



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۱- به ازای کدام مقدار a در تابع $f(x) = \begin{cases} x+a & ; x \leq 1 \\ b\sqrt{x} & ; x > 1 \end{cases}$ مقدار $f'(x)$ در نقطه $x=1$ موجود است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۲- مشتق تابع $y = \sin^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}x\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۳- اگر $f(x) = \frac{\sin x}{g(x)}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۴- مشتق دوم y نسبت به x در تساوی $3x^2 + y^2 = 2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{y^3}$ (۲) $-\frac{2}{y^3}$

(۳) $-\frac{3}{y^3}$ (۴) $-\frac{6}{y^3}$

شما پاسخ نداده اید

۵- اگر خط $2y + x = 5$ در نقطه‌ای به طول ۱، بر منحنی $y = f(x)$ مماس باشد، حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{\sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۲

(۳) ۲ (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۶- دو نقطه روی منحنی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ وجود دارد به طوری که مماس بر نمودار f در آن نقاط، موازی مماس بر نمودار f^{-1} در نقطه متناظر آن‌هاست. فاصله این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
 (۲) $2\sqrt{2}$
 (۳) $3\sqrt{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۷- اگر $P(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$ سود حاصل از فروش x دوچرخه به دلار و $R(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27x$ درآمد حاصل از فروش x دوچرخه به دلار باشند، هزینه تولید یک دوچرخه اضافی وقتی ۱۰ دوچرخه تولید می‌شود، تقریباً چند دلار است؟ ($8 < x < 30$)

- (۱) ۱۸۰
 (۲) ۱۹۵
 (۳) ۲۰۰
 (۴) ۲۱۵

شما پاسخ نداده اید

۸- ذره‌ای روی مسیر $y^2 - x^2 = 3$ در حرکت است. اگر مؤلفه x آن با سرعت 0.04 متر در ثانیه افزایش یابد، در نقطه $(1, 2)$ مؤلفه y با کدام سرعت تغییر می‌کند؟

- (۱) 0.02
 (۲) 0.06
 (۳) 0.012
 (۴) 0.015

شما پاسخ نداده اید

۹- تعداد نقاط بحرانی تابع $y = x^2 \sqrt{1-x}$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰- تابع $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ کدام وضع زیر را دارد؟

- (۱) یک مینیمم منفی دارد.
 (۲) یک مینیمم مثبت دارد.
 (۳) یک ماکزیمم منفی دارد.
 (۴) یک ماکزیمم مثبت دارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱- در تابع $f(x) = x \ln 2x$ ، نوع اکسترمم نسبی و مقدار عرض آن به ترتیب کدام است؟

- (۱) مینیمم - $\frac{1}{2e}$
 (۲) ماکزیمم - $\frac{1}{2e}$
 (۳) مینیمم - $-\frac{1}{2e}$
 (۴) ماکزیمم - $-\frac{1}{2e}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲- جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ و دامنه $(0, +\infty)$ چگونه است؟

- (۱) همواره به سمت بالا
 (۲) همواره به سمت پایین
 (۳) ابتدا به سمت بالا سپس به سمت پایین
 (۴) ابتدا به سمت پایین سپس به سمت بالا

شما پاسخ نداده اید

۱۳- اگر عرض نقطه عطف تابع $y = \frac{a}{x^2+1}$ برابر $\frac{3}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) -۲
 (۳) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴- در تابع $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$ ، کمترین مقدار شیب خط مماس بر منحنی در کدام نقاط رخ می‌دهد؟

- (۱) ± 1
 (۲) ± 2
 (۳) ± 3
 (۴) صفر

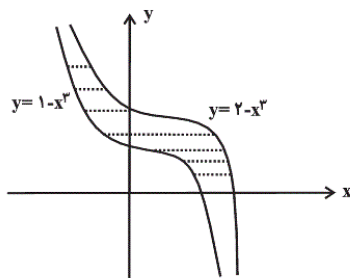
شما پاسخ نداده اید

۱۵- به ازای کدام مقدار A ، مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق (سراسری) تابع $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + A$ در بازه $[-1, 3]$ قرینه یکدیگرند؟

- (۱) $62/5$
 (۲) ۸۶
 (۳) $-62/5$
 (۴) -۸۶

شما پاسخ نداده اید

۱۶- مسیر یک جاده مطابق شکل مقابل است. این جاده مطابق شکل، دارای خط کشی افقی است. طول بزرگترین پاره خط در این جاده کدام

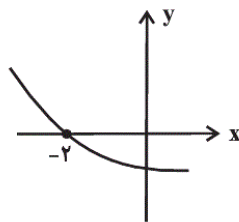


است؟

- (۱) $\sqrt{4}$
 (۲) $\sqrt{2}$
 (۳) ۱
 (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

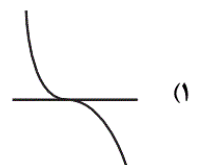
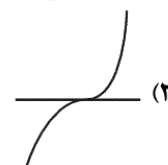
۱۷- با توجه به نمودار f ، کدام گزینه درست است؟



- (۱) $f(-2) < f'(-2) < f''(-2)$
 (۲) $f(-2) < f''(-2) < f'(-2)$
 (۳) $f'(-2) < f(-2) < f''(-2)$
 (۴) $f''(-2) < f(-2) < f'(-2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۸- شکل $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x-x})$ در همسایگی نقطه بحرانی اش چگونه است؟



