



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

ریاضی، هندسه 2، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی 2)، هندسه‌ی فضایی - 13970214

۱۳۱- دو صفحه P و Q بر هم عمود هستند و خط L فصل مشترک این دو صفحه است. در این صورت:

(۱) هر خط عمود بر L و متقاطع با آن، به تمامی در یکی از دو صفحه قرار دارد.

(۲) هر صفحه عمود بر یکی از دو صفحه، با صفحه دیگر موازی است.

(۳) هر صفحه عمود بر L بر این دو صفحه عمود است.

(۴) هر خط موازی با یکی از صفحه‌ها، بر صفحه دیگر عمود است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) از یک نقطه خارج یک صفحه، فقط یک خط به موازات آن صفحه می‌توان رسم کرد.

(۲) از یک نقطه خارج یک صفحه، فقط یک خط بر آن صفحه می‌توان عمود کرد.

(۳) دو صفحه عمود بر یک خط، موازی‌اند.

(۴) دو خط عمود بر یک صفحه، موازی‌اند.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- خط Δ فصل مشترک دو صفحه P و P' است. اگر خط Δ' بر صفحه P' عمود باشد، آن‌گاه دو خط Δ و Δ' نسبت به هم چگونه‌اند؟

(۱) متقاطع یا متناظر (۲) فقط متناظر

(۳) موازی (۴) فقط متقاطع

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- خط Δ و دو نقطه A و B خارج از آن در فضا مفروض‌اند. چه تعداد از گزاره‌های زیر می‌تواند درست باشد؟

(الف) هیچ نقطه‌ای روی خط Δ وجود ندارد که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.

(ب) یک نقطه روی خط Δ وجود دارد که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.

(پ) بی‌شمار نقطه روی خط Δ وجود دارد که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد.

(۱) ۳ (۲) ۲

(۳) ۱ (۴) هیچ

شما پاسخ نداده اید

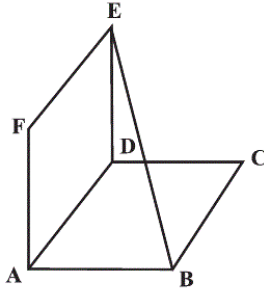
۱۳۵- دو صفحه P و P' بر هم عمودند و خط D فصل مشترک آنها است. از نقطه A خارج دو صفحه، خط Δ را بر صفحه P عمود و خط Δ' را با

صفحه P' موازی رسم می‌کنیم. صفحه Q که بر دو خط Δ و Δ' می‌گذرد کدام ویژگی را ندارد؟

- (۱) بر صفحه P عمود است.
 (۲) با خط D موازی است.
 (۳) با صفحه P' موازی است.
 (۴) بر خط D عمود است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- در شکل زیر صفحه مربع ADEF بر صفحه مربع ABCD عمود است. اگر $EB = 12$ باشد، طول AB کدام است؟



(۱) $4\sqrt{2}$

(۲) $4\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- تصاویر قائم دو خط متناظر بر یک صفحه مفروض، کدام حالت را نمی‌تواند داشته باشد؟

- (۱) دو خط موازی
 (۲) دو خط متقاطع
 (۳) یک نقطه و یک خط
 (۴) دو نقطه

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- اگر خط d عمود مشترک دو خط متناظر d_1 و d_2 باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) صفحه شامل d و d_1 ، بر خط d_2 عمود است.
 (۲) هر صفحه شامل d، بر دو خط d_1 و d_2 عمود است.
 (۳) هر صفحه عمود بر d، با دو خط d_1 و d_2 موازی است.
 (۴) هر صفحه موازی با d، دقیقاً یکی از خطوط d_1 و d_2 را قطع می‌کند.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- خط d بر صفحه P واقع است. چند صفحه مانند P' وجود دارد که در آن خطوطی وجود داشته باشد که بر d عمود باشد، اما این خطوط

بر P عمود نباشند؟

- (۱) یک
 (۲) دو
 (۳) هیچ
 (۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- مکان هندسی نقاطی از فضا که از چهار رأس یک مستطیل به یک فاصله باشند، کدام است؟

- (۱) صفحه‌ای که از یک قطر مستطیل بگذرد و بر صفحه مستطیل عمود باشد.
 (۲) خطی که در نقطه برخورد قطرهای مستطیل، بر صفحه مستطیل عمود شود.
 (۳) خطی که با یک قطر مستطیل موازی است و فاصله این خط از صفحه مستطیل نصف طول قطر است.
 (۴) صفحه‌ای که با صفحه مستطیل موازی است و فاصله این صفحه از صفحه مستطیل، نصف طول قطر است.

