سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درســـنامه ها و جـــزوه های ریاضـــی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

https://t.me/riazisara

ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

https://www.instagram.com/riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دیفرانسیل و انتگرال - ۲۰ سوال

۶۱- مقدار $I=\int_{-۱}^{۱}\left(۳^{x}+۳^{-x}\right)dx$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

آزمون ۶ مهر

۶۲- کدام گزینه بیانگر همسایگی متقارنی است که مجموع مرکز و شعاع همسایگی آن برابر ۵ است؟

۱) $|x+۳|<۲$
۲) $|x-۳|<۲$
۳) $|۲x+۴|<۶$
۴) $|x-۵|<۰$

آزمون ۶ مهر

۶۳- دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌صورت $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۱-a_n}$ تعریف شده است. کدام گزینه در مورد همگرایی این دنباله صحیح است؟

۱) همگرا به ۱
۲) همگرا به صفر
۳) همگرا به $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$
۴) واگراست

آزمون ۶ مهر

۶۴- مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۲$ به‌صورت $\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^{۲}+m(۲+h)-۲m-n}{h}=۱۲$ می‌باشد. مقدار $m+n$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۸

آزمون ۶ مهر

۶۵- اگر تابع $y=f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) تابع f در این بازه اکیداً یکنواست.

۲) وارون تابع در این بازه یکنواست.

۳) با فرض $f(a)f(b)<۰$ تابع در این بازه فقط یک ریشه دارد.

۴) با فرض $f(a)f(b)>۰$ ممکن است تابع در این بازه ریشه داشته باشد.

آزمون ۶ مهر

۶۶- اگر به ازای هر مقدار حقیقی x رابطهٔ $x^۲ \le f(x) - ۲x \le ۲x - ۱$ برقرار باشد، آنگاه $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{f(x)}{۳ - ۲f(x^۲)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) صفر

آزمون ۶ مهر

۶۷- مجموع همهٔ مقادیر a که به ازای آن‌ها تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x+۱ & ; x \ge a \\ \frac{۱}{x} - a & ; x < a \end{cases}$ در $x = a$ پیوسته است، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) -۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

آزمون ۶ مهر

۶۸- کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟ ($[\ ]$، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\left[\sin \frac{n\pi}{۲}\right]$ ۲) $\left[\frac{n+۲}{n}\right] \cos n\pi$

۳) $\left[\frac{n^۲}{n^۲+۱}\right] \sin \frac{n\pi}{۲}$ ۴) هر سه دنباله همگرا هستند.

آزمون ۶ مهر

۶۹- از نقطهٔ $A(۱,۵)$ دو مماس بر منحنی $f(x) = x - x^۲$ رسم شده است. مجموع عرض‌های نقاط تماس کدام است؟

۱) ۶ ۲) -۱۴ ۳) -۱۰ ۴) -۶

آزمون ۶ مهر

۷۰- دنباله‌های $a_n = \sqrt{\frac{n+۱}{n+۲}}$ و $b_n = \sqrt[۳]{\frac{n+۲}{n+۱}}$ به‌ترتیب ..... و ..... هستند.

۱) صعودی - صعودی ۲) صعودی – نزولی ۳) نزولی - صعودی ۴) نزولی - نزولی

آزمون ۶ مهر

۷۱- اگر f تابع وارون‌پذیر و $g(x) = f(\sqrt{x})$ و $f(۲) = f'(۲) = ۸$ باشد، آنگاه $\left(g^{-۱}\right)'(۸)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۲- حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^۲+۱}}{x+\sqrt{x^۲+۳}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

آزمون ۶ مهر

۷۳- فرض کنید $f(x^۲)=\int_۱^x \frac{t}{۱+t^۳}dt$ باشد. خط مماس بر $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$، چه مساحتی با محورهای مختصات می‌سازد؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

آزمون ۶ مهر

۷۴- در تابع $f(x)=x^۲e^x$ مجموع طول‌های نقاط عطف و نقطهٔ ماکسیمم نسبی، کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) ۶- ۴) ۸-

آزمون ۶ مهر

۷۵- مجانب مایل $y=e^{-x}\sin ۳x+x$ کدام خط زیر است؟

۱) $y=-x$ ۲) $y=x$ ۳) $y=ex$ ۴) مجانب مایل ندارد.

