



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۲۶- اگر جملات $8x, x+6, x-3, (x > 0)$ ، به ترتیب از چپ به راست جملات اول، سوم و پنجم از یک دنباله هندسی با جملات افزایشی باشند، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) $\sqrt{2}$

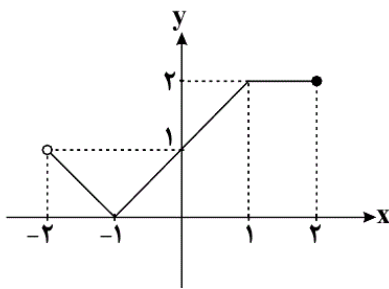
شما پاسخ نداده اید

۲۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $A + B^{-1}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۲۸- اگر نمودار $y = f(x-1)$ به صورت مقابل باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)} - 1$ کدام است؟



- (۱) $[-2, -1] \cup [0, 2]$
(۲) $[-1, 0] \cup [1, 2]$
(۳) $(-3, -1]$
(۴) $[-1, 1]$

شما پاسخ نداده اید

۲۹- مساحت یک متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع ۲ و ۴ برابر $4\sqrt{3}$ است. طول قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) $\sqrt{12}$ (۲) $\sqrt{18}$ (۳) $\sqrt{24}$ (۴) $\sqrt{28}$

شما پاسخ نداده اید

۳۰- در جدول فراوانی مقابل، واریانس داده‌ها کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۱	۱۲	۱۵	۱۸
فراوانی تجمعی	۲	۵	۹	۱۴	۲۰

- (۱) $9/3$ (۲) $10/1$
(۳) $11/4$ (۴) $10/8$

شما پاسخ نداده اید

۳۱- اگر هر یک از داده‌های آماری را در ۲ ضرب کرده و سپس به آن‌ها ۳ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات آن‌ها نصف می‌شود.

میانگین داده‌های آماری اولیه کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) $2/5$

شما پاسخ نداده اید

۳۲- جعبه A شامل ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و جعبه B شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه می‌باشد؛ از جعبه A به طور

تصادفی ۲ مهره وارد جعبه B می‌کنیم. سپس از جعبه B مهره‌ای خارج می‌کنیم؛ با چه احتمالی مهره خارج شده سفید است؟

- (۱) $19/48$ (۲) $131/336$ (۳) $65/168$ (۴) $67/168$

شما پاسخ نداده اید

۳۳- اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ ، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{14}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{4}{13}$ (۴) $\frac{5}{13}$

شما پاسخ نداده اید

۳۴- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $fog(x) = 4x^2 - x - 1$ ، آن گاه $(f - g)(1)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۳۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{ax - 2}}{\sqrt[3]{3x - 1} - 2} = b$ ، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۳۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + x & x \leq 0 \\ \frac{a|x|}{x} & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است؟ ([]: جزء صحیح)

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

شما پاسخ نداده اید

۳۷- مقدار مشتق تابع $f(x) = (\frac{x^2 + 1}{\sqrt{3x + 1}})^3$ در $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{15}{8}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{9}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۳۸- اگر احتمال گل شدن هر ضربه پنالتی $\frac{2}{5}$ باشد، با چه احتمالی دقیقاً ۲ پنالتی از ۳ ضربه پنالتی گل می شود؟

- (۱) $\frac{12}{125}$ (۲) $\frac{36}{125}$ (۳) $\frac{12}{25}$ (۴) $\frac{4}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۳۹- اگر α و β جوابهای معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، جوابهای کدام معادله به صورت $\{\alpha\sqrt{\beta}, \beta\sqrt{\alpha}\}$ است؟

- (۱) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$
 (۳) $x^2 - \sqrt{5}x + 5 = 0$ (۴) $x^2 + \sqrt{5}x - 5 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۴۰- نمودار $f(x) = [\sqrt{x}]$ در فاصله $1 \leq x \leq 16$ از پاره خط ساخته شده که طول بلندترین آن ها است. ([]: جزء صحیح)

- (۱) ۵، ۳ (۲) ۷، ۳ (۳) ۷، ۴ (۴) ۵، ۴

شما پاسخ نداده اید

۴۱- اگر $f(x) = 5 - \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، $f^{-1}(g(a)) = -1$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشند، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۴۲- امتیاز یک کارمند پس از t ماه از رابطه $f(t) = 200 + 40e^{0.02t}$ محاسبه می‌شود. تقریباً پس از چند ماه، امتیاز او به ۳۰۰ خواهد رسید؟ ($\ln 2 \simeq 0.7$ و $\ln 5 \simeq 1.6$)