۸۱- تقعر نمودار تابع $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^2$ در بازه (a, b) روبه بالا می‌باشد. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر $(-\frac{\pi}{6}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$ نقطهٔ مینیمم تابع $f(x) = a\sin 2x - b\cos^2 x$ باشد، مقدار b کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- طول نقطهٔ عطف تابع $f(x) = \frac{2x+3}{e^x}$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $-\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- تابع $f(x) = |x|(x^2 - x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) اکسترمم نسبی ندارد.

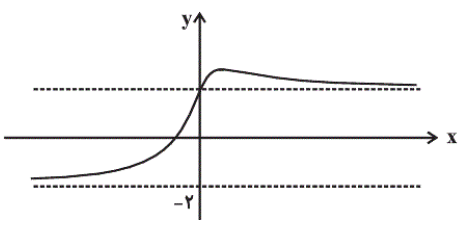
شما پاسخ نداده اید

۸۵- نمودار $y = \ln(x + \sin x + 1)$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟

- (۱) 
- (۲) 
- (۳) 
- (۴) 

شما پاسخ نداده اید

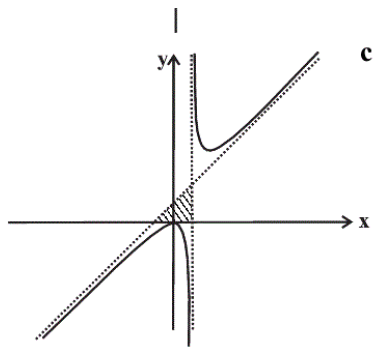
۸۶- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$ به صورت مقابل باشد، ماکزیمم مطلق آن کدام است؟



- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳) $2\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

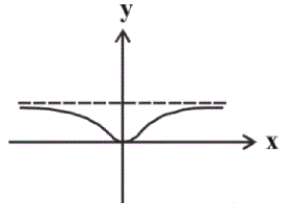
۸۷- در شکل مقابل نمودار $y = \frac{x^2+a}{x+c}$ داده شده است. اگر مساحت مثلث هاشور خورده ۲ باشد، c کدام است؟



- (۱) -۱
- (۲) ۱
- (۳) -۲
- (۴) $-\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- ضابطهٔ نمودار تابع شکل مقابل، کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
- (۱) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$
- (۲) $y = \frac{|x|}{|x|-1}$
- (۲) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$
- (۳) $y = \frac{|x|}{|x|+1}$
- (۴) $y = \frac{|x|}{|x|-1}$

۸۹- اگر $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i-3} + \sqrt{i-2}} = 5$ باشد، n کدام است؟

۸۴ (۴)

۸۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۶ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۹۰- حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\cos \frac{k! \pi}{3}}{3^k}$ کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- برای دو ماتریس A و B اگر $B^T = (AA^T)^{-1}A$ ، ماتریس B همواره برابر کدام است؟

 B^T (۲) A (۱) A^{-1} (۴) A^T (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر برای دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر A و B از مرتبه ۲، $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A + B$ کدام است؟

 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۱) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر دستگاه $\begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ 4x + ay + 4z = 1 \\ 2x + 2y + z = b \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، $a + b$ کدام است؟

-۱ (۲)

 $-\frac{9}{4}$ (۱)

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

$$114- \text{اگر دستگاه} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ مفروض باشد، آنگاه این دستگاه دارای چند جواب است؟}$$

(۱) یک (۲) بی‌شمار

(۳) دو (۴) سه

شما پاسخ نداده اید

$$115- \text{کدام رابطه بین } a \text{ و } b \text{ برقرار باشد تا دستگاه} \begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y = b \\ x + 3y = 1 \end{cases} \text{ جواب منحصر به فرد داشته باشد؟}$$

(۱) $\forall a - b = 5$ (۲) $\forall a - 5b = -3$

(۳) $5a - b = 5$ (۴) $\forall a + b = 5$

شما پاسخ نداده اید

$$116- \text{اگر دستگاه} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ پس از انجام اعمال سطری مقدماتی به ماتریس} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -13 \end{bmatrix} \text{ تبدیل شده باشد، } a + b \text{ کدام است؟}$$

(۱) ۲۱ (۲) ۲۴

(۳) ۲۷ (۴) ۳۳

شما پاسخ نداده اید

$$117- \text{در دستگاه معادلات خطی با معادله } AX = B, \text{ اگر } A^* = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } (|A| > 0) \text{ باشد، آنگاه } X \text{ کدام است؟}$$

(A^* ماتریس الحاقی ماتریس A است.)

