



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

حسابان 1 - 10 سوال

۸۱- معادله $\sqrt{3 + \sqrt{x - x^3}} = \sqrt{3}$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

آزمون 23 شهریور

۸۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x + \frac{1}{2}}{x} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱
(۲) صفر
(۳) ۱
(۴) ۲

آزمون 23 شهریور

۸۳- مجموع ۲۰ جمله اول دنباله با جمله عمومی $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2}$ کدام است؟

- (۱) -۱۰
(۲) -۵
(۳) ۵
(۴) ۱۰

آزمون 23 شهریور

۸۴- اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\beta^2(2 + 4\alpha)$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۲

آزمون 23 شهریور

۸۵- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ باشد، آن گاه دامنه تابع $f \circ f(x)$ بازه $[a, b]$ است. نقطه میانی این بازه کدام است؟

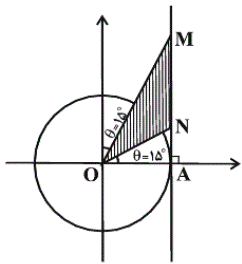
- ۱ (۱) ۲ (۲)
۳ (۳) ۴ (۴)

آزمون 23 شهریور

۸۶- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + \left[x^2 - \frac{3}{2} \right], & x > 2 \\ bx + \frac{|x-2|}{x-2} + a, & x < 2 \\ [x^2 - \sqrt{x}], & x = 2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است. حاصل $a \times b$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۳ (۱) ۵ (۲)
۴ (۳) ۸ (۴)

آزمون 23 شهریور



۸۷- در دایره مثلثاتی روبه‌رو، مساحت مثلث MON کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{3}$ (۲)
۲ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

آزمون 23 شهریور

۸۸- حاصل عبارت $A = \frac{1 - 2 \sin 145^\circ \sin 55^\circ}{\sin^2 10^\circ}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

آزمون 23 شهریور

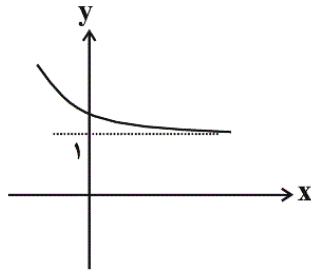
۸۹- اگر $f \circ f^{-1} = \{(a, a)(b, b)(c, c)\}$ و $f^{-1} \circ f = \{(d, d)(e, e)(f, f)\}$ باشند، آن گاه تابع f^{-1} به چند صورت مختلف می‌تواند نوشته

شود؟

- ۳ (۱) ۲۷ (۲)
۶ (۳) ۱۸ (۴)

آزمون 23 شهریور

۹۰- اگر نمودار تابع $y = n + (2m - m^2)^x$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام می‌باشد؟



(۱) $(0, 2)$

(۲) $(0, 2) - \{1\}$

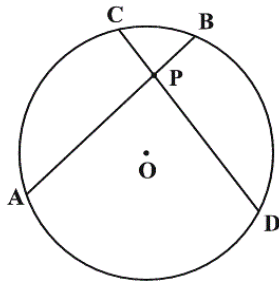
(۳) $(2, +\infty)$

(۴) $\mathbb{R} - \{1\}$

آزمون 23 شهریور

هندسه 2 - 10 سوال

۹۱- مطابق شکل دو وتر با طول‌های یکسان در نقطه P متقاطع‌اند. اگر O مرکز دایره باشد، در این صورت کدام گزینه نادرست است؟



(۱) O روی عمود منصف AB است.

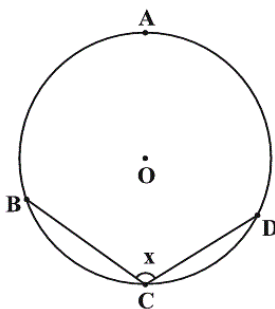
(۲) O روی نیمساز \widehat{APD} است.