آزمون ۶ مهر

۷۶- حاصل حد $\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^+}\frac{\sqrt{۱+\sin ۲x}}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

آزمون ۶ مهر

۷۷- بیش‌ترین فاصلهٔ نمودار تابع $y=\frac{۲(x^۲+x+۱)}{x^۲+۱}$ از محور xها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۸- مقدار میانگین تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ در بازهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$

۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

آزمون ۶ مهر

۷۹- خط قائم بر منحنی $y=x^3-x$ در نقطهٔ عطف منحنی، نمودار تابع را در دو نقطهٔ دیگر نیز قطع می‌کند. حاصل‌ضرب طول‌های این نقاط کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$

۳) ۲ ۴) -2

آزمون ۶ مهر

۸۰- هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعدهٔ a و ارتفاع h که در آن $4a+3h=12$ می‌باشد، مفروض است. بیشترین حجم هرم چقدر است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) $\frac{16}{9}$

آزمون ۶ مهر

هندسه‌ی تحلیلی - ۱۰ سوال

۸۱- در متوازی‌الاضلاعی که بر بردارهای $a=2i+3j+4k$ و $b=5i+2k$ بنا می‌شود، زاویهٔ بین قطرها کدام است؟

۱) 90° ۲) 60°

۳) 45° ۴) 30°

آزمون ۶ مهر

۸۲- به ازای کدام مقدار m، سه بردار $a=(1,m,-1)$ ، $b=(2,1,1)$ و $c=(1,-m,1)$ روی یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) -2

۳) ۲ ۴) -1

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۳- طول عمود مشترک دو خط متنافر $D: \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ و $D': \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ z = 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) ۳

۴) $\frac{1}{3}$

آزمون ۶ مهر

۸۴- بر خط L به معادله‌های $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{2}$، چند نقطه می‌توان یافت که به فاصلهٔ ۳ از صفحهٔ به معادلهٔ $P: 2x + 2y - z + 5 = 0$ باشند؟

۱) بی‌شمار

۲) ۲

۳) ۱

۴) صفر

آزمون ۶ مهر

۸۵- مستطیلی طوری بر یک بیضی محیط شده است که ضلع‌های آن موازی با قطرهای بزرگ و کوچک بیضی‌اند. اگر خروج از مرکز این بیضی برابر $\frac{\sqrt{5}}{3}$ و اختلاف اندازهٔ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین قطر آن برابر ۱ باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۱۲

آزمون ۶ مهر

۸۶- اگر M نقطه‌ای روی هذلولی $5x^2 - 4y^2 - 10x - 15 = 0$ باشد، کمترین مقدار مجموع فواصل این نقطه از دو کانون هذلولی کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

آزمون ۶ مهر

۸۷- ماتریس $A = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ با اثر روی نقاط روی محیط و درون دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$، آن‌ها را به محیط و درون یک مقطع مخروطی می‌نگارد. فاصلهٔ کانون تا مرکز این مقطع مخروطی کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$

۲) $2\sqrt{5}$

۳) $3\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{6}$

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۸- مساحت محدود به نمودار به معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ و محورهای مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{۱۰۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵۰}{۳}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ۴) ۱۵

آزمون ۶ مهر

۸۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۰ & \frac{۲}{۳} & -۱ \end{bmatrix}$ و $AA^* = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $a+b+c$ کدام است؟ (A^* ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است)

۱) ۸- ۲) ۸

۳) ۶- ۴) ۴-

آزمون ۶ مهر

۹۰- $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ با دترمینان مثبت، ماتریس ضرایب دستگاه $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است. اگر $A^* = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، آنگاه جواب این دستگاه کدام است؟ (A^* ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌های A است)

۱) $x=۱, y=۲, z=۳$ ۲) $x=۲, y=۱, z=۳$

۳) $x=۱, y=۳, z=۲$ ۴) $x=۲, y=۳, z=۱$

آزمون ۶ مهر

ریاضیات گسسته - ۱۰ سوال

۹۱- در گراف ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۱ داریم $\Delta = ۹$ و $\delta = ۶$. کم‌ترین اندازهٔ این گراف کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳

۳) ۳۴ ۴) ۳۵

آزمون ۶ مهر

دانلود از سایت ریاضی سرا www.riazisara.ir

۹۲- گراف همبند G مفروض است. اگر با حذف هر کدام از یال‌های آن، گراف ناهمبند شود، حاصل‌ضرب مرتبه در اندازهٔ این گراف، کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۲۵
۲) ۲۰
۳) ۱۵
۴) ۱۰

آزمون ۶ مهر

۹۳- عدد صحیح a مضرب ۱۷ نبوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۷، یک واحد کم‌تر از مکعب خارج‌قسمت آن می‌باشد. مجموع ارقام a کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

آزمون ۶ مهر

۹۴- اگر مجموع دو عدد طبیعی برابر ۶۸ و کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد، ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها باشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۱۷

آزمون ۶ مهر

۹۵- کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن $A = 5^{19} + a$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۹
۴) ۱۰

آزمون ۶ مهر

۹۶- رابطهٔ R تعریف شده روی مجموعهٔ ۵ عضوی A، دارای خاصیت‌های تقارنی و پادتقارنی است. اگر این رابطه بازتابی نباشد، حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۱۴
۴) چنین رابطه‌ای وجود ندارد.

