



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۸۱- اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x+3} & x \neq -3 \\ A & x = -3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2-x} & x \neq 2 \\ B & x = 2 \end{cases}$ با هم مساوی باشند، مقدار $A+B$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) -۷ (۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۸۲- برد تابع $f(x) = (-1)^{[x]}([x]-x)$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $[-1, 1]$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, 1]$ (۴) $[-1, 1)$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر توابع f و g یک به یک باشند، آنگاه کدام یک از توابع زیر همواره یک به یک است؟

(۱) $f+g$ (۲) $f-g$ (۳) $f.g$ (۴) $f \circ g$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اگر $f^{-1} : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ، آنگاه $f(3)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۱۸

شما پاسخ نداده اید

۸۵- ضابطه معکوس تابع $y = x + \sqrt{x}$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ (۲) $f^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} + 1)^2$

(۳) $f^{-1}(x) = x - \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$ (۴) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

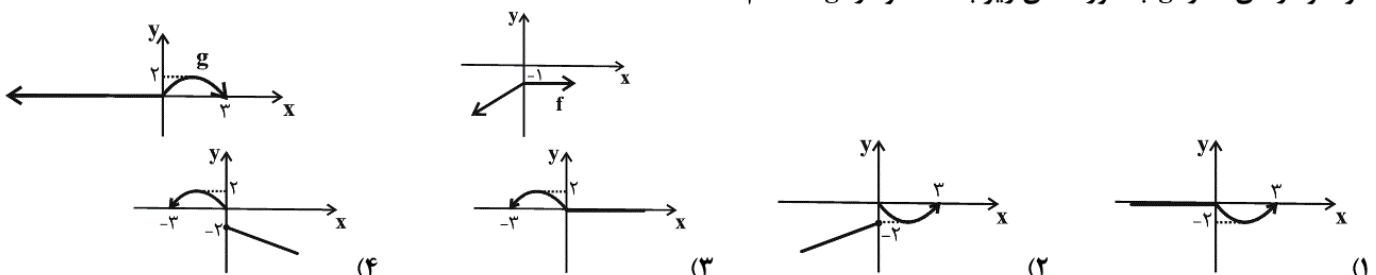
شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر $f = \{(1, 2), (0, 3), (-2, 2), (1, -1), (5, 1)\}$ و $g = \{(1, 0), (5, -1), (3, 0), (2, -1), (-2, 5)\}$ در این صورت حاصل ضرب مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع $\frac{-f^2 - 1}{2fg}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) -۴ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۷- اگر نمودارهای f و g به صورت‌های زیر باشد، نمودار $f.g$ کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۸۸- اگر $f = \{(2,3), (3,1), (1,4)\}$ و $g = \{(2,2), (4,1), (3,5)\}$ باشد، برد تابع $f \circ g \circ f$ کدام است؟
 (۱) $\{3\}$ (۲) $\{5\}$ (۳) $\{2\}$ (۴) $\{8\}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- اگر $f(x) = \sqrt{-x}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g^{-1}$ شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر $f(x) = x^2 - 8x + 12$ و $g(x) = -x + \sqrt{-x}$ باشد، مجموع جواب‌های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟
 (۱) -۳ (۲) +۵ (۳) +۳ (۴) -۵

شما پاسخ نداده اید

ریاضی یازدهم- تابستان ، هندسه 2 ، - 13970505

۹۱- کدام یک از چهار ضلعی‌های زیر، محاطی است ولی لزوماً محیطی نیست؟
 (۱) لوزی (۲) دوزنقه قائم‌الزاویه

(۳) مربع (۴) مستطیل

شما پاسخ نداده اید

۹۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های قائمه ۳ و ۴، دایره محاطی خارجی مماس بر وتر، در نقاط A و B بر امتداد دو ضلع دیگر مماس است. طول AB کدام است؟

(۱) ۶ (۲) $6\sqrt{2}$

(۳) ۱۰ (۴) $10\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- در چهارضلعی محدب ABCD، $\widehat{ABD} = 55^\circ$ ، $\widehat{ADC} = 60^\circ$ و $\widehat{DBC} = 65^\circ$ ، اندازه \widehat{CAD} کدام است؟

(۱) 50° (۲) 55°

(۳) 60° (۴) 65°

شما پاسخ نداده اید

۹۴- طول‌های دو ارتفاع از مثلثی به ترتیب ۲ و ۳ برابر شعاع دایره محاطی داخلی آن هستند. اگر طول بزرگترین ارتفاع مثلث ۶ واحد باشد، نسبت اندازه محیط به اندازه مساحت مثلث کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ واحد را در نظر بگیرید. طول مماس مشترک خارجی دو دایره محاطی داخلی و خارجی این