- (۱) ۳ ماه (۲) ۴ ماه (۳) ۴/۵ ماه (۴) ۵/۵ ماه

شما پاسخ نداده اید

۴۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = \sin x \sin 3x$ در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

- (۱) 5π (۲) 4π (۳) 6π (۴) 7π

شما پاسخ نداده اید

۴۴- معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \ln \sqrt{1 + \cos x}$ در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{4}$ روی منحنی، کدام است؟

(۱) $4y - 2x = -\pi$

(۲) $4y + 2x = \pi$

(۴) $2y - 2x = \pi$

(۳) $2y + 2x = \pi$

شما پاسخ نداده اید

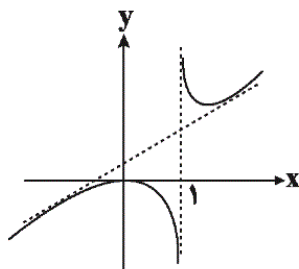
شما پاسخ نداده اید

۴۶- اگر نمودار تابع $f(x) = (x+a)e^{-x}$ در نقطه‌ای به طول $x=3$ دارای عطف باشد، طول ماکزیمم یا مینیمم نسبی تابع و نوع آن کدام است؟

- (۱) ۴، می‌نیمم (۲) ۴، ماکزیمم (۳) ۲، ماکزیمم (۴) ۲، می‌نیمم

شما پاسخ نداده اید

۴۷- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x+b}$ به صورت مقابل باشد، $a+b$ کدام است؟



- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۴۸- دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 = 2(3x - 4y - 8)$ ، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲، چه وضعی دارد؟

- (۱) متقاطع (۲) مماس خارج (۳) متخارج (۴) مماس داخل

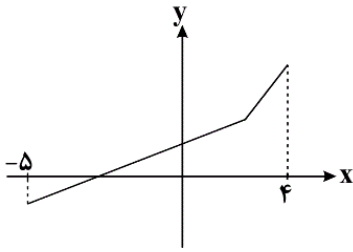
شما پاسخ نداده اید

۴۹- محور تقارن هذلولی به معادلهٔ $4y^2 = x^2 - x$ ، آن را در دو نقطه قطع می‌کند. مجموع طول‌های این دو نقطه کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۵۰- با توجه به نمودار تابع $f(x) = 2x + |x - 3|$ ، حاصل انتگرال معین $\int_{-5}^4 f(x) dx$ کدام است؟



(۱) ۲۷/۵

(۲) -۱۱/۵

(۳) ۲۳/۵

(۴) ۲۴

شما پاسخ نداده اید

۵۱- اگر $\int \frac{7x^3 - 15x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}f(x) + C$ باشد، آن گاه مختصات مرکز تقارن تابع $f(x)$ کدام است؟ (C، عدد ثابت است.)

(۴) (۱, -۲)

(۳) (۱, ۲)

(۲) (-۱, -۶)

(۱) (-۱, -۲)

شما پاسخ نداده اید

۵۲- در مثلث متساوی الساقین ABC که $\widehat{B} = \widehat{C} = 67/5^\circ$ ، ارتفاع BH را رسم می کنیم. حاصل $\frac{AH}{CH}$ کدام است؟

(۴) $1 + \sqrt{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) ۲

شما پاسخ نداده اید

۵۳- در مثلث قائم الزاویه ای یکی از زاویه های حاده، 60° از زاویه ای حاده دیگر بیشتر است. فاصله ی پای ارتفاع وارد بر وتر این مثلث از میانه ی وارد بر وتر، چند برابر طول وتر است؟

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

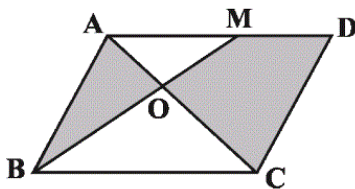
(۳) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(۱) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۵۴- در شکل زیر، M وسط ضلع متوازی الاضلاع است. مساحت چهارضلعی سایه خورده چند برابر مساحت مثلث سایه خورده است؟



(۱) ۱/۷۵

(۲) ۲

(۳) ۲/۲۵

(۴) ۲/۵

شما پاسخ نداده اید

۵۵- در داخل مخروط قائم به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۴، بزرگترین کره ممکن قرار گرفته است. نسبت حجم کره به حجم مخروط کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{3}{8}$