شما پاسخ نداده اید

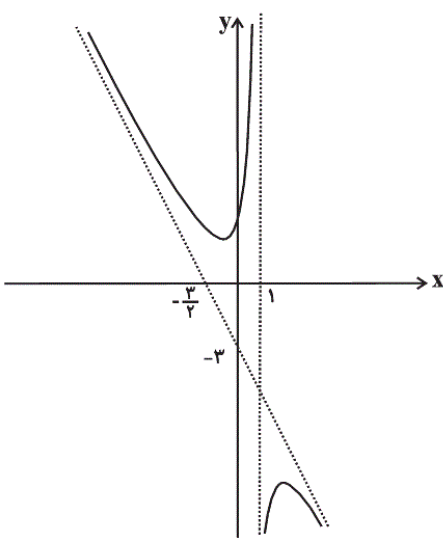
۱۹- نمودار تابع $y = \frac{ax^2 - bx - 3}{x + c}$ مطابق شکل مقابل است. $a + b - c$ کدام است؟

۱ (۱)

-۱ (۲)

-۲ (۳)

صفر (۴)



شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال - 13970228

۲۰- اگر $S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 + n}$ باشد، آن گاه حاصل $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۲۱- در تابع $f(x) = [x] + [3-x]$ نسبت $\frac{U_n}{L_n}$ در بازه $[0, 5]$ به ازای $n = 5$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

۱ (۱)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۲/۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۲۲- در محاسبه مساحت زیر نمودار $y = 9 - 2x$ از $x = 1$ تا $x = 4$ از روش مستطیل استفاده می‌کنیم. مقدار $S_{2n} - S_n$ کدام است؟

۶/n (۱)

۹/۲n (۳)

۱۲/n (۲)

۳/۲n (۴)

شما پاسخ نداده اید

۲۳- مجموع بالا و پایین تابع انتگرال پذیر f در بازه $[0, 2]$ به صورت $U_n = 3a - \frac{2n-5}{n}$ و $L_n = \frac{1+an}{n}$ می‌باشد. حاصل $\int_0^2 f(x) dx$ کدام

است؟

۲ (۱)

۶ (۳)

۴ (۲)

۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۲۴- اگر $A = \int_{-1}^1 (\tan^{-1} x - \cos^{-1} x) dx$ و $B = \int_{-1}^1 (3x^2 + \cos^{-1} x) dx$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱ (۱) $B = 2 - A$

۳ (۳) $B = A - 2$

۲ (۲) $B = 2 + A$

۴ (۴) $B = 1 + A$

شما پاسخ نداده اید

۲۵- اگر $\int_1^4 xf'(x)dx = 4$ باشد، قدرمطلق (اندازه) اختلاف $\int_1^4 f(x)dx$ با مقدار $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۲۶- نمودار تابع $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

- (۱) اول
(۲) دوم
(۳) سوم
(۴) چهارم

شما پاسخ نداده اید

۲۷- حاصل $\int_1^{\frac{1}{x}} x \left[\frac{1}{x} \right] dx$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{37}{72}$
(۲) $\frac{72}{37}$
(۳) $\frac{36}{45}$
(۴) $\frac{45}{36}$

شما پاسخ نداده اید

۲۸- مقدار $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $\frac{\pi}{6}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$
(۴) $\frac{5\pi}{6}$

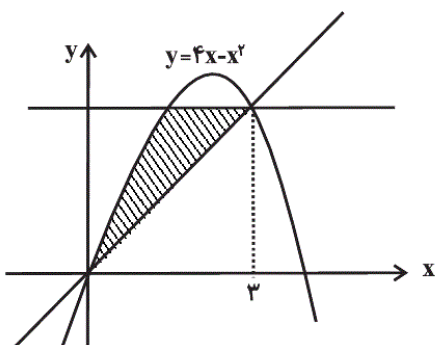
شما پاسخ نداده اید

۲۹- مقدار متوسط تابع $f(x) = x^3$ روی بازه $[0, a]$ برابر ۱۶ است. حاصل $\int_1^a f(x-2)dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$
(۲) $\frac{11}{4}$
(۳) $\frac{13}{4}$
(۴) $\frac{15}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۳۰- در شکل زیر مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



- (۱) $\frac{7}{6}$
(۲) $\frac{11}{6}$
(۳) $\frac{17}{6}$
(۴) $\frac{19}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۳۱- طول مستطیلی که اقطارش مجانب‌های هذلولی $9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$ هستند و دو ضلع آن بر هذلولی مماس است، کدام

است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - 13970228

۳۲- اگر $A^2 = 2A + 13I_2$ و $A^2 = 2A + 13I_2$ باشد، آنگاه ماتریس A کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۳۳- اگر F ناحیه‌ی درون و روی دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ باشد، آنگاه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ در اثر روی F ، آن را به ناحیه‌ی درون و روی کدام

شکل تبدیل می‌کند؟

- (۱) بیضی افقی
(۲) بیضی قائم
(۳) هذلولی افقی
(۴) هذلولی قائم

شما پاسخ نداده اید

۳۴- اگر $D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$ ، آنگاه D همواره برابر کدام است؟