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۷- معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 11$، چند جواب صحیح با شرط $x_i \geq i + 1$ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

آزمون ۶ مهر

۹۸- احتمال آن‌که در بیست سال آینده زن و شوهری زنده بمانند به ترتیب برابر ۰/۷ و ۰/۴ است. احتمال این‌که فقط یکی از آن‌ها در بیست سال آینده زنده بماند، چقدر است؟

۱) ۰/۸۲ ۲) ۰/۵۴

۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۷۲

آزمون ۶ مهر

۹۹- دو ظرف داریم، اولی شامل ۴ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه و دومی شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه می‌باشد. یکی از دو ظرف را به دلخواه انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن، خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهرهٔ انتخابی، همرنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{8}{15}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

آزمون ۶ مهر

۱۰۰- از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد انتخاب شده باشد، $P(X \leq 2)$ چقدر است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۳

۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۶۱- (مرضیه کودرزی)

با توجه به اینکه تابع داخل انتگرال فرد و بازهٔ انتگرال متقارن است، پس جواب انتگرال صفر خواهد شد.

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

۶۲- (حمیدرضا کلاته)

بازهٔ $|x-x_0|<\delta$ بیانگر همسایگی متقارنی به مرکز x_0 و شعاع δ است.

همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(۱): |x+۳|<۲ \Rightarrow \begin{cases} x_0=-۳ \\ \delta=۲ \end{cases} \Rightarrow x_0+\delta=-۱$$

$$(۲): |x-۳|<۲ \Rightarrow \begin{cases} x_0=۳ \\ \delta=۲ \end{cases} \Rightarrow x_0+\delta=۵$$

$$(۳): ۲|x+۲|<۶ \Rightarrow |x+۲|<۳ \Rightarrow \begin{cases} x_0=-۲ \\ \delta=۳ \end{cases} \Rightarrow x_0+\delta=۱$$

بازهٔ گزینهٔ «۴» نیز در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف‌ناپذیر است؛ زیرا

$$|x-x_0|\geq ۰$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

۶۳- (مهدی حاجی‌نژادیان)

در دنبالهٔ $a_{n+1}=\sqrt{1-a_n}$ با فرض $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = I$ که $I>0$ داریم:

$$I=\sqrt{1-I} \Rightarrow I^2+I-1=0 \Rightarrow I=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow I=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ولی این جواب همگرایی نیست، زیرا اگر دنباله را بنویسیم، تمام جملات صفر و ۱ می‌شوند:

$\{1,0,1,0,1,\ldots\}$: واگرای نوسانی

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر

۶۴- (سعید جعفری کافی آباد)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(4+4h+h^2\right)+\left(2m+mh\right)-2m-n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+\left(8+m\right)h+8-n}{h}=12$$

$\left(8-n\right)$ باید صفر باشد؛ یعنی $n=8$ در غیر این‌صورت حاصل حد، $\pm\infty$ خواهد شد. همچنین:

$$8+m=12 \Rightarrow m=4 \Rightarrow m+n=12$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن: صفحه‌های ۱۲۴ و ۱۲۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

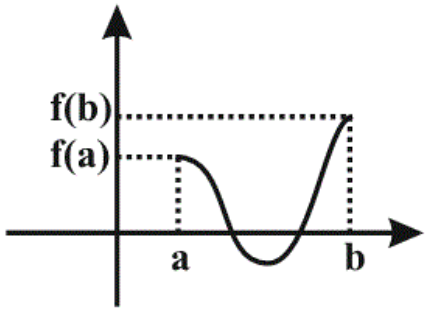
-۶۵

برای آنکه گزینهٔ «۱» برقرار باشد، تابع باید یک به یک نیز باشد.

برای آنکه گزینهٔ «۲» برقرار باشد، تابع f باید در این بازه یکنوا باشد.

در گزینهٔ «۳» تابع در این بازه حداقل یک ریشه خواهد داشت نه فقط یک ریشه!

گزینهٔ «۴» صحیح است. به شکل زیر توجه کنید که در آن $f(a)f(b)>0$ ولی تابع در این بازه ریشه دارد.