مثلث کدام است؟

۳ (۱) ۴/۵ (۲)

۶ (۳) ۷/۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۶- در مثلثی با اضلاع a ، b و c ، اگر شعاع دایره‌های محاطی خارجی نظیر اضلاع a و b را با r_a و r_b نشان دهیم و داشته باشیم

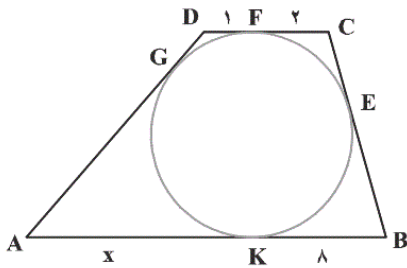
$r_b = 2r_a$ ، آن‌گاه $b - a$ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲)

۴ (۳) ۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۷- ذوزنقه $ABCD$ محیطی است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AK کدام است؟



۱۰ (۱)

۱۲ (۲)

۱۴ (۳)

۱۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۸- محیط‌های چندضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی دایره‌ای به ترتیب ۱۸ و ۹ واحد می‌باشند. شعاع دایره کدام است؟

۲ (۱) $\sqrt{2}$ (۲)

۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۹- دایره‌ای را در یک لوزی محاط می‌کنیم. نقاط تماس، اضلاع لوزی را به نسبت ۳ به ۴ تقسیم می‌کنند. اگر مساحت لوزی $28\sqrt{3}$

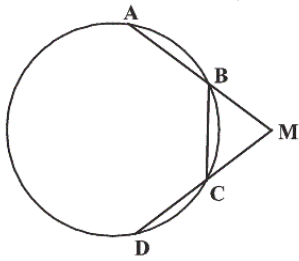
باشد، شعاع دایره کدام است؟

۵ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- در شکل مقابل، سه ضلع متوالی از یک ضلعی منتظم رسم شده است. اگر $\widehat{M} = 100^\circ$ باشد، n کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰

شما پاسخ نداده اید

ریاضی یازدهم- تابستان ، آمار و احتمال ، - 13970505

۱۱۱- متمم مجموعه $A - (B - A)'$ نسبت به مجموعه مرجع کدام است؟

- (۱) $A \cup B$ (۲) B (۳) A (۴) $A \cap B$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- برای سه مجموعه A ، B و C ، اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq B'$ ، حاصل $(A \cup B) - C$ همواره برابر کدام مجموعه است؟

- (۱) C (۲) B' (۳) C' (۴) B

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد، آن گاه چند مجموعه مانند A وجود دارد به گونه ای که $A \cup \{1\} = A \cap \{1, 2\}$ باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- برای دو مجموعه $A = \left\{x + y, \frac{9}{100}\right\}$ و $B = \left\{x^2 - y^2, \frac{9}{10}\right\}$ ، داریم: $A \times B = B \times A$. حاصل xy کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{4}{25}$ (۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $A = (1, 4]$ و $B = \{1, 2\}$ باشد، آن گاه مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- یک تاس سالم و یک کیسه حاوی ۶ مهره متمایز در اختیار داریم. تاس را پرتاب کرده و به اندازه عدد رو شده آن، از کیسه

مهره خارج می کنیم. فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۸۹ (۳) ۶۳ (۴) ۳۸۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- عددی ۳ رقمی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این عدد، نه زوج و نه مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- یک تاس به گونه ای است که برای $n \geq 2$ ، $P(n) = nP(n-1)$. در پرتاب این تاس، حاصل $\frac{P(n \geq 4)}{P(n \leq 3)}$ کدام است؟

- (۱) ۹۵ (۲) ۹۶ (۳) ۹۷ (۴) ۹۸

۱۱۹- در یک آزمایش تصادفی، $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(a)$ ، $P(b)$ و $P(c)$ جملات متوالی یک

دنباله هندسی باشند، $P(b)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}-2}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- تاسی طوری ساخته شده است که اعداد روی وجه‌های آن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۱ می‌باشد. این تاس را دوبار پرتاب می‌کنیم، احتمال

آنکه مجموع اعداد رو شده دو تاس ۵ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{8}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی یازدهم- تابستان، هندسه ۲- گواه، - 13970505

۱۰۱- در مثلث ABC ($AB < AC$) ضلع BC را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز دایره

محیطی مثلث ADE ، بر روی کدام جزء مثلث ABC واقع است؟

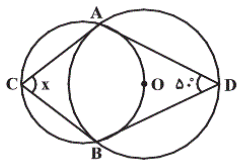
- (۱) عمود منصف BC (۲) میانه نظیر ضلع BC (۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC (۴) نیمساز داخلی زاویه A