(۳) $\widehat{OAP} > \frac{1}{2} \widehat{APD}$

(۴) $AP = DP$

آزمون 23 شهریور

۹۲- در شکل زیر $\widehat{AB} - \widehat{CD} = 40^\circ$ و $\widehat{AD} - \widehat{BC} = 30^\circ$. اندازه x چند درجه است؟



(۱) $101/5$

(۲) 203

(۳) 215

(۴) $107/5$

آزمون 23 شهریور

۹۳- طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O, 3)$ و $C'(O', 8)$ برابر ۱۲ واحد است. بیش‌ترین فاصله نقاط دو دایره از هم چند برابر کم‌ترین فاصله آنها است؟

(۴) ۶

(۳) ۸

(۲) ۱۰

(۱) ۱۲

آزمون 23 شهریور

۹۴- در یک مثلث بین طول اضلاع، رابطه $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$ برقرار است. اگر شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث ۶ واحد باشد، طول

ارتفاع نظیر ضلع c کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۳
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵

آزمون 23 شهریور

۹۵- کدام یک از خط‌های زیر می‌تواند تصویر خط l به معادله $-2x + 3y = 1$ تحت یک انتقال باشد؟

- (۱) $3x - 2y = 1$
(۲) $2x + 3y = 1$
(۳) $4x - 6y = 3$
(۴) $6x - 4y = 3$

آزمون 23 شهریور

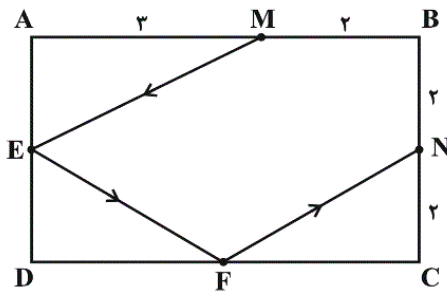
۹۶- دایره‌های $C(O, 3)$ و $C'(O', 6)$ مفروض‌اند. اگر $OO' = 15$ باشد، فاصله بین مراکز تناس‌هایی که دو دایره را به هم

تبدیل می‌کنند، کدام است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۲
(۳) ۱۵
(۴) ۲۰

آزمون 23 شهریور

۹۷- در شکل زیر نقاط E و F به ترتیب دو نقطه متحرک روی اضلاع AD و CD از مستطیل ABCD هستند. طول کوتاه‌ترین

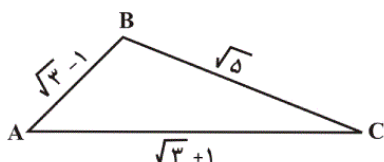


مسیر MEFN کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۸
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

آزمون 23 شهریور

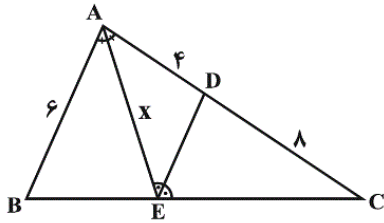
۹۸- در مثلث زیر، مقدار $\cos A$ کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{2}{3}$

آزمون 23 شهریور

۹۹- در شکل زیر، AE نیمساز \widehat{BAC} و DE نیمساز \widehat{AEC} است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AE کدام است؟



(۱) $2\sqrt{5}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۳) $3\sqrt{3}$

(۴) $4\sqrt{2}$

آزمون 23 شهریور

۱۰۰- در مثلثی با اضلاع ۵، ۶ و ۷، فاصله نقطه وسط ضلع متوسط از ضلع بزرگ‌تر کدام است؟

(۲) $\frac{6\sqrt{6}}{7}$

(۱) $\frac{3\sqrt{6}}{7}$

(۴) $\frac{6\sqrt{6}}{5}$

(۳) $\frac{3\sqrt{6}}{5}$

آزمون 23 شهریور

آمار و احتمال - 10 سوال

۱۰۱- گزاره $[p \vee (q \wedge p)] \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow p]$ هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (T گزاره همیشه درست است.)

(۴) $p \wedge q$

(۳) q

(۲) T

(۱) p

آزمون 23 شهریور

۱۰۲- اگر $A = \{x \mid x^2 < 0; x \in \mathbb{R}\}$ ، $B = \{\emptyset\}$ و $C = \{\{\emptyset\}\}$ کدام رابطه درست است؟

(۴) $C = A \cup B$

(۳) $A \in B$

(۲) $A = B$

(۱) $B \subseteq C$

آزمون 23 شهریور

۱۰۳- اگر $A = [-1, 2]$ و $B = \{-1, 2\}$ باشد، محیط شکل حاصل توسط عبارت $(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۶

(۲) ۱۲

(۱) ۸

آزمون 23 شهریور

۱۰۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست نیست؟

(الف) اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آن‌گاه پیشامدهای A' و B هم مستقل هستند.