- (۱) $(a+b+c)^3$
(۲) abc
(۳) $2abc$
(۴) $2(a+b+c)^3$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، دستگاه‌های معادلات خطی - 13970228

۳۵- اگر A^* ماتریس الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، $(A^{-1})^*$ کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

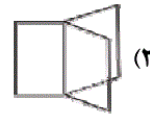
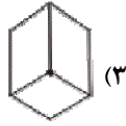
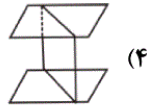
شما پاسخ نداده اید

۳۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|(A^*)^t|$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۱۲
(۳) ۳۶
(۴) ۱۴۴

شما پاسخ نداده اید

۳۷- اگر معادله‌های دستگاه $\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x-y+z=6 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$ معادلات سه صفحه باشند، این سه صفحه نسبت به هم چگونه می‌توانند باشند؟



شما پاسخ نداده اید

۳۸- ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & 0 & 1 & 2 \\ b & a & c & 4 \end{bmatrix}$ با عملیات سطری به ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ c & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ تبدیل شده است. در این صورت $a+b+c$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۹
(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۳۹- اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases} 2x+ay+3z=4 \\ 3x+by-z=1 \\ x+cy+2z=5 \end{cases}$ برابر ۷ باشد، مقدار y کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۴۰- اگر دستگاه $\begin{cases} ax-y=1 \\ y-z=1 \\ 2x-y-z=3 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، مجموعه جواب‌های این دستگاه در کدام یک از رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

- (۱) $x=y=z+1$
(۲) $x=y+1=z+2$
(۳) $x=y+1=z-1$
(۴) $x+1=y=z-1$

شما پاسخ نداده اید

۴۱- چند عدد شش رقمی به صورت $51x5y2$ وجود دارد به طوری که بر ۳۶ بخش پذیر باشد؟

۵ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - 13970228

۴۲- معادله $2x + y + z + w = 9$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۵۶ (۱)

۱۶ (۲)

۷۰ (۳)

۲۲ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۴۳- روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ چند رابطه می توان نوشت که نه خاصیت تقارنی داشته باشد و نه خاصیت پادتقارنی؟

۱۶۰ (۱)

۲۱۰ (۲)

۲۴۰ (۳)

۳۸۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۴۴- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، آن گاه چند رابطه هم‌ارزی می توان روی A تعریف کرد؟

۱۶ (۱)

۱۵ (۲)

۱۴ (۳)

۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، احتمال - 13970228

۴۵- خانواده‌ای ۴ فرزند دارند. اگر این خانواده، هم پسر و هم دختر داشته باشند، با کدام احتمال دقیقاً یک پسر دارند؟

$\frac{2}{7}$ (۱)

$\frac{4}{15}$ (۲)

$\frac{1}{7}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۴۶- دو کوزه سفید و سیاه داریم. در کوزه سفید، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در کوزه سیاه، ۲ مهره قرمز و ۶ مهره آبی وجود دارد. به وسیلهٔ ربانی که احتمال انتخاب کوزه سفید توسط آن، ۲ برابر کوزه سیاه است، کوزه‌ای را انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم.

اگر این مهره قرمز باشد، احتمال اینکه کوزه سفید انتخاب شده باشد، چقدر است؟

$\frac{2}{3}$ (۱)

$\frac{7}{16}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۴)

۴۷- در یک جعبه، ۵ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه موجود است. دو مهره به طور متوالی و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. اگر مهره دوم

سفید باشد، با کدام احتمال، اولین مهره نیز سفید است؟

$$\frac{2}{7} \quad (1)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{5}{14} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۴۸- اگر $P(X=i) = \frac{\binom{7}{i}}{n}$ یک تابع احتمال برای $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ باشد، n کدام است؟

$$128 \quad (1)$$

$$126 \quad (3)$$

$$127 \quad (2)$$

$$120 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۴۹- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه حاصل $P(A)P(B) - P(A) + 1$ کدام است؟

$$P(A' \cup B') \quad (1)$$

$$P(A \cup B) \quad (3)$$

$$P(A \cup B') \quad (2)$$

$$P(A' \cup B) \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۵۰- نقطه‌ای به تصادف درون ربع دایره‌ای به شعاع $8\sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم. احتمال آنکه این نقطه، درون دایره محاط در این ربع دایره قرار گیرد،

کدام است؟

$$\frac{16}{(1+\sqrt{2})^2} \quad (1)$$

$$\frac{4}{(1+\sqrt{2})^2} \quad (3)$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 \quad (2)$$

$$2(\sqrt{2}-1)^2 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

(عمید علیزاده)

-۱

$$f(x) = \begin{cases} x + a & x \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1 + a \\ b\sqrt[3]{x} & x > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b\sqrt[3]{x} = b \end{cases}$$

شرط پیوستگی در $x=1$ $\rightarrow b = 1 + a$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \Rightarrow f'_-(1) = 1 \\ b \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) & x > 1 \Rightarrow f'_+(x) = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} = 1 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

$b = 1 + a \xrightarrow{b=3} 3 = 1 + a \Rightarrow a = 2$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۳۸)

۴

۳

۲

۱

(عمید علیزاده)

