - 1 \\ \beta^2 = 3\beta - 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{3\alpha - 1} + \sqrt[4]{3\beta - 1} = \sqrt[4]{\alpha^2} + \sqrt[4]{\beta^2} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A$$

$$A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow A = \sqrt{5}$$

(مسابان- مقاسبات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

ریشه مضاعف یعنی ریشه‌ای در معادله دارای درجه ۲ است و چون درجه معادله ۳ است، فقط یک ریشه ساده دارد.

$$x^3 + mx + 54 = (x - a)(x - b)^2$$

$$\Rightarrow (x - a)(x - b)^2 = x^3 - \underbrace{(a + 2b)}_0 x^2 + (2ab + b^2)x - \underbrace{ab^2}_{54}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \\ -ab^2 = 54 \end{cases} \Rightarrow -(-2b)b^2 = 2b^3 = 54$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -6 \end{cases}$$

پس $x = -6$ ریشه ساده این معادله است.

(مسئله - مسائل جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

$$\begin{aligned}
 y &= \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 \\
 &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\
 &= 1 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x) (2 \sin x \cos x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 (2x)
 \end{aligned}$$

می‌دانیم که:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 &\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1 \\
 \Rightarrow R_f &= \left[\frac{1}{2}, 1 \right]
 \end{aligned}$$

نکته: برد تابع $f(x) = \sin^{2n} x + \cos^{2n} x$ برابر است با:

$$R_f = \left[\frac{1}{2^{n-1}}, 1 \right]$$

(ریاضی ۲- مثلثات: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۵۲) و (مسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۵ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون ۲ آذر

$$\tan\left(\frac{n^{\gamma}-1}{n}\right)\pi = \tan\left(\frac{n^{\gamma}}{n} - \frac{1}{n}\right)\pi = \tan\left(n\pi - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$= -\tan\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{n^{\gamma}-1}{n}\right)\pi = -\tan\frac{\pi}{n} \quad (۱)$$

$$\sin^{\gamma}\frac{\pi}{n} + \cos^{\gamma}\frac{\pi}{n} = ۱ \Rightarrow k + \cos^{\gamma}\frac{\pi}{n} = ۱ \Rightarrow \cos^{\gamma}\frac{\pi}{n} = ۱ - k$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{n} = \pm\sqrt{1-k} \xrightarrow{\frac{\pi}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{\gamma}\right] \cup \{\pi\}} \cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{1-k}$$

$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1-k}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\pi}{n} = \sqrt{\frac{k}{1-k}} \xrightarrow{(۱)} \tan\left(\frac{n^{\gamma}-1}{n}\right)\pi = -\sqrt{\frac{k}{1-k}}$$

(حسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = \frac{3\sin \theta - 4\sin^3 \theta}{\sin \theta} = 3 - 4\sin^2 \theta$$

$$= 3 - 4(1 - \cos^2 \theta) = 4\cos^2 \theta - 1 = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$$

(مسابان- مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(مهمد ابراهیم کیتی زاده)

-۱۳۱

طبق داده‌های سؤال داریم:

$$90^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ + \hat{B}$$

$$180^\circ - \hat{A} = 2(90^\circ - \hat{B}) \Rightarrow \hat{A} = 2\hat{B}$$

می‌دانیم مجموع زوایای مثلث، برابر 180° است. از طرفی واضح است که \hat{B} کوچک‌ترین زاویه مثلث است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{B} + \hat{B} + 90^\circ + \hat{B} = 180^\circ \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$\Rightarrow 4\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 22/5^\circ$$

(هندسه ۱- هندسه و استدلال: صفحه ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر

(سروش موئینی)

-۱۳۲

در مثلث ABC زوایای B و C مساویند پس مکمل‌های آنها با هم برابرند. پس دو مثلث ABE و BCD همنهشت‌اند.

$$\Rightarrow \hat{B}EA = \hat{C}BD \text{ و } AE = BD \text{ و } \hat{D} = \hat{E}AB$$

$$\hat{A}BE \text{ در مثلث } ABE: \hat{A}BC = \hat{E} + \hat{E}AB = \hat{E} + \hat{D}$$

(هندسه ۱- هندسه و استدلال: مشابه تمرین ۱۵، صفحه ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

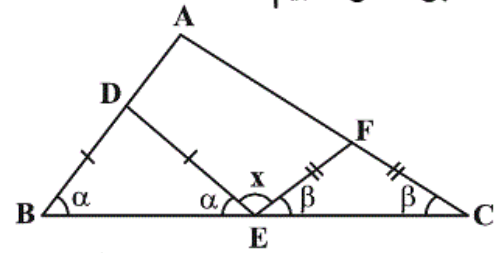
(رسول مسینی منش)

-۱۳۳

مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases} \Delta ABC: \alpha + \beta + \hat{A} = 180^\circ \\ \alpha + \beta + x = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \hat{A} = 84^\circ$$



(هندسه ۱- هندسه و استرلاال؛ صفحه های ۱۱ و ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فرهاد صابر)