(ب) اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیرمجموعه ناتهی باشند، E و F هم مستقل هستند.

(پ) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه $P(A|B) = 0$.

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) هیچ

آزمون 23 شهریور

۱۰۵- در یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد متناسب با همان عدد است. اگر A و B به ترتیب پیشامد آمدن عدد زوج و عدد اول در پرتاب این تاس باشند، $P(A|B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

آزمون 23 شهریور

۱۰۶- دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۴ مهره سفید و تعدادی مهره سیاه است. به تصادف از یکی از دو کیسه یک مهره بیرون می آوریم. اگر احتمال سفید بودن مهره خارج شده $\frac{7}{18}$ باشد، تعداد مهره های سیاه کیسه دوم کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

آزمون 23 شهریور

۱۰۷- اگر اطلاعات جدول فراوانی زیر، پس از کسر عدد ۹۵ از تمامی داده های اصلی و تقسیم هر یک از داده های به دست آمده بر عدد ۱۰۰ استنتاج شده باشد، میانگین موزون داده های اصلی کدام است؟

x_i	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲
w_i	۲	۴	۵	۶	۲	۱

- (۱) ۳۰ (۲) ۷۵ (۳) ۲۵ (۴) ۲۰

آزمون 23 شهریور

۱۰۸- ضریب تغییرات داده های ۳, ۴, ۴, ۶, ۶, ۷ تقریباً کدام است؟

- (۱) ۰/۱۸ (۲) ۰/۲۴ (۳) ۰/۲۱ (۴) ۰/۲۸

آزمون 23 شهریور

۱۰۹- قرار است از میان دانش آموزان پایه دوازدهم یک دبیرستان که با شماره های ۱ تا ۱۸۰ مشخص گردیده اند، تعدادی به روش نمونه گیری سامانمند برای انجام یک آزمون تستی انتخاب شوند. اگر شماره های اولین و چهارمین دانش آموز انتخاب شده به ترتیب ۶ و ۴۲ باشد، آنگاه این دانش آموزان به چند گروه تقسیم شده اند؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰

آزمون 23 شهریور

۱۱۰- بازه اطمینان بیش از ۹۵ درصد برای میانگین جامعه ای به صورت $(26/75, 32/75)$ می باشد. اگر واریانس این جامعه ۸۱ باشد، اندازه نمونه انتخاب شده کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۶۴ (۳) ۸۱ (۴) ۳۶

آزمون 23 شهریور

(سعید معفری کافی آباد)

$$\sqrt{3 + \sqrt{x - x^3}} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} 3 + \sqrt{x - x^3} = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - x^3} = 0 \xrightarrow{\text{توان } 2} x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ق.ق} \\ x = 1 & \text{ق.ق} \\ x = -1 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین معادله، ۳ جواب دارد.

(حسابان ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور

(یاسین سپهر)

تابع $f(x) = \frac{\left[x + \frac{1}{2}\right]}{x}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه این تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

اما برای $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 0$ و در نتیجه $f(x) = 0$ ؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(حسابان ۱ - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور

جملات فرد و زوج دنباله را جدا می‌کنیم:

$$\text{جملات فرد: } a_{2k-1} = O_k = (-1)^{2k-1} k = -k ; k = 1, \dots, 10$$

$$\Rightarrow O_1 + O_2 + \dots + O_{10} = -1 - 2 - 3 - \dots - 10 = -\frac{10 \times 11}{2} = -55$$

$$\text{جملات زوج: } a_{2k} = E_k = (-1)^{2k} \frac{2k+1}{2} = k + \frac{1}{2} ; k = 1, \dots, 10$$

$$\Rightarrow E_1 + E_2 + \dots + E_{10} = (1 + 2 + \dots + 10) + 10 \left(\frac{1}{2} \right) = 60$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = -55 + 60 = 5$$

(مسئله ۱ - جبر و معادله: صفحه ۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

آزمون 23 شهریور

(ابوالقاسم شعبانی)

α ریشه معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 1 \Rightarrow 2\alpha^2 = 4\alpha + 2$$

$$\beta^2 (4\alpha + 2) = 2\alpha^2 \beta^2 = 2(\alpha\beta)^2 = 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 2(-1)^2 = 2$$

(مسئله ۱ - جبر و معادله: صفحه‌های ۸ و ۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون 23 شهریور