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} & (1) \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & (2) \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & (3) \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & (4) \end{matrix}$$

شما پاسخ نداده اید

$$118- \text{اگر دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات مقابل، برابر } 5 \text{ باشد و داشته باشیم } y = \frac{-17}{10}, \text{ مقدار } b \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 5 \\ bx + 3y - z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(۱) -۱ (۲) ۱

(۳) -۲ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

$$119- \text{در یک دستگاه معادلات خطی، } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ماتریس ضرایب و } B = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ماتریس مقادیر ثابت دستگاه است. اگر } X$$

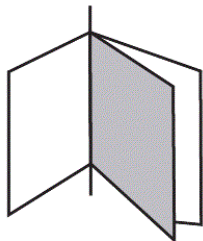
(مجهول اول در ماتریس مجهولات)، برابر ۲ باشد، a کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳

(۳) ۳ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

متناظر با سه صفحه مطابق شکل زیر باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



$$\begin{bmatrix} a+2 & b & c \\ a & b+2 & c \\ a & b & c+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۱) $a + b + c = -2$

(۲) $a + b + c = 2$

(۳) $a + b + c = 0$

(۴) a, b, c هر عدد حقیقی دلخواهی می توانند باشند.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته، احتمال - 13970214

۱۲۱- احتمال آنکه روز تولد ۲۰ دانش آموز یک کلاس، ۲۰ روز مختلف از روزهای سال باشد، چقدر است؟ (از سال کیسه صرف نظر می کنیم)

(۲) $\frac{P(365, 20)}{20^{365}}$

(۴) $\frac{1}{20^{365}}$

(۱) $\frac{\binom{365}{20}}{365^{20}}$

(۳) $\frac{P(365, 20)}{365^{20}}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در کیسه‌ای، مهره‌هایی با شماره‌های ۱ تا n از هر یک از سه رنگ سفید، زرد و آبی موجود است. اگر از این کیسه دو مهره خارج کنیم، با

کدام احتمال این ۲ مهره هم‌رنگ هستند یا شماره یکسانی دارند؟

(۲) $\frac{n+1}{3n+1}$

(۴) $\frac{n-1}{3n+1}$

(۱) $\frac{n+1}{3n-1}$

(۳) $\frac{n-1}{3n-1}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- دو قطعه چوب به طول‌های l و $l(\sqrt{3}+2)$ داریم. قطعه بزرگتر را به تصادف از نقطه‌ای دلخواه می‌بریم. احتمال آن که بتوان با سه قطعه

چوب موجود، یک مثلث ساخت، چقدر است؟

(۲) $\sqrt{3}-1$

(۴) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

(۱) $2-\sqrt{3}$

(۳) $\sqrt{5}-2$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- یک کارخانه اسباب بازی دو محصول A و B را تولید می‌کند. در محصول A، ۵ کارت آبی و ۳ کارت قرمز و در محصول B، ۳ کارت

قرمز و ۲ کارت آبی وجود دارد. ۴ عدد از محصول A و ۲ عدد از محصول B را در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یک کارت به تصادف

از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این کارت قرمز باشد، کدام است؟

(۲) $\frac{39}{40}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{39}{80}$

(۳) $\frac{9}{20}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- دو ظرف همانند داریم که در اولی ۳ مهره سفید و ۱ مهره سیاه و در دومی ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. ابتدا از ظرف اول یک مهره به تصادف برمی داریم و در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس از ظرف دوم یک مهره به تصادف برمی داریم و در ظرف اول قرار می دهیم. حال از ظرف دوم یک مهره دیگر به تصادف برمی داریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{13}{23}$
 (۲) $\frac{15}{29}$
 (۳) $\frac{17}{31}$
 (۴) $\frac{19}{36}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- یک جامعه آماری شامل ۱۰۰ خانوار است، به طوری که ۱۰ خانواده بدون فرزند، ۲۰ خانواده دارای یک فرزند، ۳۰ خانواده دارای دو فرزند و ۴۰ خانواده دارای ۳ فرزند هستند. از این جامعه، خانواده‌ای به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه این خانواده لااقل یک فرزند دختر داشته باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{27}{40}$
 (۲) $\frac{23}{40}$
 (۳) $\frac{29}{40}$
 (۴) $\frac{13}{20}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- ظرف شماره یک شامل ۱ مهره سفید و ۹ مهره سیاه و ظرف شماره دو، شامل ۱ مهره سیاه و ۹۹ مهره سفید است. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن برمی‌گزینیم. اگر مهره سفید باشد، احتمال آنکه متعلق به ظرف شماره یک باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{11}$
 (۲) $\frac{9}{109}$
 (۳) $\frac{10}{109}$
 (۴) $\frac{1}{99}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- اگر $P(X = x) = \frac{\binom{x}{2}}{A}$ یک تابع احتمال برای متغیر تصادفی X با مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵، ... و ۱۹ باشد، مقدار A کدام است؟