شما پاسخ نداده اید

-۲۶

(رضا آژار)

$$(x+6)^2 = (x-3)(8x) \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 8x^2 - 24x$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 36x - 36 = 0$$

$$\Delta = 36^2 + 4(7)(36) = 36(36 + 28) = 36 \times 64 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6 \times 8 = 48$$

$$x_1, x_2 = \frac{36 \pm 48}{14} = \begin{cases} 6 \\ -\frac{6}{7} \end{cases} \xrightarrow{x > 0} x = 6 \Rightarrow \begin{matrix} 3, 12, 48 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \text{جمله پنجم} \quad \text{جمله سوم} \quad \text{جمله اول} \end{matrix}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 \Rightarrow \frac{12}{3} = q^2 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \text{ ق ق} \\ q = -2 \text{ ق غ} \end{cases}$$

دقت کنید چون جملات دنباله افزایش یافته است، $q = -2$ قابل قبول نیست.

(الگو و دنباله) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۲۷

(بهرام طالبی)

اول معکوس ماتریس B را می‌یابیم:

$$B^{-1} = \frac{1}{3(-1) - (1)(-2)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A + B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + B^{-1}| = 4(1) - (-4)(1) = 8$$

(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴، ۱۶۵ و ۱۷۳)

۴

۳

۲ ✓

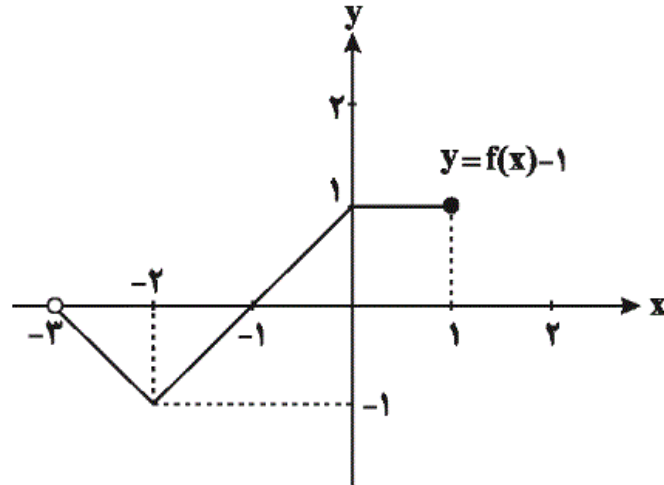
۱

(میثم عمزهلویی)

برای محاسبه دامنه تابع $y = \sqrt{f(x)-1}$ ، باید زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$f(x) - 1 \geq 0$$

با استفاده از نمودار $y = f(x) - 1$ ، نمودار $y = f(x) - 1$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور باید نمودار داده شده را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل کنیم. نمودار حاصل به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به نمودار، نامعادله $f(x) - 1 \geq 0$ فقط در فاصله $[-1, 1]$ برقرار است، پس دامنه تابع بازه $[-1, 1]$ است.

(توابع فاص، نامعادله و تعیین علامت) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

 ۴

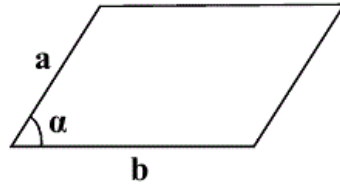
 ۳

 ۲

 ۱

(میثم همزه لویی)

مساحت یک متوازی‌الاضلاع که طول اضلاع آن a و b و زاویه بین اضلاع آن‌ها α است، برابر است با:

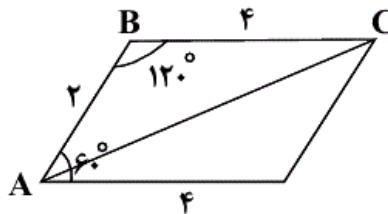


$$S = ab \sin \alpha$$

پس داریم:

$$4\sqrt{3} = (4)(2) \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$$

برای محاسبه طول قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع، باید در مثلث ABC از قضیه کسینوس‌ها استفاده کنیم:



$$\Rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2(2)(4) \cos 120^\circ = 4 + 16 - 16(-\frac{1}{2}) = 28$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{28}$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(معدی ملارمضانی)

-۳۰

با توجه به جدول زیر داریم:

مرکز دسته	۸	۱۱	۱۲	۱۵	۱۸
فراوانی تجمعی	۲	۵	۹	۱۴	۲۰
فراوانی	۲	۳	۴	۵	۶

$$\text{میانگین} = \frac{2(8) + 3(11) + 4(12) + 5(15) + 6(18)}{20} = \frac{280}{20} = 14$$

$$\text{واریانس} = \frac{2(8-14)^2 + 3(11-14)^2 + 4(12-14)^2 + 5(15-14)^2 + 6(18-14)^2}{20}$$

$$= \frac{72 + 27 + 16 + 5 + 96}{20} = \frac{216}{20} = 10.8$$

(شافص‌های پرآندگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

(فشار فرامرزی)

$$\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1 + 3$$

$$\sigma_2 = 2\sigma_1$$

$$\frac{CV_2}{CV_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}}{\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \times \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \times \frac{\bar{x}_1}{2\bar{x}_1 + 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4\bar{x}_1 = 2\bar{x}_1 + 3 \Rightarrow 2\bar{x}_1 = 3 \Rightarrow \bar{x}_1 = 1.5$$

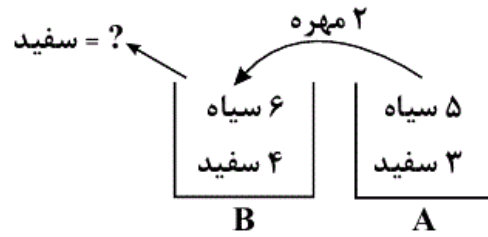
(شافس‌های پراکندگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴ و ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲ ✓

۱



سه حالت داریم:

(۱) از جعبه **A**، ۱ مهره سفید و ۱ مهره سیاه وارد جعبه **B** کرده‌ایم و از جعبه **B** مهره سفید بیرون آورده‌ایم:

$$\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} \times \left(\frac{5}{12}\right)$$

(۲) از جعبه **A**، ۲ مهره سفید وارد جعبه **B** کرده‌ایم و از جعبه **B** مهره سفید بیرون آورده‌ایم:

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \times \left(\frac{6}{12}\right)$$

(۳) از جعبه **A**، ۲ مهره سیاه وارد جعبه **B** کرده‌ایم و از جعبه **B** مهره سفید بیرون آورده‌ایم:

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \left(\frac{4}{12}\right)$$

$$\frac{75 + 18 + 40}{28 \times 12} = \frac{133}{336} = \frac{19}{48}$$

(پدیده‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میثم حمزه لویی)

ابتدا مقدار $\tan \alpha$ را می‌یابیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha$$

$$\Rightarrow 6 \tan \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

حال با استفاده از رابطه $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ ، مقدار $\cos 2\alpha$ را می‌یابیم:

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{13}{9}} = \frac{5}{13}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$g(x) = 2x + 1 \xrightarrow{x=1} g(1) = 3$$

$$\Rightarrow (f - g)(1) = f(1) - g(1) = -1 - 3 = -4$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(آرش رحیمی)

چون مخرج کسر، به ازای $x = 3$ ، صفر می‌باشد و حاصل حد نیز متناهی است، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = 3$ صفر شود.

$$2 - \sqrt{3a - 2} = 0 \Rightarrow \sqrt{3a - 2} = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{2x - 2}}{\sqrt[3]{3x - 1} - 2} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x - 2}}}{\frac{1}{3}(3)(3x - 1) - \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

$$\Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + b = 0$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(میثم همزه لویی)

حد چپ، حد راست و مقدار تابع را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + [x]) = 0 + (-1) = -1$$

$$f(0) = [0] + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

حد چپ و مقدار تابع هیچ‌گاه با هم برابر نمی‌شوند، بنابراین تابع به‌ازای هیچ مقداری از a در $x=0$ پیوسته نیست.