-۲

$$y = \sin^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cos^{-1} x^2}_{\alpha} \right) = \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - x^2}{2}$$

$$\Rightarrow y' = -x \Rightarrow y' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{-1}{2}$$

تذکره: $\frac{1}{2} \cos^{-1} x^2 = \alpha \Rightarrow 2\alpha = \cos^{-1} x^2 \Rightarrow \cos 2\alpha = x^2$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۵)

۴

۳

۲

۱

(معمدرضا شوکتی بیرق)

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{(fg)'}{fg} = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot x \Big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۶۱ تا ۱۶۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(معمدرضا شوکتی بیرق)

$$3x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y' = -\frac{3x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{3y - 3xy'}{y^2}$$

$$= -\frac{3y - 3x(-\frac{3x}{y})}{y^2} = -\frac{3(3x^2 + y^2)}{y^3} = \frac{-3 \times 2}{y^3} = \frac{-6}{y^3}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱ و ۱۵۴ تا ۱۵۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

وقتی خط $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر $f(x)$ مماس است، یعنی:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f^2(x) - 2f(x))(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f^2(x) - 4}{x - 1} - \frac{2f(x) - 4}{x - 1} \right) (\sqrt{x} + 1)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - 2}{x - 1} \times (f(x) + 2) - 2 \left(\frac{f(x) - 2}{x - 1} \right) \right)$$

$$= 2(f'(1)(f(1) + 2) - 2f'(1)) = 2\left(-\frac{1}{2}(4) - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 2(-2 + 1) = -2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مدرس رضا شوکتی بیرق)

فرض کنیم (a, b) یکی از آن دو نقطه واقع بر نمودار تابع f باشد. پس:

$$(f^{-1})'(b) = f'(a) \Rightarrow \frac{1}{f'(a)} = f'(a) \Rightarrow (f'(a))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(a) = 1 & \text{غیر قابل قبول} \\ f'(a) = -1 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$f'(a) = \frac{-1}{(a+1)^2} \Rightarrow \frac{-1}{(a+1)^2} = -1 \Rightarrow (a+1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+1 = 1 \\ a+1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow A(0, 2) \\ a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow A'(-2, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{(0+2)^2 + (2-0)^2} \Rightarrow AA' = 2\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۲۶ و ۱۵۷ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید ستاری)

$$C(x) = R(x) - P(x)$$

$$C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27x - x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

$$C'(x) = 3x^2 - 12x + 15 \Rightarrow c'(10) = 300 - 120 + 15 = 195$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

(پیمان بهرام‌پور)

-۸

اگر نسبت به t از $y^2 - x^2 = 3$ مشتق بگیریم، داریم:

$$2y \frac{dy}{dt} - 2x \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 4 \frac{dy}{dt} - 2 \times 0 / 0.4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{0 / 0.8}{4} = 0 / 0.2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

(مهد مصطفی ابراهیمی)

-۹

دامنه تابع $(-\infty, 1]$ می‌باشد و حالا مشتق آن را بدست می‌آوریم:

$$y' = 2x\sqrt{1-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x(1-x) - x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{x(4 - 5x)}{2\sqrt{1-x}}$$

مشتق در $x = 0$ و $x = \frac{4}{5}$ برابر صفر است که هر دوی این نقاط در دامنه هستند. بهعلاوه در $x = 1$ مشتق وجود ندارد ولی چون این نقطه، نقطه درونی دامنه نیست آن را جزء نقاط بحرانی حساب نمی‌کنیم.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۳)

[۴]

[۳]✓

[۲]

[۱]

(مهم، رضا شوکتی بیرق)

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ تنها نقطه بحرانی}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x \Rightarrow y''(0) = 2 > 0$$

پس طبق آزمون مشتق دوم، نقطه $x = 0$ نقطه مینیمم نسبی تابع است و چون

$$f(0) = -1 \text{، پس تابع یک مینیمم منفی دارد.}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

x	0	$\frac{1}{2e}$	$+\infty$
f'		-	+
	↘	min	↗

اگر تعیین علامت مشتق برایتان دشوار است می‌توانید از آزمون مشتق دوم هم استفاده کنید.

$$f''(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x=\frac{1}{2e}} f''\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2e}} = 2e > 0 \Rightarrow \min$$

عرض اکسترمم نسبی را بدست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e} \ln 2\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{2e} (-1) = -\frac{1}{2e}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ابلالی)

-۱۲

مشتق دوم تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

چون $x > 0$ ، بنابراین $f''(x) > 0$ و جهت تقعر نمودار تابع همواره به سمت بالاست.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مقدمه مصطفی ابراهیمی)

$$y' = \frac{-2ax}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-2a(x^2 + 1)^2 - 4x(x^2 + 1)(-2ax)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{-2a(x^2 + 1) - 4x(-2ax)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{-2a(x^2 + 1 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

حالا در تابع مقدار x^2 را برابر $\frac{1}{3}$ قرار می‌دهیم تا عرض نقطه عطف بدست آید:

$$y(x^2 = \frac{1}{3}) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عیب شفیع)

کمترین مقدار شیب خط مماس زمانی رخ می‌دهد که y' ، کمترین مقدار باشد.