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- در مثلثی به طول اضلاع ۴، ۳ و $\sqrt{7}$ ، شعاع دایره محیطی کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید



۱۰۳- در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O ، دایره دیگر را در نقاط A و B قطع کرده است. زاویه x چند درجه است؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۸۰

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول اضلاع $\sqrt{3}$ واحد، طول خط‌المركزین دو دایره محیطی و محاطی خارجی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- دایره محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۹ و ۸، در نقطه تماس، کوچک‌ترین ضلع را به

دو قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- در مثلث متساوی الساقین، اندازه ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعده این مثلث،

کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- چهارضلعی ABCD، محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچکترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری، همواره درست است؟

- ۱) $\hat{C} > \hat{A}$ ۲) $\hat{B} < \hat{A}$ ۳) $\hat{D} < \hat{C}$ ۴) $\hat{D} < \hat{B}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- در یک دوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسطهای دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه، کدام است؟

- ۳۶ (۱) ۴۴ (۲) ۴۶ (۳) ۴۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. اگر پاره خط TT' به ترتیب در نقاط T و T' بر دایرههای C و C' مماس و

چهارضلعی OTT'O'، یک چهارضلعی محیطی باشد، آنگاه دو دایره C و C' چه وضعی می توانند نسبت به هم داشته باشند؟

- ۱) متخارج ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) مماس داخل

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- نسبت شعاع دایره محاطی یک شش ضلعی منتظم به شعاع دایره محیطی آن، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\cos 15^\circ$ ۴) $\sin 15^\circ$

شما پاسخ نداده اید

(عمید علیزاده)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)(3+x)}{x+3} & x \neq -3 \\ A & x = -3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3-x & x \neq -3 \rightarrow f(2) = 1 \\ A & x = -3 \rightarrow f(-3) = A \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{2-x} & x \neq 2 \\ B & x = 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3-x & x \neq 2 \rightarrow g(-3) = 6 \\ B & x = 2 \rightarrow g(2) = B \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = g(2) \rightarrow B = 1 \\ g(-3) = f(-3) \rightarrow A = 6 \end{array} \right\} \rightarrow A + B = 7$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه ۴۱)

۴

۳

۲

۱

$$f(x) = (-1)^{[x]} ([x] - x) = \begin{cases} [x] - x & : \text{زوج } [x] \\ x - [x] & : \text{فرد } [x] \end{cases}$$

می‌دانیم برای هر x حقیقی، $0 \leq [x] - x < 1$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} R_f = (-1, 0] & : \text{زوج } [x] \\ R_f = [0, 1) & : \text{فرد } [x] \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = (-1, 0] \cup [0, 1) = (-1, 1)$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۷ تا ۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

-۸۳

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$$

$$\Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$\xrightarrow{f \text{ یک به یک}} g(x_1) = g(x_2)$$

$$\xrightarrow{g \text{ یک به یک}} x_1 = x_2 \Rightarrow f \circ g \text{ یک به یک است.}$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(یاسین سپهر)

-۸۴

عدد ۳ ورودی f می‌باشد. بنابراین خروجی f^{-1} خواهد بود. پس:

$$f^{-1}(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 2$$

$$\Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با اضافه کردن مقدار $\frac{1}{4}$ سعی در مربع کامل ساختن عبارت داریم:

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$y + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 \xrightarrow{\sqrt{x} + \frac{1}{2} > 0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{y + \frac{1}{4}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = \left(\sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 = y + \frac{1}{4} - \sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = x - \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$D_f \cap D_g = \{1, 5, -2\}$$

$$x = 1: \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(-1)^2 - 1}{2(-1)(0)} = \frac{-2}{0} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$x = 5: \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(1)^2 - 1}{2(+1)(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x = -2: \frac{-f^2 - 1}{2fg} = \frac{-(2)^2 - 1}{2(2)(5)} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}$$

$$1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow f.g(x) = -g(x) \\ x < 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow f.g = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{گزینه ۱ صحیح است}$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به f و g

$$f \circ g = \{(2, 3), (4, 4)\}$$

$$g \circ f = \{(2, 5), (1, 1)\}$$

شرط اعمال جبری ۲ تابع، وجود اشتراک دامنه‌های ۲ تابع می‌باشد. لذا فقط برای $x = 2$ جمع دو تابع قابل تعریف است.

$$f \circ g(2) + g \circ f(2) = 8 \Rightarrow f \circ g + g \circ f = \{(2, 8)\}$$

برد تابع تنها شامل عضو ۸ می‌باشد.