(مر و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

(میثم همزه لویی)

$$f'(x) = 3 \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{3x+1}} \right)^2 \left(\frac{2x(\sqrt{3x+1}) - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(x^2 + 1)}{(\sqrt{3x+1})^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3 \left(\frac{2}{2} \right)^2 \left(\frac{2(2) - \frac{3}{4}(2)}{4} \right) = 3 \left(\frac{5}{8} \right) = \frac{15}{8}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمد بهیرایی)

از دستور توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^2 \left(\frac{3}{5} \right) = 3 \left(\frac{4}{25} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{36}{125}$$

(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رسول مفسنی منش)

از معادله اول می‌فهمیم که $\alpha + \beta = 3$ و $\alpha\beta = 1$. معادله جدید به صورت

$$x^2 - Sx + P = 0 \text{ خواهد بود که در آن:}$$

$$S = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} = \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_1 (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$P = (\alpha\sqrt{\beta})(\beta\sqrt{\alpha}) = \alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = 1 \times 1 = 1$$

پس باید $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را بیابیم:

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \underbrace{\alpha + \beta}_3 + 2 \underbrace{\sqrt{\alpha\beta}}_1 = 5 \Rightarrow S = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0 \text{ معادله برابر است با:}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۵ تا ۲۷)

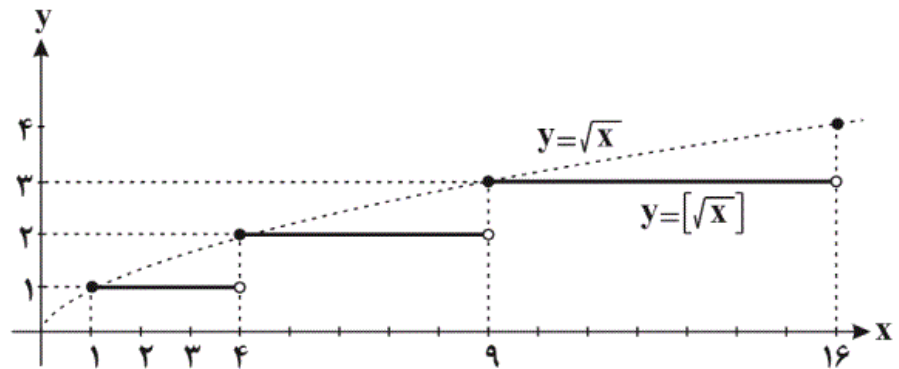
۴

۳

۲

۱ ✓

(سروش موثینی)



با توجه به شکل بالا، نمودار از سه پاره‌خط به طول‌های $4-1=3$ ، $9-4=5$ و $16-9=7$ تشکیل شده است.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

از رابطه $f^{-1}(g(a)) = -1$ نتیجه می‌گیریم:

$$g(a) = f(-1) = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 3$$

$$\frac{a+1}{a-1} = 3$$

پس:

$$\Rightarrow a+1 = 3a-3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۴

۳

۲✓

۱

(امیر زراندوز)

$$f(t) = 300 \Rightarrow 300 = 200 + 40e^{0.2t} \Rightarrow 100 = 40e^{0.2t}$$

$$\Rightarrow e^{0.2t} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{از دو طرف Ln می‌گیریم}} 0.2t = \text{Ln} \frac{5}{2}$$

$$0.2t = \text{Ln} 5 - \text{Ln} 2 \Rightarrow 0.2t = 1.6 - 0.7 \Rightarrow 0.2t = 0.9$$

$$\Rightarrow t = \frac{0.9}{0.2} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ (ماه)}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۸)

۴

۳✓

۲

۱

(سروش موئینی)

اگر به جای $\cos 2x$ بنویسیم $\cos(3x - x)$ ، داریم:

$$\cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin x \sin 3x$$

و اگر این عبارت را در صورت معادله جایگذاری کنیم، می‌شود:

$$\cos 3x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

جواب‌ها در $(0, 2\pi)$ عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

که جمع آن‌ها 6π است.

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳✓

۲

۱

(هسین اسفینی)

$$y = \ln \sqrt{1 + \cos x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} y = \ln \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$y = \ln \sqrt{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \times \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{2}} y' = \frac{-1}{2}$$

معادله خط مماس:

$$y - 0 = \frac{-1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2y = -x + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} 4y + 2x = \pi$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۷۵ تا ۷۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(هسین اسفینی)

$$\text{شیب خط عمود} = \tan 135^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\text{شیب خط مماس} = 1$$

$$\xrightarrow{\text{شیب مماس} = y'} y' = 1 \xrightarrow{y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x} x^2 + x - 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{2+3-6}{6} \Rightarrow A\left(1, \frac{-1}{6}\right)$$