$$y' = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1$$

کمترین مقدار y' به ازای $x^2 - 1 = 0$ حاصل می‌شود. پس: $x = \pm 1$.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶ و ۱۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = 3x^5 - 20x^3 + A \Rightarrow f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \notin [-1, 3] \Rightarrow \text{نقاط بحرانی} = \{0, 2\}$$

x	-1	0	2	3
f(x)	17 + A	A	<u>A - 64</u>	<u>189 + A</u>
			Min مطلق	Max مطلق

$$\Rightarrow 189 + A = -(A - 64) \Rightarrow 2A = 64 - 189$$

$$2A = -125 \rightarrow A = -62.5$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۷)

 ۴

 ۳

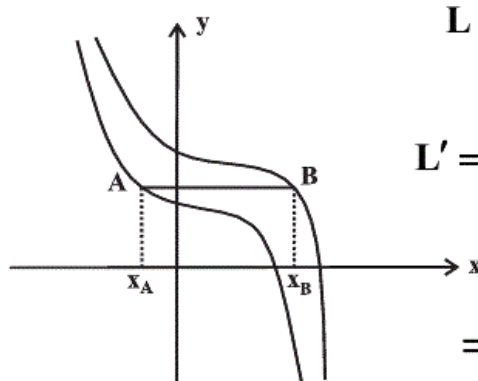
 ۲

 ۱

(کامپلکس ابلالی)

-۱۶

فرض کنید AB بزرگترین پاره‌خط باشد که طول آن L است. داریم:



$$L = x_B - x_A = \sqrt[3]{2-y} - \sqrt[3]{1-y}$$

$$L' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(2-y)^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(1-y)^2} = \sqrt[3]{(2-y)^2}$$

$$\Rightarrow (1-y)^2 = (2-y)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-y = 2-y \Rightarrow 1=2 & \text{غ ق ق} \\ 1-y = -2+y \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین:

$$L = \sqrt[3]{2 - \frac{3}{2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(جمال الدین حسینی)

$$f(-2) = 0$$

با توجه به نمودار داریم:

$$f'(-2) < 0$$

چون f نزولی است:

$$f''(-2) > 0$$

چون تقعر به سمت بالاست:

$$f'(2) < f(-2) < f''(-2)$$

بنابراین:

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴ و ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمیر علیزاده)

- ۱۸

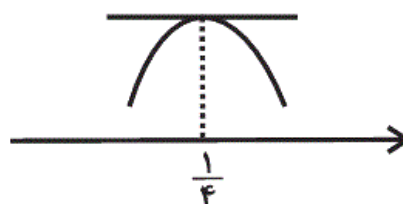
$$f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x} - x)$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{1 + (\sqrt{x} - x)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$
 نقطه بحرانی

عامل صفر کننده در $x = \frac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{1 + (\sqrt{x} - x)^2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} \left(\frac{1}{1 + (\sqrt{x} - x)^2} \right)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین است.}$$



(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۲ و ۱۸۰ تا ۱۸۴ و ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کیا مقدس نیاک)

مجانب قائم است. $x = 1 \Rightarrow 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$ مجانب مایل از نقاط $(-\frac{3}{2}, 0)$ و $(0, -3)$ می‌گذرد، پس شیب مجانب مایل برابر

است با:

$$m = \frac{-3 - 0}{0 - (-\frac{3}{2})} = -2 \Rightarrow \frac{a}{1} = -2 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2x^2 - bx - 3}{x - 1}$$

با توجه به تابع فوق، با تقسیم صورت بر مخرج، معادله مجانب مایل با توجه به خارج

قسمت تقسیم به دست می‌آید:

$$\text{مجانب مایل: } y = -2x - (b + 2)$$

نقطه $(0, -3)$ روی مجانب مایل قرار دارد، بنابراین:

$$-3 = -(b + 2) \Rightarrow b = 3 - 2 = 1$$

$$a + b - c \Rightarrow -2 + 1 - (-1) = 0$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال - 13970228

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^k \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - 0 = 1$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۴

۳

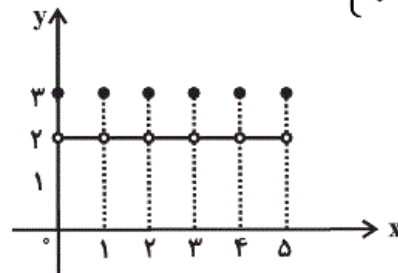
۲

۱ ✓

(فریدون ساعتی)

-۲۱

$$f(x) = [x] + [-x] + 3 = \begin{cases} -1 + 3 = 2 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 + 3 = 3 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$$

$$U_\Delta = \sum_{i=1}^5 f(U_i) \Delta x = 1(3 + 3 + 3 + 3 + 3) = 15$$

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^5 f(L_i) \Delta x = 1(2 + 2 + 2 + 2 + 2) = 10$$

$$\Rightarrow \frac{U_\Delta}{L_\Delta} = \frac{15}{10} = 1.5$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\gamma - \frac{\epsilon}{n} i \right) \frac{\gamma}{n}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \left(\gamma - \frac{\epsilon}{n} i \right) = \frac{\gamma}{n} \left(\sum_{i=1}^n \gamma - \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n i \right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\gamma}{n} \left(\gamma n - \frac{\epsilon}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \right) \Rightarrow S_n = \frac{12n-9}{n}$$

$$\Rightarrow S_{2n} - S_n = \frac{24n-9}{2n} - \frac{12n-9}{n} = \frac{24n-9-24n+18}{2n} = \frac{9}{2n}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۹ تا ۲۲۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(فریرون ساعتی)