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow g(x) - 2 = -\sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 = x+1$$

$$\Rightarrow g^2(x) - 4g(x) + 4 = x+1$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g^{-1}} = \left\{ x \in (-\infty, 2] \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0 \right\}$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left\{ x \in (-\infty, 2] \mid x \in [1, 3] \right\} \rightarrow D_{f \circ g^{-1}} = [1, 2]$$

شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

$$f \circ g(x) = 0 \rightarrow f(g(x)) = 0 \rightarrow (g(x), 0) \in f$$

با توجه به ضابطه $f(x)$ ،

$$f(x) = x^2 - 8x + 12$$

$$\rightarrow f(x) = (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=2 \end{cases}$$

ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ برابر ۶ و ۲ می‌باشند، لذا $g(x)$ باید برابر ۲+ و ۶ باشد.

$$-x + \sqrt{-x} = 2 \xrightarrow[t \geq 0]{\sqrt{-x}=t} t^2 + t = 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \rightarrow (t+2)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt{-x}=1 \\ t=-2 \rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$-x + \sqrt{-x} = 6 \xrightarrow[t \geq 0]{\sqrt{-x}=t} t^2 + t = 6$$

$$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{-x} = 2$$

$$\Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$$

بنابراین جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$-4 - 1 = -5$$

(مسئله ۱ - فصل ۲ - تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۴

۳

۲

۱

طبق تعریف محاطی یا محیطی بودن، فقط مستطیل می تواند محاطی باشد ولی لزوماً محیطی نیست.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه های ۲۷ تا ۲۹)

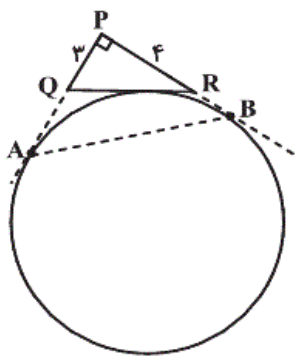
۴

۳

۲

۱

(فسین فایلو)



نکته: طول مماسی که از هر رأس یک مثلث بر دایره محاطی خارجی روبهرو به آن رأس رسم می شود، نصف محیط مثلث است.

$$QR = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

با توجه به این نکته در شکل بالا داریم:

$$PA = PB = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

حال در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین PAB، داریم:

$$AB = \sqrt{2}PA = 6\sqrt{2}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه های ۲۵ و ۲۶)

۴

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

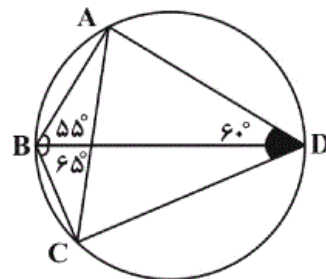
با توجه به اینکه $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ ، پس چهارضلعی ABCD

محاطی است. دایره محیطی آن را رسم می کنیم. داریم:

$$\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 65^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۲۷)



۴

۳

۲

۱

فرض می‌کنیم $h_a = 2r$ و $h_b = 3r$ ، بنا به تمرین ۵ صفحه ۳۰ کتاب درسی داریم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6r} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{1}{6r} \Rightarrow h_c = 6r$$

□۴

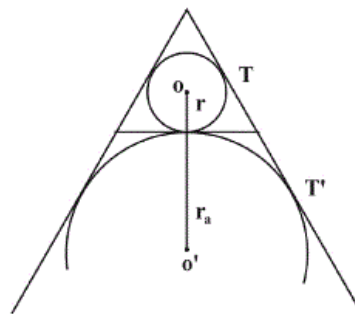
□۳

□۲

□۱✓

(فرشاد فرامرزی)

در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ داریم:



$$r = \frac{S}{P} = \frac{(6)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3 \times 6}{2}} = \sqrt{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{(6)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{6 \times 3}{2} - 6} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج به شعاع‌های r و r_a برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{r \times r_a} = 2\sqrt{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}} = 6$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

$$\left. \begin{aligned} r_a &= \frac{S}{P-a} \\ r_b &= \frac{S}{P-b} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{r_b = 2r_a} \frac{S}{P-b} = \frac{2S}{P-a}$$

$$2P - 2b = P - a$$

$$\Rightarrow P = 2b - a$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+\phi}{2} = 2b - a$$

$$\Rightarrow a + b + \phi = 4b - 2a$$

$$\Rightarrow 3b - 3a = \phi$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{\phi}{3}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