معادله خط قائم برابر می‌شود با:

$$y - \left(-\frac{1}{6}\right) = -1(x-1) \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ} \quad x=0} y + \frac{1}{6} = -(0-1)$$

$$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سروش موئینی)

$$f(x) = (x+a)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+a) = (-x+1-a)e^{-x}$$

$$f''(x) = -1e^{-x} - e^{-x}(-x+1-a) = (x-2+a)e^{-x}$$

$$\xrightarrow{f''(2)=0} 1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

$\Rightarrow f'(x) = (2-x)e^{-x} = 0$ محاسبه طول ماکزیمم یا مینیمم

$$\Rightarrow x=2$$

x	2
f'	+ 0 -
f	↙ ↘ max

پس $x=2$ طول ماکزیمم نسبی تابع است.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میثم ممزه‌لویی)

تابع f فقط یک ریشه $x=0$ دارد، در نتیجه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + ax}{x+b} = 0 \Rightarrow x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-a \end{cases}$$

پس باید $-a$ نیز برابر صفر باشد.

از طرفی خط $x=1$ مجانب قائم تابع است. پس $x=1$ ریشه مخرج f است.

$$x=1: 1+b=0 \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a+b=-1$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسین فایلو)

دایره اول: $O(0,0), R=2$ دایره دوم: $x^2 + y^2 = 6x - 8y - 16$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$$

$$\Rightarrow O'(3, -4), R' = 3$$

$$OO' = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\Rightarrow OO' = R + R' = 5 \Rightarrow \text{دو دایره مماس خارجند}$$

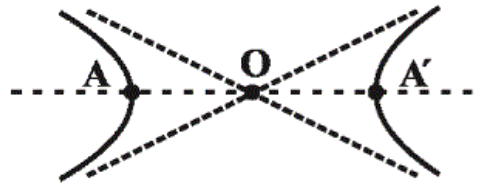
(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

۴

۳

۲✓

۱



$$x_O = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_A + x_{A'} = 2x_O$$

$$\xrightarrow{x_O = \frac{1}{2}} x_A + x_{A'} = 1$$

(هندسه مقدماتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۸)

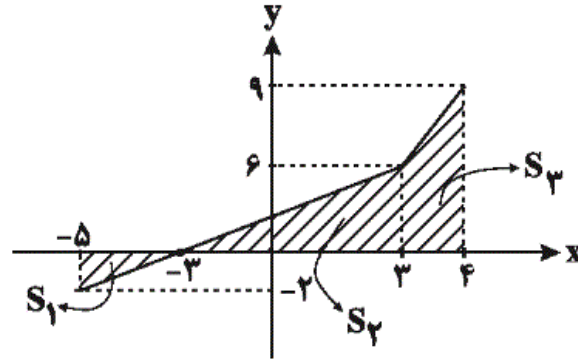
۴

۳

۲✓

۱

با توجه به نمودار زیر حاصل انتگرال خواسته شده برابر است با:



$$\int_{-5}^4 f(x)dx = -S_1 + S_2 + S_3$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & x \geq 3 \\ x + 3 & x < 3 \end{cases}$$

$$S_1 = \left| \frac{(2)f(-5)}{2} \right| = |f(-5)| = +2$$

$$S_2 = \frac{(6)f(3)}{2} = 3f(3) = 3(6) = 18$$

$$S_3 = \frac{(f(3) + f(4))(1)}{2} = \frac{(6 + 9)}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\int_{-5}^4 f(x)dx = -2 + 18 + 7/2 = 23/2$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

تابع $f(x)$ یک تابع درجه ۳ است که نقطه عطف این تابع، مرکز تقارن تابع هم می‌باشد، بنابراین:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2 \xrightarrow{\text{مختصات عطف}} I \begin{cases} -\frac{b}{3a} = \frac{6}{3 \times 2} = 1 \\ f\left(-\frac{b}{3a}\right) = f(1) = 2 - 6 + 2 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(1, -2)$$

(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۲)

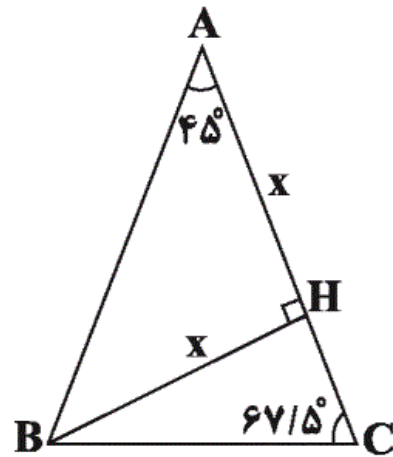
۴ ✓

۳

۲

۱

داریم:



$$\hat{A} = 180^\circ - 2 \times 67.5^\circ = 45^\circ$$

اگر در نظر بگیریم $AH = x$ از آن جا که مثلث ABH قائم الزاویه متساوی الساقین است $AB = \sqrt{2}x$ ، از آن جا که $AB = AC$ ، داریم:

$$CH = AC - AH = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2} - 1)x$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{x}{(\sqrt{2} - 1)x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