-۲۳

f در $[0, 2]$ انتگرال پذیر است. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \left(2a - \frac{2n-5}{n} \right) = 2a - 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+an}{n} = a \end{array} \right\} \xrightarrow{f \text{ انتگرال پذیر}} 2a - 2 = a$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2(1) - \frac{2n-5}{n} \right) = 2 - 2 = 1$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کاظم ابلالی)

-۲۴

مجموع دو انتگرال را محاسبه می‌کنیم:

$$A + B = \int_{-1}^1 (\tan^{-1} x + 3x^2) dx = \int_{-1}^1 \tan^{-1} x dx + \int_{-1}^1 3x^2 dx$$

با توجه به این که تابع $y = \tan^{-1} x$ فرد است، $\int_{-1}^1 \tan^{-1} x dx = 0$ و داریم:

$$A + B = \int_{-1}^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$$

$$\Rightarrow B = 2 - A$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

فرض کنید $\int_0^1 f(x)dx = a$ ، آن گاه:

$$\int_0^1 xf'(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 4 + a$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (xf'(x) + f(x))dx = \int_0^1 (xf(x))'dx$$

$$= xf(x) \Big|_0^1 = 1 \times f(1) - 0 = f(1)$$

$$\Rightarrow f(1) = 4 + a \Rightarrow f(1) - a = 4$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

-۲۶

تابع $y = \sqrt{1+t^2}$ روی \mathbb{R} پیوسته و در نتیجه، انتگرال پذیر است. پس

$D_f = \mathbb{R}$ ، از طرفی:

پس f پیوسته و صعودی اکید است. $\Rightarrow f'(x) = \sqrt{1+x^2} > 0$

چون f صعودی اکید و $f(1) = 0$ پس $x = 1$ تنها ریشه f است.

بنابراین تابع f در \mathbb{R} صعودی اکید با ریشه مثبت است، پس نمودار آن از ناحیه دوم

عبور نمی‌کند.

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(پیمان بهرام‌پور)

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 2$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

پس داریم:

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx$$

$$= x^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{3}}^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -2$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مرضیه کوردوزی)

$$\text{انتگرال} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 0 - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\frac{y}{b-a} = \frac{\int_0^a f(x) dx}{b-a} \Rightarrow 16 = \frac{\int_0^a x^3 dx}{a-0} \Rightarrow 16 = \frac{x^4}{4a} \Big|_0^a$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{a^4}{4} \Rightarrow a = 4$$

$$\int_1^a f(x-2) dx = \int_1^4 (x-2)^3 dx = \frac{(x-2)^4}{4} \Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{4} \left((4-2)^4 - (1-2)^4 \right) = \frac{1}{4} (16 - 1) = \frac{15}{4}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۴۹)

۴

۳

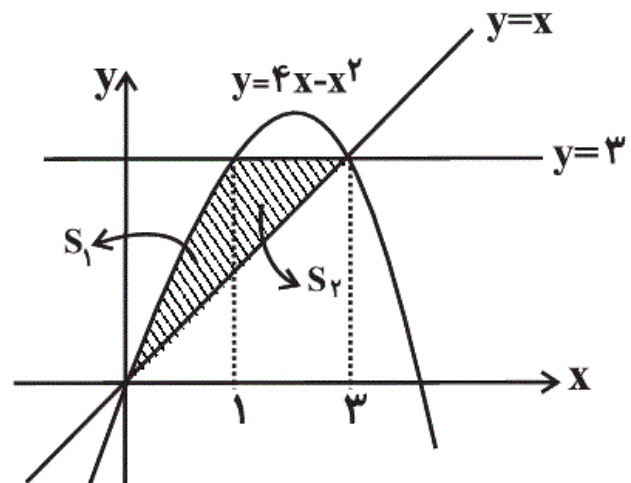
۲

۱

$$x = 3 \Rightarrow y = 4(3) - (3)^2 = 3 \Rightarrow \text{معادله خط افقی } y = 3$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط مورب } y = x$$

$$\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 (4x - x^2 - x) dx + \int_1^3 (3 - x) dx$$

$$S = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 + \left(3x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^3$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(3 - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{7}{6} + 2 = \frac{19}{6}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$-9(x^2 + 8x) + 16(y^2 - 6y) = 144 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+4)^2}{16} = 1$$

طول اضلاع این مستطیل $2a$ و $2b$ ، یعنی برابر ۶ و ۸ است. پس طول آن برابر با

۸ می‌باشد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - 13970228

(عباس اسدی امیرآبادی)

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+13 & 2b \\ 2c & 2d+13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+13=9 \Rightarrow 2a=-4 \Rightarrow a=-2 \\ 2b=2 \Rightarrow b=1 \\ 2c=10 \Rightarrow c=5 \\ 2d+13=21 \Rightarrow 2d=8 \Rightarrow d=4 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x = x' \Rightarrow x = \frac{x'}{3} \\ 2y = y' \Rightarrow y = \frac{y'}{2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}x' - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y' + 1\right)^2 = 9$$

$$\frac{1}{9}(x' - 6)^2 + \frac{1}{4}(y' + 2)^2 = 9$$

$$\frac{(x' - 6)^2}{81} + \frac{(y' + 2)^2}{36} = 1. \text{ معادله حاصل، معادله یک بیضی افقی است.}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ستون‌های دوم و سوم را به ستون اول می‌افزاییم و از $2(a+b+c)$ در ستون اول فاکتور می‌گیریم.