- (۱) $20 - 2^{19}$
 (۲) $\binom{20}{2}$
 (۳) $\binom{19}{3}$
 (۴) $\binom{20}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- در جعبه‌ای ۲ مهره زرد و ۴ مهره نارنجی وجود دارد. هر بار مهره‌ای را انتخاب می کنیم و پس از یادداشت رنگش، مهره را به جعبه برمی گردانیم. اگر X تعداد آزمایش‌های لازم برای مشاهده اولین مهره زرد باشد، $P(X \geq 3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$
 (۲) $\frac{5}{9}$
 (۳) $\frac{1}{3}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- ۳ تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X برابر بزرگ‌ترین عدد رو شده باشد، $P(X = 5)$ کدام است؟

$$\frac{125}{216} \quad (2)$$

$$\frac{8}{27} \quad (1)$$

$$\frac{61}{216} \quad (4)$$

$$\frac{37}{216} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضی پایه، تابع حسابان - 13970214

۱۰۱- اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $\lambda(x+1) \rightarrow 2f(x) \rightarrow (g(x)+1) \rightarrow x$ عمل کنند و $f(x) = 2x - 8$ باشد، $g(-1)$ کدام است؟

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر $f(x) = x^2 - 3x$ و $g = \{(2,1), (3,-1), (1,0), (-2,2)\}$ ، آنگاه مقدار تابع $y = (f - 2g) \circ f$ در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

$$6 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$-4 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ و $g = \{(-2,-4), (3,7), (-1,2), (-3,4), (4,-5)\}$ و $(fog)(a) = g(a) + 7$ باشد، a کدام است؟

$$-2 \quad (2)$$

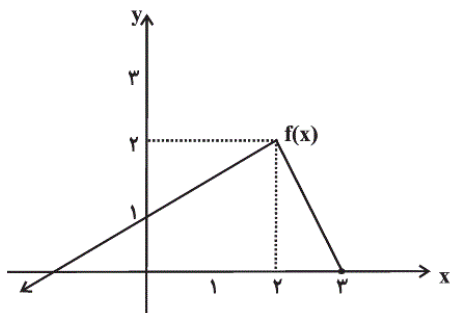
$$-1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$-3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد و بدانیم $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ ، آنگاه دامنه تابع $y = (fog)(x)$ کدام است؟



$$[-4, 2] \quad (1)$$

$$[-2, 0] \quad (2)$$

$$[-4, -1) \cup (1, 2] \quad (3)$$

$$[-4, -2) \cup (0, 2] \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ باشد، آنگاه مجموع طول نقاط برخورد نمودار تابع f با نمودار وارون آن کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر $f(x) = x(x+4)$ و $f(g(x+1)) = (x-1)(x-5)$ باشد، ضابطه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

(۱) $x-5$

(۲) $x-4$

(۳) $-x$

(۴) $-x+2$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $f^{-1}(x) = 2 + e^{3x}$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x-1)f(x)}$ کدام است؟

(۱) $x > 2$

(۲) $x \geq 2$

(۳) $x \geq 3$

(۴) $x > 3$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- تابع $y = \left| \frac{x}{|x|} - x \right|$ در کدام یک از فاصله‌های زیر نزولی و یک به یک است؟

(۱) $(-1, 0)$

(۲) $(0, 1)$

(۳) $(1/5, 2/5)$

(۴) $(-2, -1/2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر نقطه $(-1, 4)$ روی نمودار تابع فرد و وارون‌پذیر f و نقطه $(3, 2)$ روی نمودار تابع وارون f و $f^{-1}(a) - f(-2) = 4$ باشد، a کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۴

(۳) ۳

(۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- ضابطه معکوس تابع $y = |x^2 - 2x|$ در بزرگترین بازه‌ای که صعودی است، کدام است؟

(۱) $x \geq 0, 1 - \sqrt{1+x}$

(۲) $x \geq 1, 1 - \sqrt{x-1}$

(۳) $x \geq 0, 1 + \sqrt{1+x}$

(۴) $x \leq 1, 1 + \sqrt{1-x}$

شما پاسخ نداده اید

۹۱- مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$ ، کدام است؟

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) \emptyset

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آنگاه طول نقاط عطف این

توابع، در کدام بازه قرار دارند؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, -5)$ (۲) $(-1, -4)$ (۳) $(-2, -\infty)$ (۴) $(-4, -\infty)$