کافی است تابع $f \circ f(x)$ را تشکیل دهیم.

$$f(x) = 2 - \sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} (1) \rightarrow f \circ f(x) = 2 - \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{باید}} 2 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow [a, b] = [0, 4] \xrightarrow{\text{نقطه میانی}} \frac{0 + 4}{2} = 2$$

(مسابقه ۱ - توابع: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

(یاسین سپهر)

$$f(2) = [2^3 - \sqrt{2}] = [8 - \sqrt{2}] = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(ax + \left[x^2 - \frac{3}{2} \right] \right) = 2a + \left[4 - \frac{3}{2} \right]$$

$$= 2a + 2 \Rightarrow 2a + 2 = 6 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(bx + \frac{|x-2|}{x-2} + 2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(bx + \frac{-(x-2)}{x-2} + 2 \right) = 2b - 1 + 2 = 6$$

$$\Rightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$a \times b = 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

(مسابقه ۱ - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

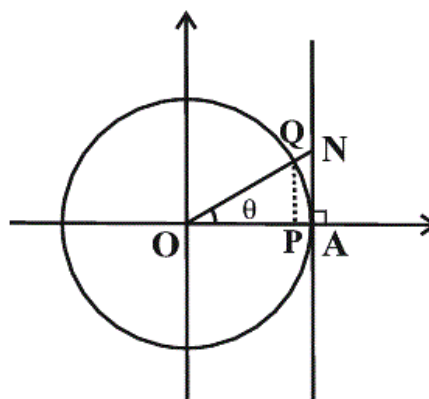
۳

۲ ✓

۱

آزمون 23 شهریور

(سید عادل حسینی)

با توجه به تشابه دو مثلث POQ و AON در شکل، می‌توان به این

$$|AN| = \tan \theta$$

بنابراین:

$$|MN| = \tan 75^\circ - \tan 15^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} - \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 75^\circ \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin(75^\circ - 15^\circ)}{\cos 75^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\sin 60^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta_{MON}} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |MN| = \frac{1}{2} (1) (2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

(مسابان ۱ - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور

$$A = \frac{1 - 2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ}{\sin^2 10^\circ} = \frac{1 - \sin 70^\circ}{\sin^2 10^\circ}$$

$$= \frac{1 - \cos 20^\circ}{\sin^2 10^\circ} = \frac{2 \sin^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ} = 2$$

(مسابان ۱ - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۱ و ۱۱۲)

۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور

$$f \circ f^{-1}(x) = x \xrightarrow{x \in D_{f^{-1}}} D_{f^{-1}} = \{a, b, c\}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x \xrightarrow{x \in D_f} D_f = R_{f^{-1}} = \{d, e, f\}$$

چون f^{-1} باید تابع یک به یک باشد در نتیجه خانه‌های خالی در تابع زیر

به $۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ حالت مختلف می‌توانند پر شوند.

$$f^{-1} = \left\{ (a, \boxed{۳}), (b, \boxed{۲}), (c, \boxed{۱}) \right\}$$

(مسئله ۱ - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۱ و ۶۶ تا ۶۹)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

با توجه به شکل با افزایش x ، y کاهش می‌یابد. لذا:

$$0 < 2m - m^2 < 1$$

با حل نامعادله بالا برای مجموعه مقادیر m داریم:

$$2m - m^2 < 1 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{1\} \quad (I)$$

$$2m - m^2 > 0 \xrightarrow{m(2-m) > 0} \begin{array}{c} | \quad \circ \quad + \quad 2 \\ - \quad | \quad | \quad | \quad - \end{array}$$

$$\Rightarrow m \in (0, 2) \quad (II)$$

$$I \cap II \Rightarrow m \in (0, 2) - \{1\}$$

(حسابان ۱ - توابع نمایی و لگاریتمی: صفحه‌های ۷۵ و ۷۶)

۴

۳

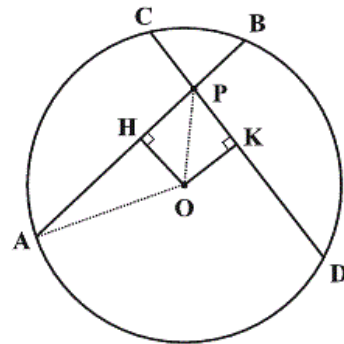
۲ ✓

۱

آزمون 23 شهریور

(علی فتح‌آبادی)