$$D = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

سطر اول را در (-1) ضرب می‌کنیم و آن را یک‌بار با سطر دوم و یک‌بار با سطر سوم جمع می‌نماییم:

$$D = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان ماتریس بالا مثلثی (یا پایین مثلثی) برابر است با حاصل ضرب

درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس، پس داریم:

$$D = 2(a+b+c)^3$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۵)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \Rightarrow \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = |\mathbf{A}^{-1}| (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^* = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{-3} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سامان اسپهرم)

-۳۶

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1} = |\mathbf{A}|^2 \Rightarrow |\mathbf{A}^*| = 36 \Rightarrow |(\mathbf{A}^*)^t| = 36$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

چون دترمینان مخالف صفر است، پس دستگاه جواب منحصر به فرد دارد، یعنی سه صفحه از یک نقطه می‌گذرند.

(هندسه‌ی تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سید عادل رضا مر تقوی)

دستگاه معادل با ماتریس دومی عبارت است از:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \\ cx_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

با جایگذاری مقدار x_3 در معادله اول، $x_1 = 1$ به دست می‌آید.

از طرفی دستگاه معادل با ماتریس اولی عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ ax_1 + x_3 = 2 \\ bx_1 + ax_2 + cx_3 = 4 \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر x_1 و x_3 در معادله اول این دستگاه، $x_2 = 2$ حاصل می‌شود

و داریم:

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 2 \xrightarrow[x_3=2]{x_1=1} a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0 \\ cx_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow c + 2 + 2 = 5 \Rightarrow c = 1 \\ bx_1 + ax_2 + cx_3 = 4 \Rightarrow b + 2 = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 0 + 2 + 1 = 3$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۴۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{7}$$

$$= \frac{(4 - 4 + 45) - (3 - 10 + 24)}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون دستگاه بی‌شمار جواب دارد، پس دترمینان ماتریس ضرایب باید برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 1$$

فصل مشترک دو صفحه $x - y = 1$ و $y - z = 1$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow{y=t} \begin{cases} x = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{فصل مشترک این دو صفحه یعنی خط} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ در معادله صفحه}$$

$2x - y - z = 3$ صدق می‌کند، پس این خط فصل مشترک سه صفحه و جواب

دستگاه است. با انتخاب $t' = t + 1$ ، معادله فصل مشترک سه صفحه که مجموعه

$$\text{جواب دستگاه است، به صورت} \begin{cases} x = t' \\ y = t' - 1 \\ z = t' - 2 \end{cases} \text{ خواهد بود. که معادل}$$

$$x = y + 1 = z + 2 \text{ می‌باشد.}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر عددی بر ۳۶ بخش پذیر باشد، بر ۴ و ۹ هم بخش پذیر است.

$$\overline{\quad\quad\quad}^4 \quad \quad \quad \overline{\quad\quad\quad}^4 \quad \quad \quad \overline{\quad\quad\quad}^4$$

$$51x5y2 \equiv 0 \Rightarrow 2 + 2y \equiv 0 \Rightarrow 2y \equiv -2$$

$$\xrightarrow{\div 2} y \equiv -1 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$\overline{\quad\quad\quad}^9 \quad \quad \quad \overline{\quad\quad\quad}^9 \quad \quad \quad \overline{\quad\quad\quad}^9$$

$$51x5y2 \equiv 0 \Rightarrow x + y + 13 \equiv 0 \Rightarrow x + y + 4 \equiv 0$$

$$y = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{matrix}$$

$$x = 4, 2, \{0, 9\}, 7, 5$$

بنابراین شش عدد با مشخصات مورد نظر وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، ترکیبیات - 13970228

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

X ضریب ۲ دارد، پس مسأله را برحسب مقادیر مختلف X تفکیک می‌کنیم و

جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow y + z + w = 7 \Rightarrow \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x = 2 \Rightarrow y + z + w = 5 \Rightarrow \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x = 3 \Rightarrow y + z + w = 3 \Rightarrow \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$15 + 6 + 1 = 22$$

دقت کنید که X نمی‌تواند بزرگتر از ۳ باشد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

اگر تعداد کل رابطه‌ها را با $|S|$ و تعداد روابط تقارنی را با $|A_1|$ و تعداد روابط پادتقارنی را با $|A_2|$ نشان دهیم، باید $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}|$ را پیدا کنیم. ماتریس مجاورت رابطه R که روی مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ تعریف می‌شود، ۹ درایه دارد و هر کدام از این درایه‌ها برابر ۱ یا صفر است. حال طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 2^9 - 2^6 - (2^3 \times 3^3) + 2^3 = 512 - 64 - 216 + 8 = 240$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۵)

۴

۳

۲

۱

(سروش موثینی)

-۴۴

تعداد روابط هم ارزی روی یک مجموعه، برابر تعداد افزای‌های آن مجموعه است.