(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر

۶۶- (حمید علیزاده)

$$۲x-۱\le f(x)-۲x\le x^۲ \Rightarrow ۴x-۱\le f(x)\le x^۲+۲x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(۴x-۱)=\lim_{x\to ۱}(x^۲+۲x)=۳ \xrightarrow{\text{طبق قضیهٔ فشردگی}}$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x^۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{۳-۲f(x^۲)}=\frac{۳}{۳-۲(۳)}=\frac{۳}{-۳}=-۱$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

۶۷- (میلاد منصوری)

باید:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)=۲a+۱$$

$$\Rightarrow ۲a+۱=\frac{۱}{a}-a \Rightarrow ۳a+۱=\frac{۱}{a} \Rightarrow ۳a^۲+a-۱=۰$$

$$\Rightarrow a_۱+a_۲=-\frac{۱}{۳}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۶۸- (پیمان بهرام)

$\frac{x^۲}{x^۲+۱} < ۱ > ۰$؛ بنابراین برای هر عدد طبیعی داریم: $\left[\frac{n^۲}{n^۲+۱}\right] = ۰$؛ در نتیجه $\left[\frac{n^۲}{n^۲+۱}\right] \sin\frac{n\pi}{۲}$ به صفر همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

۶۹- (حمید علیزاده)

$$f(x) = x - x^۲ = \frac{۱}{۴} - \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ \quad , \quad f'(x) = ۱ - ۲x$$

$$y_A - f(x) = f'(x)(x_A - x)$$

$$۵ - x + x^۲ = (۱ - ۲x)(۱ - x) \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲ = ۱ \pm \sqrt{۵} \Rightarrow y_۱, y_۲ = \frac{۱}{۴} - \left(\frac{۱}{۲} \pm \sqrt{۵}\right)^۲ = -۵ \pm \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow y_۱ + y_۲ = -۱۰$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۰ (آرین حیدری)

دنبالهٔ $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}$ یک دنبالهٔ صعودی است. حال وقتی یک تابع اکیداً صعودی (مثل رادیکال) روی آن اثر کند، یکنوایی را تغییر نمی‌دهد و لذا دنبالهٔ حاصل یعنی $\left\{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right\}$ نیز صعودی است.

به طریق مشابه، دنبالهٔ $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$ یک دنبالهٔ نزولی است، که بعد از اثر کردن تابع اکیداً صعودی رادیکال، همچنان نزولی خواهد ماند.

(دیفرانسیل - دنباله‌ها: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۱ (سعید جعفری کافی آباد)

$$g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)\Rightarrow g(۴)=f(۲)=۸$$

$$\Rightarrow (۴,۸)\in g\Rightarrow (۸,۴)\in g^{-۱}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'\left(\sqrt{x}\right) \\ \left(g^{-۱}\right)'(x)=\frac{۱}{g'\left(g^{-۱}(x)\right)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(۴)=\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۴}\times ۸=۲\Rightarrow \left(g^{-۱}\right)'(۸)=\frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۷۲ (سعید مدیرخراسانی)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}=\frac{-\infty+\infty}{-\infty+\infty}=\text{مبهم}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را یک بار در مزدوج صورت و یک بـار در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}\times\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x^2-\left(x^2+3\right)}\times\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{-3}\times\frac{x-|x|}{x-|x|}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\times\frac{x+x}{x+x}\right)=\frac{1}{3}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

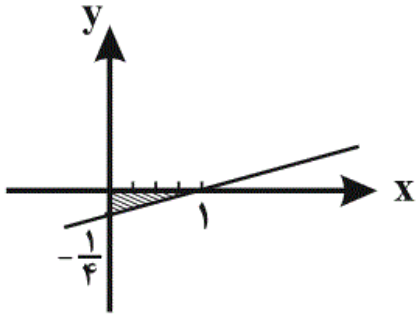
-۷۳ (امیرهوشنگ خمسه)

$$x=۱\Rightarrow f(۱)=۰$$

$$f(x^۲)=\int_۱^x \frac{t}{۱+t^۳}dt \Rightarrow ۲xf'(x^۲)=\frac{x}{۱+x^۳} \xrightarrow{x=۱} ۲f'(۱)=\frac{۱}{۲}$$

$$f'(۱)=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{معادلهٔ خط مماس}: y-۰=\frac{۱}{۴}(x-۱)$$

مساحت قسمت هاشور خورده: $S=\frac{\frac{۱}{۴}\times ۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$



(دیفرانسیل - انتگرال: صفحهٔ ۲۴۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$f(x)=x^{۲}e^{x}\Rightarrow f'(x)=۲xe^{x}+x^{۲}e^{x}=\left(۲x+x^{۲}\right)e^{x}=۰$$

$$\Rightarrow ۲x+x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰,x=-۲$$

x		-۲		۰	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow$ طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی $=-۲$

$$f''(x)=(۲+۲x)e^{x}+\left(۲x+x^{۲}\right)e^{x}=\left(۲+۴x+x^{۲}\right)e^{x}$$

$$۲+۴x+x^{۲}=۰\Rightarrow x=\frac{-۴\pm\sqrt{۸}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۲}\Rightarrow$$

هر دو، نقاط عطف منحنی تابع‌اند؛ زیرا تابع در این نقطه‌ها مشتق‌پـذیر بـوده و

جهت تقعر آن عوض می‌شود.