-۹۱



به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۲) می‌دانیم دو وتر مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند:

$$OH = OK \Rightarrow \widehat{APD} \text{ روی نیمساز } O$$

(۴) می‌دانیم قطر (شعاع) عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند:

$$\begin{cases} AH = \frac{AB}{2} \\ DK = \frac{CD}{2} \end{cases} \xrightarrow{AB=CD} AH = DK \quad (۱)$$

از طرفی چون OP نیمساز است، دو مثلث قائم‌الزاویه OPH و OPK به

حالت وتر و یک زاویه غیرقائم هم‌نهشت هستند، پس: $HP = KP$ و با

توجه به رابطه (۱)، داریم: $AP = PD$.

(۳) چون OP نیمساز است، پس: $\widehat{OPA} = \frac{1}{2} \widehat{APD}$.

در مثلث OPA داریم:

$$\begin{cases} OA = r \\ OP < r \end{cases} \Rightarrow OA > OP \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} \widehat{OPA} > \widehat{OAP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \widehat{APD} > \widehat{OAP}$$

بنابراین گزینه «۳» نادرست است.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

در دایره شکل مسئله داریم:

$$\begin{cases} \widehat{AB} - \widehat{CD} = 40^\circ \\ \widehat{AD} - \widehat{BC} = 30^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} (\widehat{AB} + \widehat{AD}) - (\widehat{CD} + \widehat{BC}) = 70^\circ \quad (\text{I})$$

از طرفی داریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{CD} + \widehat{BC} = 360^\circ \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{(\text{I}), (\text{II})} \widehat{AB} + \widehat{AD} = \frac{70^\circ + 360^\circ}{2} = 215^\circ$$

زاویه BCD محاطی است، پس اندازه آن برابر با $\frac{\widehat{BAD}}{2}$ است. داریم:

$$\widehat{BAD} = \widehat{AB} + \widehat{AD} = 215^\circ \Rightarrow x = \frac{\widehat{BAD}}{2} = 107.5^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴)

۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور

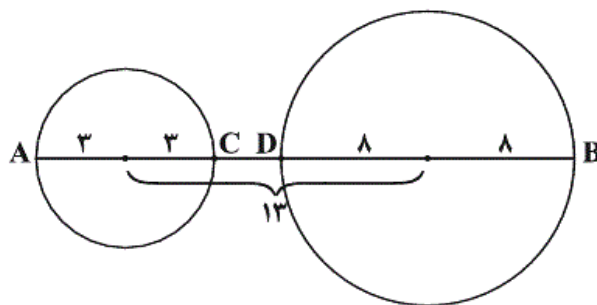
اگر فاصلهٔ مرکزهای دو دایره d باشد، داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی دو دایره} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow 12 = \sqrt{d^2 - (8 - 3)^2} \Rightarrow 144 = d^2 - 25$$

$$\Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13$$

$d > R + R' \Rightarrow$ دو دایره متخارج‌اند



$$\left. \begin{array}{l} \text{بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره} = AB = 13 + 3 + 8 = 24 \\ \text{کم‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره} = CD = 13 - (3 + 8) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{24}{2} = 12$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

می‌دانیم در مثلث، نسبت ارتفاع‌ها، برابر عکس نسبت اضلاع مثلث است؛ پس

داریم:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} \Rightarrow 3h_a = 5h_b = 6h_c$$

$$\Rightarrow h_a = 2h_c, h_b = \frac{6h_c}{5}$$

از طرفی اگر r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2h_c} + \frac{5}{6h_c} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{3+5+6}{6h_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow h_c = 14$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۴ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

تحت انتقال شیب خط ثابت می ماند، پس باید بینیم شیب کدام خط با خط داده شده برابر است.

$$-2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط مفروض} = \frac{2}{3}$$

در هر گزینه شیب خط را به دست می آوریم:

$$1) 3x - 2y = 1 \Rightarrow 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{3}{2}$$

$$2) 2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{3}$$

$$3) 4x - 6y = 3 \Rightarrow 6y = 4x - 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3}$$