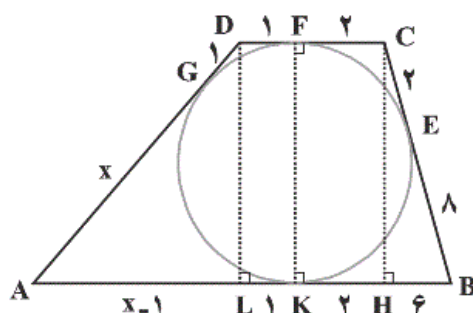
 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

-۹۷



مماس‌های رسم شده از یک نقطه

بر دایره با هم مساویند، پس

$$GD = 1, CE = 2, EB = 8$$

$$\text{و } AG = x$$

از D و C بر AB عمود می‌کنیم، داریم:

$$LK = 1 \Rightarrow AL = x - 1$$

$$KH = 2 \Rightarrow BH = 6$$

$$\triangle CBH : CH^2 = CB^2 - HB^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow CH = 8 \Rightarrow DL = 8$$

$$\triangle ADL : AD^2 = DL^2 + AL^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = (x-1)^2 + 8^2 \Rightarrow x = 16$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر a طول یک ضلع چندضلعی منتظم محیطی و b طول یک ضلع چندضلعی منتظم محاطی دایره باشد، بنا به تمرین ۷ صفحه ۳۰ کتاب درسی داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{r} \tan \frac{18^\circ}{n}}{\cancel{r} \sin \frac{18^\circ}{n}} \Rightarrow \frac{18}{9} = \frac{\frac{\cancel{\sin} \frac{18^\circ}{n}}{\cos \frac{18^\circ}{n}}}{\frac{\cancel{\sin} \frac{18^\circ}{n}}{1}} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \frac{18^\circ}{n}}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{18^\circ}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{18^\circ}{n} = 60^\circ \Rightarrow n = 3$$

پس چندضلعی‌های مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع هستند و داریم:

$$a = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3} \text{ و } 2P = 18 \Rightarrow P = 9$$

$$\text{شعاع دایره محاطی } r = \frac{S}{P} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$$

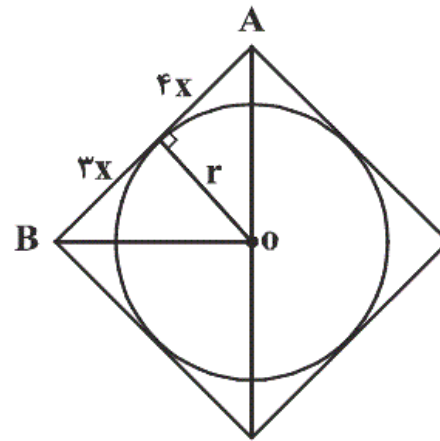
(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۳۰)

۴

۳

۲

۱



در مثلث قائم‌الزاویه AOB ، ارتفاع وارد بر وتر مثلث است، پس:

$$r^2 = 3x \times 4x \Rightarrow r^2 = 12x^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}x$$

$$2P = 28x \Rightarrow P = 14x$$

$$rP = S \Rightarrow r \times 14x = 28\sqrt{3}$$

از طرفی داریم:

$$\Rightarrow 2\sqrt{3} \times 14 \times x^2 = 28\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

$$x > 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

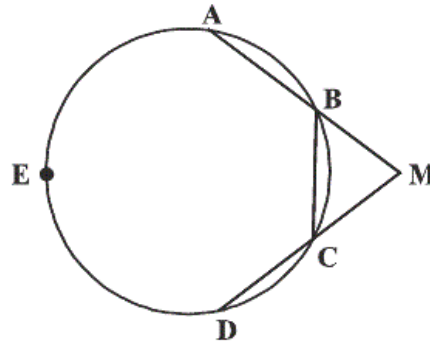
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



n ضلعی منتظم دایره را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند که هر کدام $\frac{360}{n}$ درجه هستند. بنابراین داریم:

$$\widehat{BC} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\widehat{AED} = (n-3) \times \frac{360^\circ}{n} = 360^\circ - \frac{1080^\circ}{n}$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AED} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 100^\circ = \frac{360^\circ - \frac{1080^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{n}}{2}$$

$$\Rightarrow 200^\circ = 360^\circ - \frac{1440^\circ}{n} \Rightarrow \frac{1440^\circ}{n} = 160^\circ$$

$$\Rightarrow n = \frac{1440^\circ}{160^\circ} = 9$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۸ و ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی یازدهم- تابستان ، آمار و احتمال ، - 13970505

(سعید بعفری کافی آباد)