مجموع طول نقاط عطف و نقطهٔ ماکسیمم نسبی برابر است با:

$$\left(-۲+\sqrt{۲}\right)+\left(-۲-\sqrt{۲}\right)+(-۲)=-۶$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵ و ۱۸۰ تا ۱۸۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۷۵-

(امیرحسین افشار)

باتوجه به تعریف کتاب درسی داریم:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\sin ۳x + x}{x} = ۱$$

$$h = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(e^{-x}\sin ۳x + x - x\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \text{مجانب مایل} : y = mx + h = x$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\tan x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}{1+\tan x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\frac{|\sin x+\cos x|}{1+\tan x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\frac{-(\sin x+\cos x)}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}(-\cos x)=-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

بیشترین فاصله از محور x ها، قدرمطلق ماکسیمم یا مینیمم مطلق تابع است؛

بنابراین کافی است ماکسیمم و مینیمم مطلق آن را حساب کنیم.

$$y = \frac{۲\left(x^۲ + ۱\right) + ۲x}{x^۲ + ۱} = ۲ + \frac{۲x}{x^۲ + ۱}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۲ - ۲x^۲}{\left(x^۲ + ۱\right)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۱ \Rightarrow y_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۱ \Rightarrow y_۲ = ۳ \end{cases}$$

در نتیجه بیشترین فاصلهٔ تابع از محور x ها، ۳ خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

-۷۸ (کیا مقدس نیاک)

$$\frac{۱-\cos x}{۲}=\sin^{۲}\frac{x}{۲}\Rightarrow f(x)=\left|\sin\frac{x}{۲}\right|\xrightarrow{۰\le x\le\pi} f(x)=\sin\frac{x}{۲}$$

$$\text{مقدار میانگین}=\frac{\int_{۰}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{۲}\right)dx}{\pi-۰}=\frac{-۲\cos\frac{x}{۲}\Big|_{۰}^{\pi}}{\pi}$$

$$=\frac{-۲\left(\cos\frac{\pi}{۲}-\cos۰\right)}{\pi}=\frac{-۲(۰-۱)}{\pi}=\frac{۲}{\pi}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحهٔ ۲۳۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d = x^{۳} - x \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰ \\ c = -۱ \\ d = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طول نقطهٔ عطف} : x = \frac{-b}{۳a} = ۰$$

$$\text{مختصات نقطهٔ عطف} : A\Big|_{۰}^{۰} \Rightarrow \text{شیب مماس} = ۳(۰)^{۲} - ۱ = -۱$$

$$\text{شیب قائم} = \frac{-۱}{\text{شیب مماس}} = \frac{-۱}{-۱} = ۱ \Rightarrow \text{معادلهٔ خط قائم} \Rightarrow y = x$$

$$\text{محل‌های تلاقی} : x^{۳} - x = x \Rightarrow x^{۳} - ۲x = ۰$$

$$x\left(x^{۲} - ۲\right) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = -\sqrt{۲}, x = +\sqrt{۲}$$

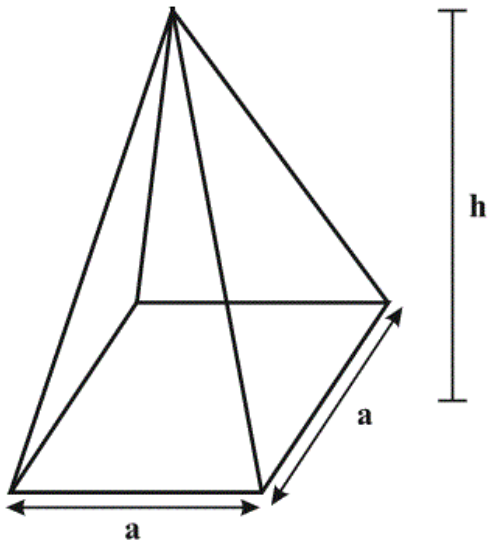
طول محل‌های دیگر تلاقی، $+\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هستند که حاصل‌ضرب آن‌ها ۲- می‌شود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶ و ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۰



$$V = \frac{۱}{۳}a^۲h \qquad (۱)$$

$$۴a + ۳h = ۱۲ \Rightarrow h = \frac{۱۲ - ۴a}{۳} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow V(a) = \frac{۱}{۳}a^۲\left(\frac{۱۲ - ۴a}{۳}\right) = \frac{۱}{۹}\left(۱۲a^۲ - ۴a^۳\right)$$

$$\Rightarrow V'(a) = \frac{۱}{۹}\left(۲۴a - ۱۲a^۲\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ & \text{غ.ق.ق} \\ a = ۲ \Rightarrow V_{max} = \frac{۱۶}{۹} \end{cases}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربردهای آن؛ صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر

-۸۱ (امیرحسین ابومحبوب)

$\mathbf{a+b=7i+3j+6k}$ و $\mathbf{a-b=-3i+3j+2k}$

قطرهای متوازی‌الاضلاع، بردارهای $\mathbf{a+b}$ و $\mathbf{a-b}$ می‌باشند که کافی است زاویهٔ بین آنها را محاسبه کنیم.

$$\cos\theta=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{|a+b||a-b|}=0\Rightarrow\theta=90^\circ$$

راه دوم: چون اندازهٔ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم برابر است پس دو بردار، یک لوزی تشکیل می‌دهند و در نتیجه قطرهای آنها بر هم عمودند.

(هندسه تحلیلی- بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

-۸۲ (محمدابراهیم گیتی‌زاده)

اگر سه بردار در یک صفحه باشند، حجم متوازی‌السطوح بنا شده روی این سه بردار برابر صفر است:

$$V=|a.(b\times c)|=0, b\times c=(2,1,1)\times(1,-m,1)$$

$$=(m+1,-1,-2m-1)$$

$$\Rightarrow V=|(1,m,-1).(m+1,-1,-2m-1)|=0$$

$$\Rightarrow m=-1$$

(هندسه تحلیلی- بردارها: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

نقطـــــهٔ $A(۰,۵,۰)$ روی D و نقطـــــهٔ $B(۰,۰,۰)$ روی D' قـــــرار دارد، پس $\overrightarrow{AB} = (۰,-۵,۰)$. طول عمود مشترک برابر با فاصلهٔ دو صـفحهٔ مـوازی یکی شامل خط D و دیگری شامل D' است.

چون $u_D = (۰,۰,۱)$ و $u_{D'} = (۳,۴,۰)$ بردارهای هادی دو خط داده شده‌اند، پس بردار نرمال صفحات موازی $n = (۰,۰,۱) \times (۳,۴,۰) = (-۴,۳,۰)$ اسـت.

با توجه به فرمول فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه داریم:

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|n.\overrightarrow{AB}|}{|n|}$$

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

بردار هادی خط L و بردار نرمال صفحهٔ P به ترتیب عبارتند از $\mathbf{u_L} = (-۲,۳,۲)$ و $\mathbf{n_P} = (۲,۲,-۱)$.

از طرفی $\mathbf{u_L}.\mathbf{n_P} = -۴+۶-۲ = ۰$، بنابراین دو بردار بر هم عمودند یا به عبارت دیگر خط L با صفحهٔ P موازی است. اکنون کافی است فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه از خط L را از صفحهٔ P به دست آوریم. اگر این فاصله برابر ۳ باشد، بی‌شمار جواب وجود دارد و در غیر این صورت مسأله فاقد جواب است.

نقطهٔ $A = (۱,۲,۲)$ را روی خط L انتخاب می‌کنیم. فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ P برابر است با:

$$D = \frac{|۲(۱)+۲(۲)-۲+۵|}{\sqrt{۲^۲+۲^۲+(-۱)^۲}} = \frac{۹}{۳} = ۳$$

پس فاصلهٔ هر نقطه از خط L تا صفحهٔ P برابر ۳ واحد است، یعنی بی‌شمار جواب داریم.

(هندسه تحلیلی- خط و صفحه: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

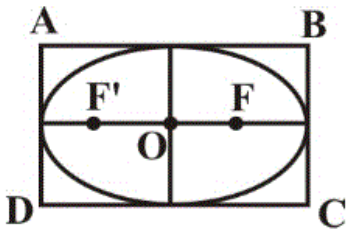
۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

-۸۵ (نوید مجیدی)

$$AB = ۲a, BC = ۲b$$

$$\begin{cases} ۲a - ۲b = ۱ \Rightarrow a - b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = a - \frac{۱}{۲} \\ e = \sqrt{۱ - (\frac{b}{a})^۲} = \frac{\sqrt{۵}}{۳} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}a = a - \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}, b = ۱$$

$$\text{مساحت مستطیل} = AB \times BC = ۲ \times \frac{۳}{۲} \times ۲ \times ۱ = ۶$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