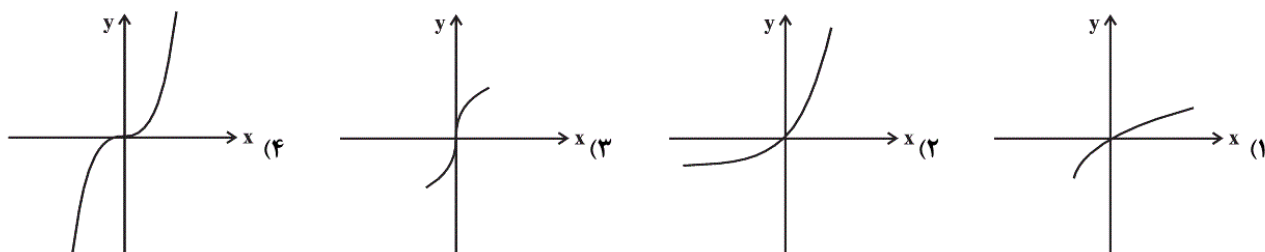
شما پاسخ نداده اید

۹۳- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(1, -2)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ ، مینیمم (۲) $-\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم (۳) $\frac{4}{3}$ ، مینیمم (۴) $\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم

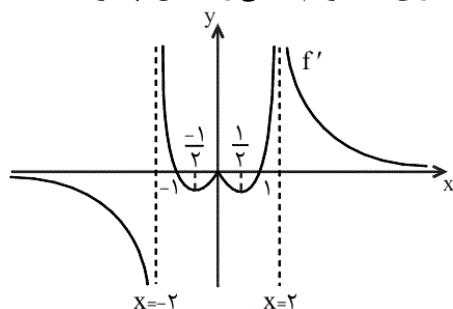
شما پاسخ نداده اید

۹۴- نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



شما پاسخ نداده اید

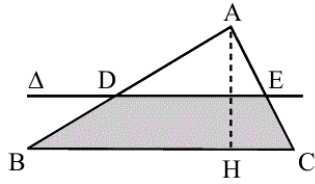
۹۵- شکل زیر نمودار تابع f' (تابع مشتق تابع همواره پیوسته f) است. تابع f در کدام نقطه، دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌ناپذیر است؟



- (۱) $x = 2$
(۲) $x = -1$
(۳) $x = 0$
(۴) $x = -2$

شما پاسخ نداده اید

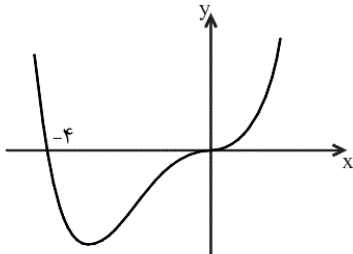
۹۶- در مثلث ABC ، ضلع $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت 0.2 واحد در ثانیه از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت دوزنقه در لحظه‌ای که فاصله دو خط موازی 9 واحد باشد، کدام است؟



- (۱) 0.8
- (۲) 0.9
- (۳) 1
- (۴) 1.2

شما پاسخ نداده اید

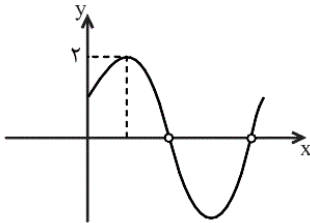
۹۷- شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ است. با تعیین مقادیر a و b ، مینیمم تابع کدام است؟



- (۱) -36
- (۲) -32
- (۳) -27
- (۴) -24

شما پاسخ نداده اید

۹۸- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a \sin 2x + b}{\sin x + \cos x}$ ، در یک دوره تناوب است. a کدام است؟



- (۱) -1
- (۲) 1
- (۳) $\sqrt{2}$
- (۴) 2

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال - گواه، انتگرال - 13970214

۹۹- حاصل $\sum_{n=1}^{100} \log \frac{n+2}{n+1}$ کدام است؟

- (۱) $\log 34$
- (۲) $\log 41$
- (۳) $\log 51$
- (۴) $\log 61$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر $S_n = \sum_{k=1}^n k(k-1)$ ، آنگاه $S_{12} - S_{10}$ کدام است؟

- (۱) 124
- (۲) 132
- (۳) 242
- (۴) 254

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه 2، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی 2)، هندسه‌ی فضایی - 13970214

۱۳۱-

(ممدابراهیم گیتی زاده)

۱) از هر نقطه‌ی خط L ، خطوط بی‌شماری بر خط L عمود می‌شوند که فقط یکی از آن‌ها بر صفحه‌ی P و یکی از آن‌ها هم بر صفحه‌ی Q منطبق است.