~
-۱۱۱

$$\begin{aligned} [(B-A)' - A]' &= [(B \cap A')' \cap A']' \\ &= [(B' \cup A) \cap A']' \\ &= [(B' \cap A') \cup \underbrace{(A \cap A')}_{\Phi}]' = (B' \cap A')' = A \cup B \end{aligned}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سیدمصن فاطمی)

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$C \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq C' \Rightarrow B \cap C' = B$$

$$(A \cup B) - C = B - C = B \cap C' = B$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

[۴]✓

[۳]

[۲]

[۱]

(امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به تساوی $A \cup \{1\} = A \cap \{1, 2\}$ ، رابطه $A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\}$ برقرار است و داریم:

$$\{1\} \subseteq A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\} \subseteq A \Rightarrow \{1\} \subseteq A$$

$$A \subseteq A \cup \{1\} \subseteq A \cap \{1, 2\} \subseteq \{1, 2\} \Rightarrow A \subseteq \{1, 2\}$$

بنابراین تنها مجموعه‌های ممکن برای A عبارتند از $\{1\}$ و $\{1, 2\}$.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

(فرشاد فرامرزی)

چون A و B تهی نیستند، پس $A = B$ و داریم:

$$x^2 - y^2 = \frac{9}{100} \Rightarrow (x - y) \times \frac{9}{10} = \frac{9}{100} \Rightarrow x - y = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{9}{10} \\ x - y = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{5} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

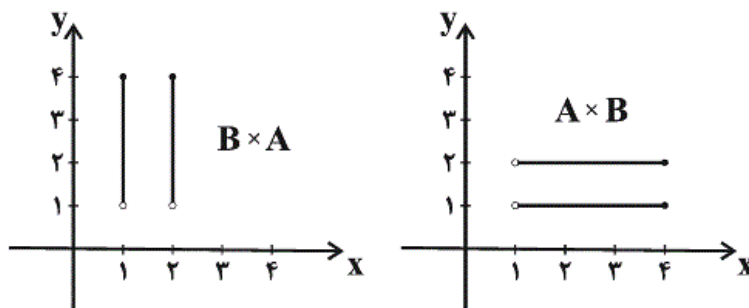
[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

(فرشاد فرامرزی)

از روی نمودار، اشتراک مجموعه‌های $B \times A$ و $A \times B$ تنها نقطه $(2, 2)$ می‌باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6} = 2^6 - 1 = 63$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۴)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

(سیدعادل حسینی)

$$S: \text{اعداد ۳ رقمی} \Rightarrow n(S) = 900$$

$$A: \text{اعداد زوج ۳ رقمی} \Rightarrow n(A) = \left[\frac{900}{2} \right] = 450$$

$$B: \text{اعداد ۳ رقمی مضرب ۳} \Rightarrow n(B) = \left[\frac{900}{3} \right] = 300$$

$$A \cap B: \text{اعداد ۳ رقمی مضرب ۶} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{900}{6} \right] = 150$$

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \left(\frac{450}{900} + \frac{300}{900} - \frac{150}{900} \right) = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

(سیدعادل حسینی)

$$P(n) = nP(n-1) \Rightarrow P(n) = n!P(1)$$

$$P(n \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6)$$

$$= [4! + 5! + 6!]P(1) = 864P(1)$$

$$P(n \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= [1! + 2! + 3!]P(1) = 9P(1)$$

$$\Rightarrow \frac{P(n \geq 4)}{P(n \leq 3)} = \frac{864}{9} = 96$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

(امیر هوشنگ فمسه)

اگر قدر نسبت دنباله q باشد، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q^2 = 1 \Rightarrow q^2 + q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad q > 0$$

$$P(b) = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

□۴

□۳

□۱

$$P(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ و } P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ و } P(3) = P(4) = \frac{1}{6}$$

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} (2, 3), (3, 2), (1, 4), (4, 1) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{9}$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

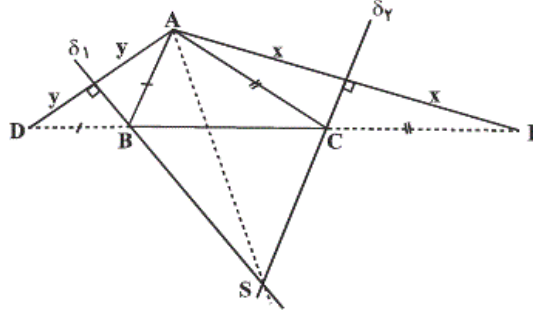
 ۲

 ۱

ریاضی یازدهم- تابستان ، هندسه 2- گواه ، - 13970505

-۱۰۱

(سراسری فارغ کشور ریاضی - ۹۴)