-۸۶ (امیرحسین ابومحبوب)

زمانی مجموع فواصل یک نقطه روی هذلولی از دو کانون آن حداقل است که آن نقطه یکی از رئوس هذلولی باشد، (طبق نامساوی مثلثی، این نکته به راحتی قابل اثبات است) در این صورت مجموع فواصل از دو کانون برابر است با:

$$(c + a) + (c - a) = ۲c$$

$$۵(x^۲ - ۲x + ۱) - ۵ - ۴y^۲ = ۱۵ \Rightarrow ۵(x - ۱)^۲ - ۴y^۲ = ۲۰$$

$$\Rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۵} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۴ \\ b^۲ = ۵ \end{cases}$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۹ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow ۲c = ۶$$

(هندسه تحلیلی- مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۷ (نوید مجیدی)

اگر فرض کنیم هر نقطهٔ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با اثر ماتریس روی آن به نقطهٔ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ برده می‌شود، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۶} & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \sqrt{۶}x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{۶}} \\ y = -y' \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ دایره}} (\frac{x'}{\sqrt{۶}})^۲ + (-y')^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{x'^۲}{۶} + y'^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{x'^۲}{۲۴} + \frac{y'^۲}{۴} = ۱$$

معادلهٔ اخیر یک بیضی با مشخصات $a^۲ = ۲۴$ و $b^۲ = ۴$ است، از آن جا که $c = \sqrt{a^۲ - b^۲}$، پس $c = \sqrt{۲۴ - ۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$ (توجه: فاصلهٔ مرکز بیضی تا هر کدام از کانون‌ها، همواره برابر c است).

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۰۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

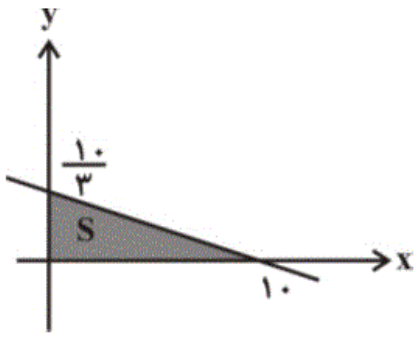
آزمون ۶ مهر

نمودار به معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ یک خط است. محل تلاقی آن را با محورهای مختصات به شرح زیر به‌دست می‌آوریم:

$$y=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} x & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -x+۲(۳+۲)=۰ \Rightarrow x=۱۰$$

$$x=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۰ & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow -y(۳-۰)+۲(۲+۳)=۰ \Rightarrow y=\frac{۱۰}{۳}$$



$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۳}\times۱۰=\frac{۵۰}{۳}$$

(هندسه تحلیلی- ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۱۱ صفحهٔ ۱۲۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به این‌که $AA^{*}=|A|I=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 0\\ 0 & |A| & 0\\ 0 & 0 & |A|\end{bmatrix}$ ، پس باید در

آغاز کار $|A|$ را بیابیم.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -1\\ 0 & \frac{2}{3} & -1\end{vmatrix}$$ سطر اول را از سطر دوم کم می‌کنیم.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & \frac{2}{3} & -1\end{vmatrix}$$ بسط نسبت به ستون اول $$|A|=1\times\begin{vmatrix}2 & -1\\ \frac{2}{3} & -1\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)-\frac{2}{3}\times(-1)=-\frac{4}{3}$$

پس باید $a=b=c=|A|=\frac{-4}{3}$ باشد، که نتیجه می‌دهد

$$a+b+c=3\,|A|=-4.$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$|A^*| = \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{vmatrix} = ۱$$

$$|A^*| = |A|^۲ \Rightarrow |A|^۲ = ۱ \xrightarrow{|A|>۰} |A| = ۱$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} A^* = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \\ z = ۳ \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی- دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- (نوید مجیدی)

برای این که گراف کم‌ترین اندازه (تعداد یال‌ها) را داشته باشد، باید تعداد رأس‌های از درجهٔ $\Delta = ۹$ آن، حداقل و تعداد رأس‌های از درجهٔ $\delta = ۶$ آن، حداکثر باشند. پس باید ۱ رأس از درجهٔ ۹ باشد، حال ۱۰ رأس باقی‌مانده نمی‌توانند همگی از درجهٔ ۶ باشند چرا که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد و تنها یک رأس درجهٔ ۹ ممکن نیست، پس کم‌ترین مقدار فرد برای رأس فرد بعدی، ۷ است. حال با توجه به دنبالهٔ درجات ۹,۷,۶,۰۰۰,۶ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{۱۱} \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۹ + ۷ + ۹ \times ۶ = ۲q_{min} \Rightarrow q_{min} = \frac{۷۰}{۲} = ۳۵$$

(ریاضیات گسسته- گراف: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر

۹۲- (علیرضا سیف)

گراف همبندی که با حذف هر کدام از یال‌هایش ناهمبند شود، یک درخت است. بنابراین $q = p - ۱$، در نتیجه حاصل‌ضربی به‌صورت $p(p-۱)$ می‌خواهیم که تنها گزینهٔ ۲، حاصل‌ضرب دو عدد متوالی است.