۲) از هر نقطه، صفحه‌های بی‌شماری بر یکی از دو صفحه عمود می‌شوند که فقط یکی از آن‌ها با صفحه‌ی دیگر موازی است.

۳) هر صفحه که بر یکی از خطوط صفحه‌ای عمود شود، بر این صفحه عمود است. چون خط L فصل مشترک دو صفحه است، در هر دو صفحه قرار دارد و در نتیجه هر صفحه‌ی عمود بر L بر هر دو صفحه عمود می‌شود.

۴) از هر نقطه خارج یک صفحه، خطوط بی‌شماری به موازات آن صفحه رسم می‌شوند که یکی و تنها یکی از آن‌ها بر صفحه‌ی دیگر عمود است.

در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) عبارت «هر خط» یا «هر صفحه» درستی گزینه را نقض می‌کند.

(هندسه ۲- هندسه در فضا؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱

۱۳۲-

(مهرداد ملوندی)

از یک نقطه خارج از یک صفحه، یک صفحه به موازات صفحه‌ی مفروض قابل رسم است. حال تمامی خطوط موجود در صفحه‌ی رسم شده، موازی با صفحه‌ی مفروض هستند، یعنی از یک نقطه خارج یک صفحه، بی‌شمار خط موازی با آن صفحه، قابل رسم است.

(هندسه ۲- هندسه در فضا؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۳)

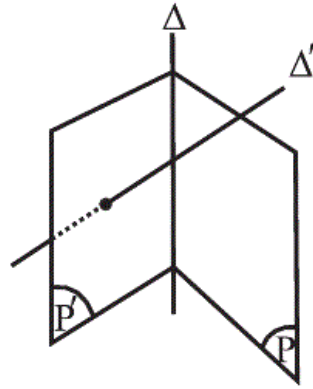
۴

۳

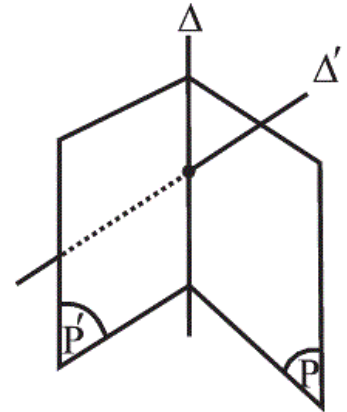
۲

۱

اگر Δ' ، خط Δ را قطع نکند، آن گاه این دو خط متسافر خواهند بود (شکل ۱)، اما چنانچه Δ را قطع کند، آن گاه دو خط مورد نظر متقاطع اند (شکل ۲).



(۱)



(۲)

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

(حسین فایلو)

مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشند، صفحه عمودمنصف پاره خط AB است. اگر این صفحه را P بنامیم:

۱- در صورتی که خط Δ با صفحه P موازی باشد و در صفحه P واقع نباشد، گزاره (الف) درست است.

۲- در صورتی که خط Δ با صفحه P متقاطع باشد، گزاره (ب) درست است.

۳- در صورتی که خط Δ به تمامی در صفحه P قرار داشته باشد، گزاره (پ) درست است.

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲

۱

(۱) چون یک خط آن بر صفحه P عمود است، بر این صفحه عمود می‌باشد.

(۲) چون یک خط آن با خط D موازی است، با این خط موازی است.

(۳) چون دو خط متقاطع آن با صفحه‌ی P' موازی است، با این صفحه موازی است.

(۴) چون با خط D موازی است، نمی‌تواند بر آن عمود باشد.

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

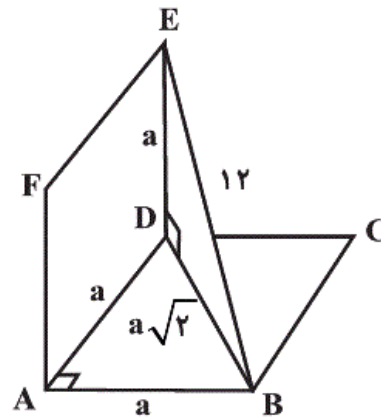
فرض کنیم طول هر ضلع از دو مربع برابر a باشد، چون صفحه $ADEF$ بر

صفحه $ABCD$ عمود است. پس $ED \perp DB$ در نتیجه:

$$\Delta ABD: BD^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$$

$$\Delta EDB: 12^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 \Rightarrow 144 = 3a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 48 \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$$



(هندسه ۲- هندسه در فضا: مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۵۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تصویر قائم یک خط بر یک صفحه، زمانی یک نقطه است که خط بر صفحه عمود باشد.