مرکز دایره محیطی مثلث
ADE نقطه هم‌رسی
عمودمنصف‌های اضلاع آن
است. مطابق شکل،
عمودمنصف‌های AD و AE

را رسم کرده‌ایم تا یک‌دیگر را در S قطع کنند، S مرکز دایره محیطی
مثلث ADE است. از طرفی، در دو مثلث متساوی‌الساقین BAD و CAE،
عمودمنصف‌های قاعده‌های AD و AE، همان نیمسازهای زاویه‌های
روبه‌روی قاعده، یعنی $\hat{A}BD$ و $\hat{A}CE$ هستند، به عبارت دیگر می‌توان
گفت که نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C بر δ_1 و δ_2 واقع
هستند و می‌دانیم که در هر مثلث، هر دو نیمساز خارجی و نیمساز داخلی
زاویه سوم هم‌رسند، یعنی S روی امتداد نیمساز داخلی زاویه A واقع است.

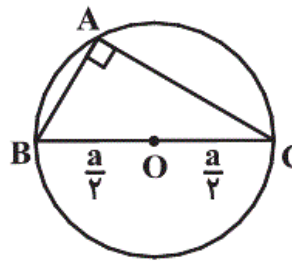
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



این مثلث قائم الزاویه است زیرا
 $4^2 = 3^2 + (\sqrt{7})^2$ و در مثلث قائم الزاویه،
 شعاع دایره محیطی برابر با نصف طول وتر
 (بزرگ ترین ضلع) است:

$$R = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{پس:}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

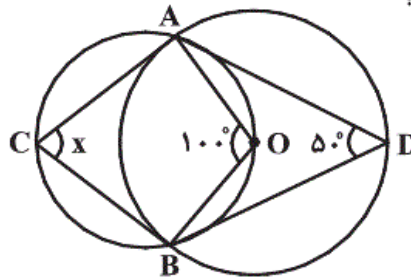
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از O به A و B وصل می‌کنیم. داریم:



$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ \quad (\text{زاویه محاطی})$$

$$\hat{A}OB = \widehat{AB} \Rightarrow \hat{A}OB = 100^\circ \quad (\text{زاویه مرکزی})$$

چهارضلعی AOBC محاطی است، پس در آن زاویه‌های روبه‌رو مکمل
 یک‌دیگرند، بنابراین:

$$x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۲۷)

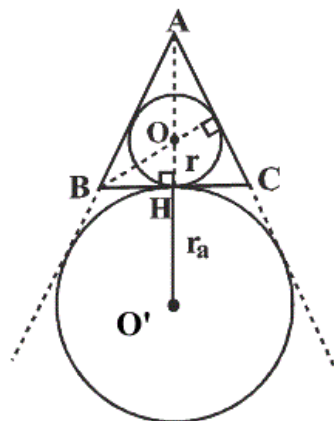
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

همان‌طور که می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها، همان نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی است، پس مرکز دایره محاطی داخلی، همان مرکز دایره محیطی است (نقطه O در شکل زیر). پس مطابق شکل باید مجموع طول شعاع دایره محاطی داخلی و شعاع دایره محاطی خارجی را حساب کنیم:



$$r = OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a - a} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \quad (*)$$

$$a = \sqrt{3} \xrightarrow{(*)} OO' = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 2$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

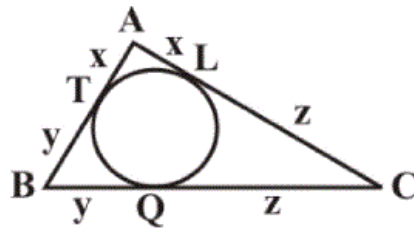
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در مثلث زیر، اندازه اضلاع را به صورت زیر در نظر می گیریم:



$$AB = ۸ \text{ و } AC = ۹ \text{ و } BC = ۱۳$$

می دانیم که از هر نقطه خارج یک دایره، می توان دو مماس با طول برابر بر آن دایره رسم کرد. پس با توجه به شکل داریم:

$$AT = AL = x \text{ و } BT = BQ = y \text{ و } CL = CQ = z \quad (*)$$

اگر P را نصف محیط مثلث در نظر بگیریم، آن گاه برای محیط مثلث نتیجه زیر را می توان گفت:

$$۲P = AB + BC + AC = ۳۰$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲P = ۲(x + y + z) = ۳۰$$

$$\Rightarrow P = x + y + z = ۱۵$$

برای به دست آوردن مقادیر x و y به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{cases} x = P - (y + z) = P - BC = ۱۵ - ۱۳ = ۲ \\ y = P - (x + z) = P - AC = ۱۵ - ۹ = ۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