-۱۳۴

فرض می کنیم $S_{BMN} = S_0$ ، داریم:

$$AM = 2BM \Rightarrow S_{AMN} = 2S_0$$

$$NC = 3BN$$

$$\Rightarrow S_{ANC} = 3S_{ABN} = 3(S_0 + 2S_0) = 9S_0$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{2S_0}{12S_0} = \frac{1}{6}$$

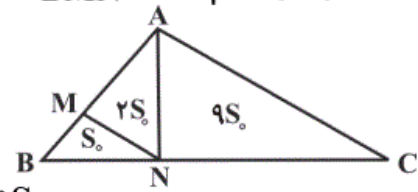
(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس؛ مشابه تمرین ۱۱، صفحه ۵۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



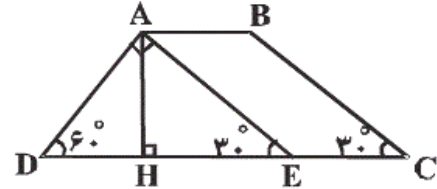
(مهرداد ملونری)

مطابق شکل، از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در نقطه E قطع کند، داریم:

$$\begin{cases} AE \parallel BC \Rightarrow \hat{AED} = \hat{C} = 30^\circ \\ ABCE \Rightarrow AB = CE = 5 \Rightarrow DE = CD - CE = 8 \end{cases}$$

می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه 30° ، نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است، پس:

$$\begin{aligned} \Delta ADE : \hat{A} &= 90^\circ \\ \Rightarrow AE &= \frac{\sqrt{3}}{2} DE = \frac{\sqrt{3}}{2} (8) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\Delta AHE : \hat{E} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AE}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه ۶۵)

۴

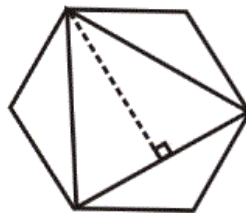
۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

(نوید میدی)



مثلث مفروض، متساوی‌الاضلاع است. اگر اندازه ضلع شش ضلعی منتظم را a فرض کنیم، آنگاه اندازه ضلع

$$\text{مثلث برابر } a\sqrt{3} \text{ و ارتفاع آن برابر } \frac{3a}{2} = a\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3a}{2} = 6 \Rightarrow a = 4$$

می‌شود. پس داریم:

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times (4)^2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۳)

۴

۳

۲

۱

آزمون ۲ آذر

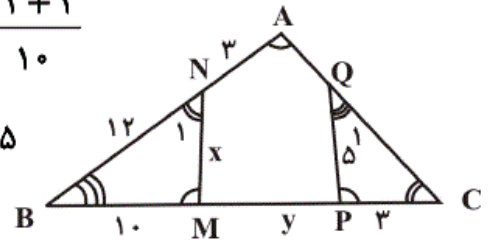
مطابق شکل، $\hat{N}_1 = \hat{C}$ و $\hat{Q}_1 = \hat{B}$ ، بنابراین سه مثلث ABC ، BMN و CPQ دو به دو متشابه‌اند. داریم:

$$\Delta BMN \sim \Delta CPQ \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 6$$

$$\Delta ABC \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{10 + y + 3}{12} = \frac{12 + 3}{10}$$

$$\Rightarrow 13 + y = \frac{12 \times 15}{10} = 18 \Rightarrow y = 5$$

$$\Rightarrow x + y = 6 + 5 = 11$$



(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

آزمون ۲ آذر

فاصله A تا ضلع BC را h و فاصله A تا ضلع MN را h' می‌نامیم. دو مثلث ABC و AMN متشابه هستند (به حالت تساوی دو زاویه)، پس داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \Rightarrow 3 = \frac{36}{h'^2} \Rightarrow h'^2 = 12 \Rightarrow h' = 2\sqrt{3}$$

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

به راحتی ثابت می‌شود که چهارضلعی $KMNO$ متوازی‌الاضلاع است،

$$\text{پس } NO = KM = \frac{2}{5} AB$$

اضلاع مثلث‌های ABC و NOL با هم موازی بوده، پس این دو مثلث با هم

$$\frac{\Delta \text{ محیط } NOL}{\Delta \text{ محیط } ABC} = \frac{NO}{AB} = \frac{2}{5} = 0.4$$

متشابه‌اند و در نتیجه:

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون ۲ آذر

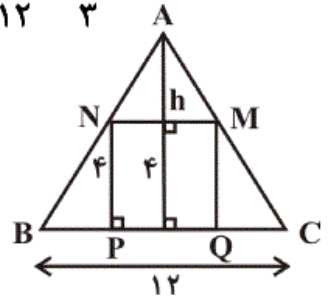
مساحت مربع $MNPQ$ برابر ۱۶ است پس ضلع آن ۴ است.

$$\Delta AMN \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{h}{h+4} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{h}{h+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2$$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} h \times MN = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

(هندسه ۱- تشابه: صفحه‌های ۱۳ تا ۹۷)


 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون ۲ آذر