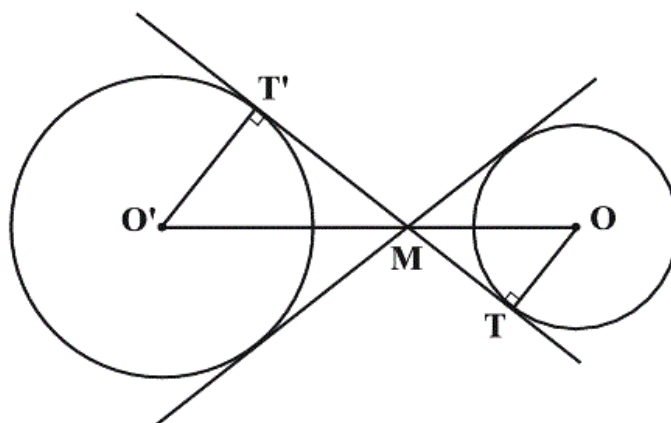
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

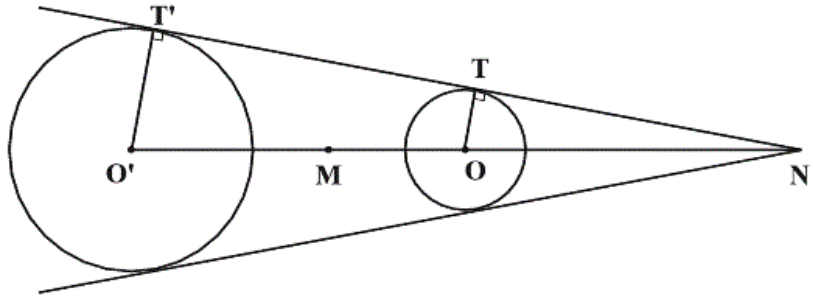
آزمون 23 شهریور



اگر M مرکز تجانس معکوس دو دایره باشد، داریم:

$$\Delta OTM \sim \Delta O'T'M \Rightarrow \frac{OT}{O'T'} = \frac{OM}{O'M}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{OM}{15 - OM} \Rightarrow OM = 5$$



اگر N مرکز تجانس مستقیم دو دایره باشد، داریم:

$$\Delta OTN \sim \Delta O'T'N \Rightarrow \frac{OT}{O'T'} = \frac{ON}{O'N}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{ON}{15 + ON} \Rightarrow ON = 15$$

و در نتیجه:

$$MN = OM + ON = 5 + 15 = 20$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

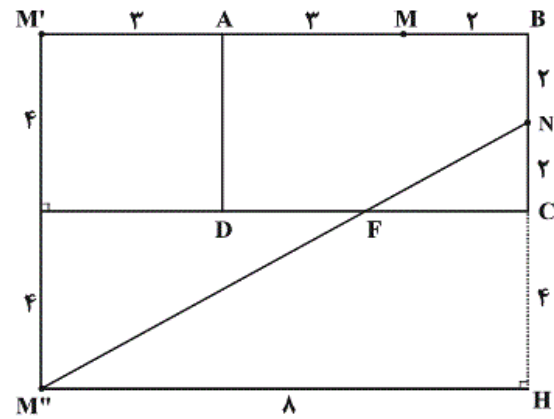
۴

۳

۲

۱

آزمون 23 شهریور



بنا به مسئله صفحه ۵۴ کتاب درسی هندسه ۲، قرینه M نسبت به AD را

M' و قرینه M' نسبت به CD را M'' می‌نامیم. طول $M''N$ طول

کوتاه‌ترین مسیر مورد نظر است.

بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث $M''NH$ داریم:

$$M''N^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow M''N = 10$$

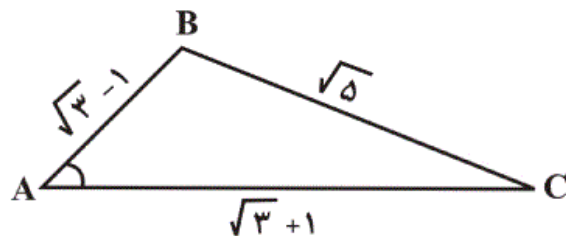
(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



بنابر قضیه کسینوس‌ها داریم: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) \cos A$$

$$5 = 3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}-2(3-1) \cos A$$

$$\Rightarrow -4 \cos A = -3 \Rightarrow \cos A = \frac{3}{4}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

$$\text{DE نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{x}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = 2x$$

همچنین:

$$\text{AE نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{BE}{2x} \Rightarrow BE = x$$