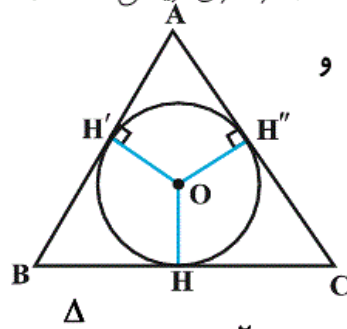
(هندسه ۲ - دایره: صفحه های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = 3$ و در نتیجه $OA = 5$ است.

$$\Delta OAH' : AH'^2 = OA^2 - OH'^2 = 25 - 9$$

$$\Rightarrow AH'^2 = 16 \Rightarrow AH' = 4$$

حال اگر فرض شود $BH = HC = x$ ، با توجه به آن که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با یکدیگر برابرند، داریم:

$$AH'' = AH' = 4$$

$$BH' = BH = CH = CH'' = x$$

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 3 = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 2x}{4 + 2x} \Rightarrow 12 + 6x = 8x \Rightarrow 2x = 12$$

بنابراین طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC ، برابر با ۱۲ است.

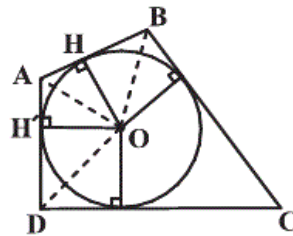
(هنرسهٔ ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مطابق شکل روبه‌رو، AO ، BO و DO به ترتیب نیمساز داخلی زوایای A ، B و D هستند. طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، برابر یکدیگرند، پس $AH = AH'$.

$$AD > AB \Rightarrow AH' + H'D > AH + HB \Rightarrow H'D > HB$$

هر کدام از زاویه‌های یک چهارضلعی محیطی، کوچک‌تر از 180° و در نتیجه نصف آن‌ها کوچک‌تر از 90° است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} \tan(\widehat{OBH}) &= \frac{OH}{HB} = \frac{R}{HB} \\ \tan(\widehat{ODH'}) &= \frac{OH'}{H'D} = \frac{R}{H'D} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{H'D > HB}$$

$$\tan(\widehat{OBH}) > \tan(\widehat{ODH'})$$

$$\Rightarrow \widehat{OBH} > \widehat{ODH'} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{D}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$MN = \frac{a+b}{2}$$

طبق فرض:

$$MN = 12 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 12 \Rightarrow a+b = 24 \quad (*)$$

اما طبق فرض سؤال دوزنقه $ABCD$ محیطی است، می‌دانیم که در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است، یعنی در دوزنقه محیطی $ABCD$ داریم: $AB + CD = AD + BC$. پس:

$$\text{محیط } ABCD = AB + CD + AD + BC$$

$$= AB + CD + AB + CD$$

$$= a + b + a + b = 2(a + b)$$

$$\xrightarrow{(*)} \text{محیط } ABCD = 2 \times 24 = 48$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای این که چهارضلعی $OTT'O'$ ، یک چهارضلعی محیطی باشد، لازم است $OT + O'T' = OO' + TT'$ در صورتی که دو دایره متخارج یا مماس خارج باشند آنگاه $OO' \geq R + R'$ ، یعنی $OO' \geq OT + O'T'$ در نتیجه $TT' + OO' > OT + O'T'$ و چهارضلعی محیطی نخواهد بود. در حالتی که دو دایره مماس داخل باشند، T و T' بر هم منطبق هستند و چهارضلعی ایجاد نمی‌شود. اما در حالتی که دو دایره متقاطع باشند، می‌توان یک چهارضلعی محیطی برای $OTT'O'$ به دست آورد. مثلاً اگر $OT = R = ۶$ و $O'T' = R' = ۲$ و $OO' = ۵$ باشد، آنگاه دو دایره متقاطع هستند و $TT' = ۳$ خواهد بود و $۵ + ۳ = ۶ + ۲$ و در نتیجه، $OTT'O'$ یک چهارضلعی محیطی است.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی هندسه پایه)



$$\widehat{AOB} = \frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOH} = ۳۰^\circ$$

اگر مطابق شکل، شش ضلعی منتظمی را درون دایره‌ای به شعاع R محاط کنیم و از مرکز دایره، عمودی بر هر یک از ضلع‌های این شش ضلعی منتظم وارد کنیم، طول این عمود، برابر شعاع دایره محاطی شش ضلعی منتظم است، بنابراین:

$$\Delta AOH : \cos(\widehat{AOH}) = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \cos ۳۰^\circ = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