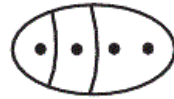
$$\rightarrow \frac{4!}{4!} = 1$$



$$\rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 3$$



$$\rightarrow \frac{4!}{1!3!} = 4$$



$$\frac{4!}{1!1!2!2!} = 6$$



$$\rightarrow \frac{4!}{1!1!1!1!4!} = 1$$

مجموعه A دارای ۱۵ افزای مختلف است، پس ۱۵ رابطه هم ارزی روی مجموعه A قابل تعریف است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: مشابه تمرین ۲، قسمت (خ): صفحه ۶۹)

۴

۳

۲

۱

برای داشتن هم پسر و هم دختر، از کل $2^4 = 16$ حالت، دو حالت که همه پسر یا همه دختر باشند، مورد قبول نیست. تعداد حالاتی که این خانواده دقیقاً ۱ پسر داشته باشند، برابر ۴ است و داریم:

$$P(\text{هم پسر و هم دختر} \mid \text{دقیقاً یک پسر}) = \frac{P(\text{دقیقاً یک پسر})}{P(\text{هم پسر و هم دختر})} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{14}{16}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

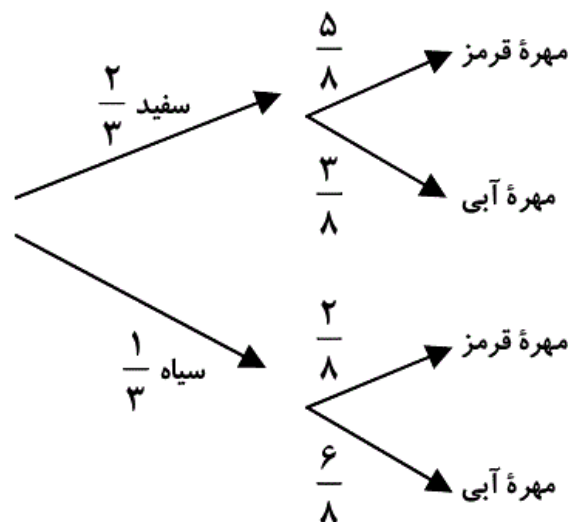
 ۲

 ۱

(مسن فاطمی)

-۴۶

این ربات کوزه سفید را با احتمال $\frac{2}{3}$ و کوزه سیاه را با احتمال $\frac{1}{3}$ انتخاب می‌کند.



$$P(\text{مهره قرمز}) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{8}$$

$$P(\text{مهره قرمز} \mid \text{کوزه سفید}) = \frac{P(\text{کوزه سفید}) \times P(\text{مهره قرمز} \mid \text{کوزه سفید})}{P(\text{مهره قرمز})}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}}{\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{8}} = \frac{5}{6}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

روش اول: اگر پیشامد سفید بودن مهره دوم را با A و پیشامدهای سفید بودن مهره اول و سیاه بودن مهره اول را به ترتیب با B_1 و B_2 نشان دهیم، آن گاه:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{5}{15} \times \frac{4}{14}}{\frac{5}{15} \times \frac{4}{14} + \frac{10}{15} \times \frac{5}{14}} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$$

روش دوم: احتمال مورد نظر سؤال معادل احتمال پیشامدی است که در صورتی که مهره اول خارج شده از جعبه سفید باشد، آن گاه مهره دوم نیز سفید خارج گردد. واضح است که بعد از خروج یک مهره سفید، ۴ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه در جعبه باقی می ماند و احتمال خروج مهره سفید دوم در این حالت،

$$\text{برابر } \frac{2}{7} \text{ یا } \frac{4}{14} \text{ است.}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه های ۱۵ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سروش موثینی)

-۴۸

$$\sum P(X=i) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}}{n}$$

$$= \frac{2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1}}{n} = \frac{128 - 1 - 7}{n} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{120}{n} = 1 \Rightarrow n = 120$$

(ریاضیات گسسته - توزیع های گسسته احتمال: صفحه های ۹۳ تا ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر باشند، آن گاه $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ است. همچنین $P(A') = 1 - P(A)$ است، پس داریم:

$$P(A)P(B) - P(A) + 1 = P(A \cap B) + P(A')$$

چون دو پیشامد A' و $A \cap B$ ، ناسازگار هستند، پس حاصل عبارت فوق برابر است با:

$$P[(A \cap B) \cup A'] = P[\underbrace{(A \cup A')}_U \cap (B \cup A')] = P(A' \cup B)$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

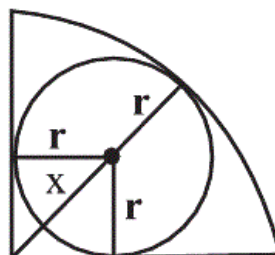
 ۱

(معمدهوری ممسن؛ زاده طبری)

$$r + x = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$$

$$r = \frac{8\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4 \left(\frac{8\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^2}{(8\sqrt{2})^2} = \frac{4 \times \frac{(8\sqrt{2})^2}{(1 + \sqrt{2})^2}}{(8\sqrt{2})^2} = \frac{4}{(1 + \sqrt{2})^2}$$



(بیر و احتمال - احتمال: صفحه های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