حال با توجه به رابطه طول نیمساز داریم:

$$AE^2 = AB \cdot AC - BE \cdot EC \Rightarrow x^2 = 6 \times 12 - x \times 2x \Rightarrow 3x^2 = 72$$

$$\Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۴

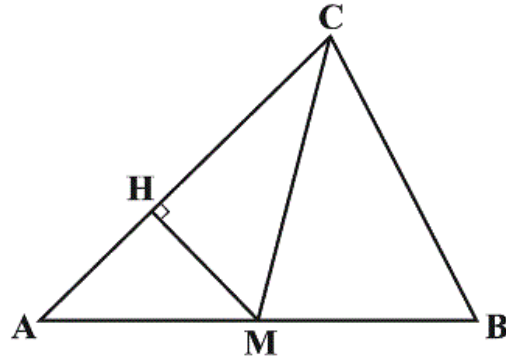
۳

۲ ✓

۱

فرض کنیم $AB = 6$ ، $AC = 7$ و $BC = 5$ باشد، با استفاده از

دستور هرون برای مثلث ABC داریم:



$$P = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{9 \times (9-5)(9-7)(9-6)} = 6\sqrt{6}$$

میانه CM مساحت مثلث ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند:

$$S_{AMC} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}MH.AC \Rightarrow 3\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times MH \times 7 \Rightarrow MH = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

(هندسه ۲ - روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$[p \vee (q \wedge p)] \wedge [(p \wedge q) \Rightarrow p] \equiv p \wedge T \equiv p$$

نکته: در حل این سؤال، از دو قانون زیر استفاده شده است:

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \quad \text{قانون جذب:}$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T \quad \text{قانون حذف عاطف:}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

آزمون 23 شهریور

با توجه به تعریف مجموعه A ، $A = \emptyset$ است. بنابراین $\emptyset = A \in B$

صحیح است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۴

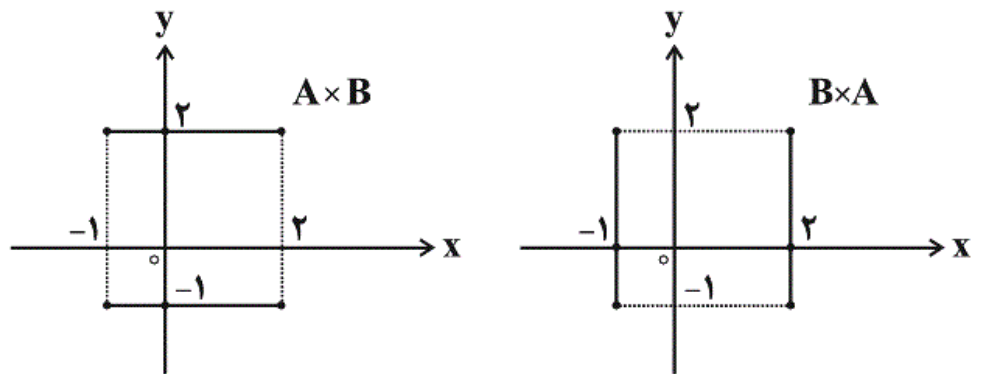
۳ ✓

۲

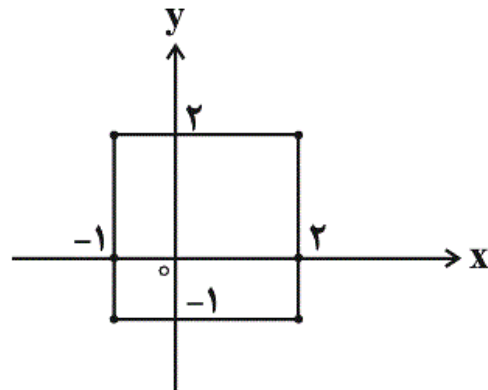
۱

آزمون 23 شهریور

نمودارهای $A \times B$ و $B \times A$ مطابق شکل زیر هستند:



بنابراین نمودار $(A \times B) \cup (B \times A)$ به صورت زیر است:



محیط شکل (مربع) برابر $12 = 4 \times 3$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

آزمون 23 شهریور

گزاره «ب» لزوماً درست نیست. مثلاً اگر $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضای

نمونه‌ای، $A = \{2, 3, 4\}$ و $B = \{4, 5\}$ دو زیرمجموعه از آن باشند، داریم:

$$A \cap B = \{4\}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ دو پیشامد مستقل اند}$$

اگر E و F دو زیرمجموعه از A و B به صورت زیر باشند، از هم مستقل

نیستند.

$$\left. \begin{array}{l} E = \{3, 4\} \Rightarrow P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ F = \{5\} \Rightarrow P(F) = \frac{1}{6} \\ E \cap F = \phi \Rightarrow P(E \cap F) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

گزاره‌های «الف» و «ب» صحیح هستند.