حال اگر تصاویر قائم دو خط بر یک صفحه، دو نقطه باشند، یعنی دو خط بر آن صفحه

عمودند و در این صورت آن دو خط موازی بوده و نمی‌توانند متناظر باشند.

(هندسه ۲- هندسه در فضا؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱

صفحه شامل d و d_1 در صورتی که زاویه بین دو خط متنافر 90° درجه نباشد

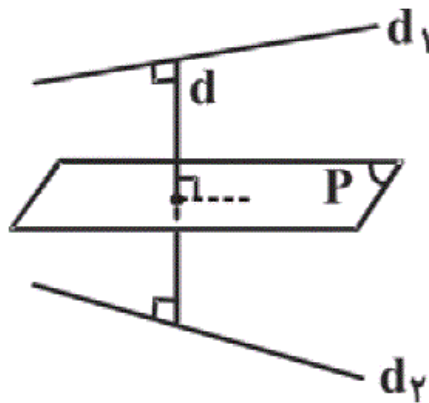
بر خط d_2 عمود نیست، پس گزینه «۱» صحیح نیست. هر صفحه شامل d در

هیچ صورت نمی‌تواند بر دو خط d_1 و d_2 عمود باشد، چون اگر دو خط d_1 و

d_2 بر صفحه‌ای عمود باشند، حتماً با هم موازی هستند که این‌طور نیست.

هم‌چنین صفحه موازی با d ممکن است هر دو خط متنافر d_1 و d_2 را قطع

کند، پس گزینه «۴» نیز صحیح نیست.



مطابق شکل، هر صفحه مانند صفحه P که بر خط d عمود است، با خطوط

متنافر d_1 و d_2 موازی است.

(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه‌های 156 تا 159)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

بی‌شمار صفحه با مشخصات مورد نظر وجود دارد. به‌عنوان مثال تمام صفحه‌های موازی با

P دارای این ویژگی‌ها هستند، یعنی در آن‌ها خطوطی عمود بر **d** وجود دارد ولی

تمامی خطوط موجود در این صفحه‌ها، موازی با صفحه **P** بوده و عمود بر آن نیستند.

(هنر سه ۲- هنر سه در فضا: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۲)

۴

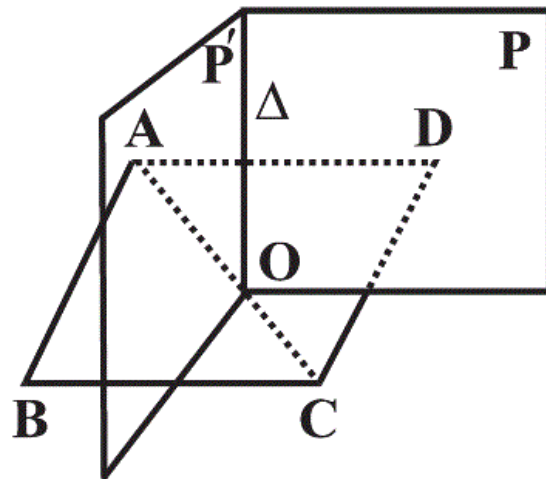
۳

۲

۱

مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند. صفحه عمود منصف آن پاره‌خط است.

در مستطیل $ABCD$ ، دو ضلع روبه‌رو AB و DC و دو ضلع دیگر AD و BC صفحه عمود منصف مشترک دارند. دو صفحه عمود منصف را P و P' ، فصل مشترک آن‌ها را خط Δ و نقطه تلاقی قطرهای مستطیل را O می‌نامیم. هر یک از دو صفحه P و P' ، بر یک خط از صفحه مستطیل عمود هستند، در نتیجه این دو صفحه بر صفحه مستطیل عمود هستند و خط Δ (فصل مشترک دو صفحه P و P') نیز بر این صفحه عمود می‌شود. از طرفی دیگر، هر یک از دو صفحه P و P' از نقاط وسط دو ضلع روبه‌روی مستطیل عبور می‌کند و در نتیجه، خط Δ از نقطه O می‌گذرد. به این ترتیب، مکان هندسی خواسته شده، خط Δ است که از نقطه تلاقی دو قطر مستطیل، بر صفحه آن عمود می‌شود.



(هندسه ۲- هندسه در فضا: صفحه ۱۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به دامنه تابع، $f''(x)$ را به دست آورده و تعیین علامت می‌کنیم.