(ریاضیات گسسته- گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۳ (محسن فاطمی)

در تقسیم a بر ۱۷، اگر q خارج‌قسمت و r باقیمانده باشد، داریم:

$$a = ۱۷q + r, ۰ \le r < ۱۷ \xrightarrow{r \neq ۰} ۰ < r < ۱۷$$

$$r = q^۳ - ۱ \Rightarrow ۰ < q^۳ - ۱ < ۱۷ \Rightarrow ۱ < q^۳ < ۱۸ \Rightarrow q = ۲$$
$$\Rightarrow a = ۱۷(۲) + ۷$$

$$a = ۴۱ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۵$$

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

اگر d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و D کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشد، آنگاه می‌توانیم a و b را به‌صورت $a = a'd$ و $b = b'd$ که $(a', b') = ۱$ و D را به‌صورت $D = a'b'd$ بنویسیم. داریم:

$$D = ۶۰d \Rightarrow a'b' = ۶۰ \xrightarrow[(a',b')=۱]{a'>b'} \begin{cases} a' = ۶۰, b' = ۱ \\ a' = ۲۰, b' = ۳ \\ a' = ۱۵, b' = ۴ \\ a' = ۱۲, b' = ۵ \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$a + b = ۶۸ \Rightarrow (a' + b')d = ۶۸ \Rightarrow a' + b' \mid ۶۸$$

بنابراین تنها جواب قابل قبول، $a' = ۱۲$ و $b' = ۵$ است، یعنی $d = ۴$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (محمودرضا اسلامی)

قضیهٔ فرما: $5^{10} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 5^{20} \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 5^{20} \overset{11}{\equiv} 1 - 11 \overset{11}{\equiv} -10$

طرفین هم‌نهشتی را بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5^{19} \overset{11}{\equiv} -2$$

با توجه به $5^{19} + a \overset{11}{\equiv} 0$ می‌نویسیم:

$$(-2) + a \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow a = 11k + 2$$

پس کوچک‌ترین عدد طبیعی a، برابر ۲ است.

(ریاضیات گسسته- نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

۹۶- (کاظم باقرزاده چهره)

وجود دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی باعث می‌شود که R تنها زوج‌های بازتابی را بپذیرد و چون رابطه فاقد خاصیت بازتابی است، برای این که حداکثر اعضاء را داشته باشد، باید چهار زوج از پنج زوج بازتابی در R موجود باشد.

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۷

با توجه به شرط $x_i \geq i+1$، سه متغیر y_1، y_2 و y_3 را می‌توان در معادله

جایگزین کرد.

با شرط $x_1 = y_1 + 2$ و $x_2 = y_2 + 3$ و $x_3 = y_3 + 4$، داریم:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 11 - 9 = 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

بنابراین تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

(ریاضیات گسسته- ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

-۹۸

اگر A و B به ترتیب پیشامد زنده ماندن زن و پیشامد زنده ماندن شوهر باشد، آنگاه این دو پیشامد، مستقل از یکدیگرند و احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A \cap B') + P(B \cap A') = P(A)P(B') + P(B)P(A')$$

$$= ۰/۷ \times ۰/۶ + ۰/۴ \times ۰/۳ = ۰/۵۴$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

آزمون ۶ مهر

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۶}{۲}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\binom{۷}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۵} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۱}{۴۵} = \frac{۱}{۲}(\frac{۸}{۱۵} + \frac{۷}{۱۵}) = \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۸۵ و ۸۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

آزمون ۶ مهر

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

عدد ۱، تنها عددی است که یک مقسوم‌علیه دارد و اعـداد اوّل تنهـا اعـدادی هستند که ۲ مقسوم‌علیه دارند، پس اعضای این پیشامد تصادفی عبارتند از:

$$\{۱,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$$

$$P(X \leq ۲) = \frac{\binom{۹}{۱}}{\binom{۲۰}{۱}} = \frac{۹}{۲۰} = ۰/۴۵$$

(ریاضیات گسسته- احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

۱ ۲ ۳ ۴✓

آزمون ۶ مهر