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۵ و ۶۷ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$\begin{cases} A = \{2, 4, 6\} \\ B = \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

احتمال هر یک از پیشامدهای B و $A \cap B$ را حساب می‌کنیم.

$$P(B) = P(2) + P(3) + P(5) = 10x = \frac{10}{21}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow P(A \cap B) = 2x = \frac{2}{21}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{10}{21}} = \frac{1}{5}$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶)

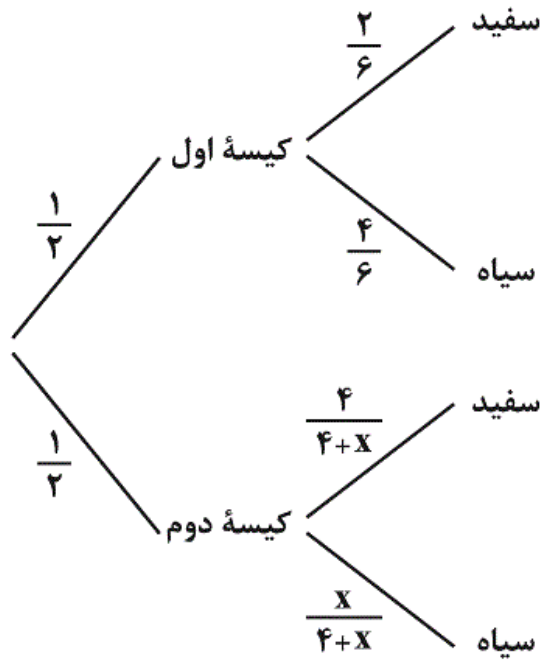
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد مهره‌های سیاه کیسه دوم را برابر x می‌گیریم.



با استفاده از احتمال کل، احتمال سفید بودن مهره مورد نظر را حساب می‌کنیم.

$$P(\text{سفید}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{4+x}$$

$$\frac{P(\text{سفید}) = \frac{7}{18}}{\longrightarrow} \frac{1}{6} + \frac{2}{4+x} = \frac{7}{18} \Rightarrow \frac{2}{4+x} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow 4+x=9 \Rightarrow x=5$$

(آمار و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر مقادیر اصلی را y بنامیم، رابطه y با x (داده‌های جدول) به صورت

$$x = \frac{y - 95}{100} \text{ می‌باشد.}$$

$$\Rightarrow y = 100x + 95$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 100\bar{x} + 95$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i x_i}{\sum_{i=1}^6 w_i}$$

$$= \frac{2 \times (-3) + 4 \times (-2) + 5 \times (-1) + 6 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 2}{2 + 4 + 5 + 6 + 2 + 1}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$$\bar{y} = 100 \left(-\frac{3}{4} \right) + 95 = 20$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید معفری کافی آباد)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{4+1+1+1+1+4}{6}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \approx 0.28$$

(آمار و احتمال - آمار توصیفی: صغه‌های ۱۴ تا ۱۶ و ۹۳ تا ۹۷)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

آزمون 23 شهریور

(امیرحسین ابومصوب)

اختلاف بین شماره‌های اولین و چهارمین دانش‌آموز انتخاب شده، سه برابر تعداد اعضای گروه‌ها (طول طبقات) است. بنابراین داریم:

$$\text{تعداد اعضای هر گروه} = \frac{42 - 6}{3} = 12$$

$$\text{تعداد گروه‌ها} = \frac{180}{12} = 15$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صغه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

آزمون 23 شهریور

واریانس جامعه برابر ۸۱ است، پس انحراف معیار برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{81} = 9$$

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم و μ میانگین

جامعه باشد، با اطمینان بیش از ۹۵ درصد می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

بنابراین:

$$\text{طول بازه اطمینان} = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 32/75 - 26/75 = \frac{4 \times 9}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{4 \times 9}{6} = 6 \Rightarrow n = 36$$

(آمار و احتمال - آمار استنباطی: صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