(ترکیبی) (هندسه ا، صفحه های ۲۱ تا ۲۷ و ۵۷ تا ۵۹)

۴

۳

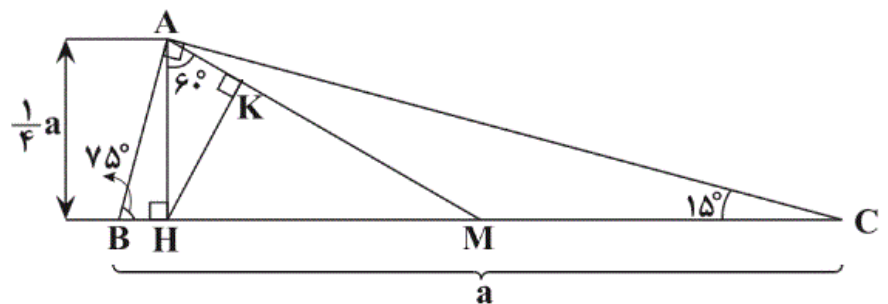
۲

۱

(مسئله فایلو)

طبق فرض $\hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$ ، از طرفی $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ ، پس: $\hat{B} = 75^\circ$ ، $\hat{C} = 15^\circ$

زاویه ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر هم $\hat{B} - \hat{C} = 60^\circ$ است.



اگر طول وتر را a در نظر بگیریم، آنگاه $AH = \frac{1}{4}a$. از طرفی در مثلث

قائم الزاویه AHK ، ضلع روبروی زاویه 60° ، وتر است، پس: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴

۳

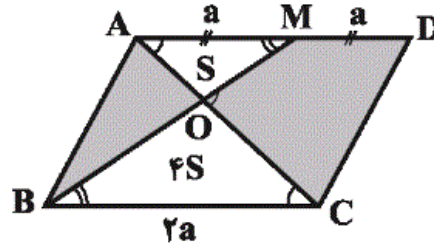
۲

۱

(مسین فایلو)

دو مثلث AOM و COB بنا به حالت تساوی زاویه‌ها متشابهند و نسبت

تشابه آنها $\frac{BC}{AM} = 2$ است.



پس اگر $S(AOM) = S$ ، آنگاه $S(COB) = 4S$. از آنجا که $BO = 2MO$ ، داریم $S(ABO) = 2S$ و از آنجا که قطر متوازی الاضلاع آن را به دو قسمت هم مساحت تقسیم می‌کند، داریم:

$$2S + 4S = S + S(OCDM) \Rightarrow S(OCDM) = 5S$$

$$\Rightarrow \frac{S(OCDM)}{S(ABO)} = \frac{5S}{2S} = 2.5$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱ و ۹۷ تا ۱۰۱)

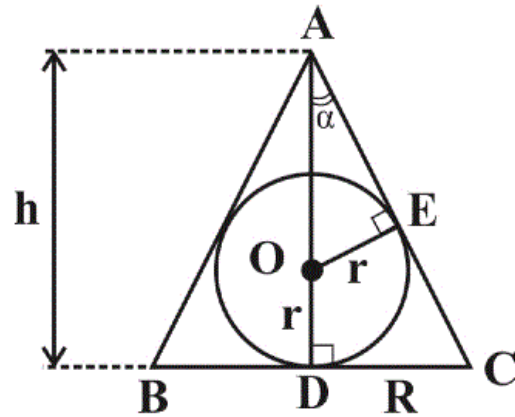
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در شکل روبرو دو مثلث قائم الزاویه‌ی AOE و ACD با هم متشابهند (هر دو یک زاویه‌ی حاده‌ی α دارند)، پس:



$$\frac{OE}{CD} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h-r}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

$$\frac{h=4}{R=3} \rightarrow \frac{r}{3} = \frac{4-r}{5} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{4r^3}{R^2 h} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3^2 \times 4} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$$

(ترکیبی) (هندسه ۱، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۱ و ۱۳۴ تا ۱۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