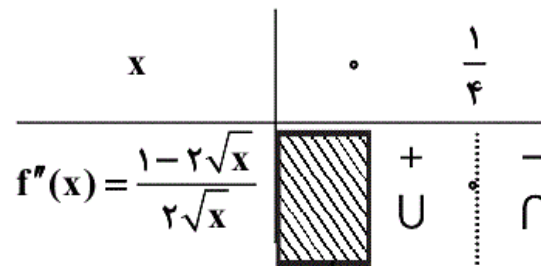
$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^2 = x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^2 \quad \text{و} \quad D_f = [0, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(\sqrt{x} - x)$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$1-2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$



در این محدوده تابع تعریف نمی‌شود.

بنابراین جواب بازه $(0, \frac{1}{4})$ است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲

۱

(ممدیچوار مهنی)

باید مشتق تابع در نقطه مینیمم برابر با صفر باشد:

$$f'(x) = 2a \cos 2x + 2b \cos x \sin x$$

$$\Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

همچنین داریم:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{4}b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{a = \frac{\sqrt{3}}{2}b}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b - \frac{3}{4}b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2}b = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲

۱

(علی اصغر شریفی)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2x+3)e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x+3) \\
 &= 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x} = -e^{-x} - 2xe^{-x} \\
 \Rightarrow f''(x) &= e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} = -e^{-x} + 2xe^{-x} \\
 &= e^{-x}(-1+2x) = 0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳ ✓

۲

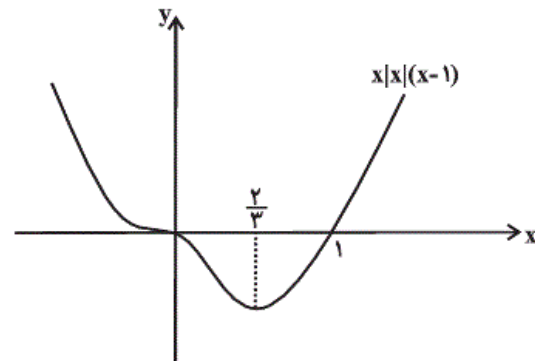
۱

(محمدمصطفی ابراهیمی)

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - x) & ; x \geq 0 \\ -x(x^2 - x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -3x^2 + 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

x	0	$\frac{2}{3}$	
$x(3x-2)$	0	-	+
$-x(3x-2)$	-	0	
f'	-	-	+
	↘	↘ min ↗	↗

تابع فقط در $x = \frac{2}{3}$ یک مینیمم دارد. نمودار تابع به شکل زیر است:

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

باید علامت y' و y'' را در حوالی $x=0$ بررسی کنیم.

$$y' = \frac{1 + \cos x}{x + \sin x + 1} \xrightarrow{x=0} y'(0) = 2 \Rightarrow \text{شیب مماس مثبت است.}$$

یعنی گزینه ۱ یا ۴ صحیح است.

$$y'' = \frac{-\sin x(x + \sin x + 1) - (1 + \cos x)^2}{(x + \sin x + 1)^2}$$

$$\xrightarrow{x=0} y''(0) = \frac{-(4)}{1} \text{ تقعر رو به پایین}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \times (x+1))}{(x^2+1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \Rightarrow x^2+1-x^2-x=0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین با توجه به شکل، $x=1$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مطلق تابع است. پس:

$$\text{مقدار ماکزیمم} = f(1) = \frac{2 \times 1 + 2}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

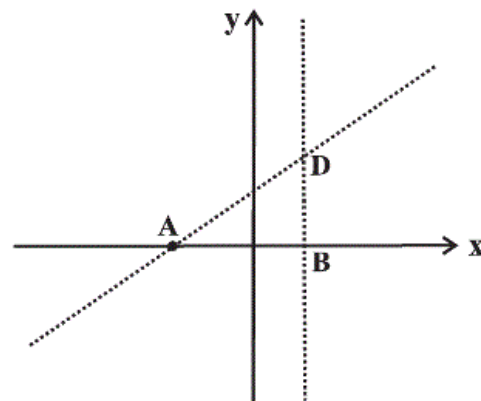
 ۱

چون منحنی در مبدأ بر محور X ها مماس است، پس صورت دارای ریشه مضاعف صفر است. لذا $a = 0$ است.

از طرفی ریشه منخرج (مجانِب قائم) $X = -c$ است و با تقسیم صورت بر منخرج، معادله مجانب مایل بدست می آید.

$$y = x - c + \frac{c^2}{x + c} \Rightarrow y = x - c \text{ : مجانب مایل}$$

لذا محل تلاقی مجانب مایل و قائم یعنی y_D برابر است با:



$$\begin{cases} y = x - c \\ x = -c \end{cases} \Rightarrow y_D = -2c$$

طول نقطه A هم که به وضوح محل برخورد مجانب مایل با محور X ها، یعنی $X = c$ است.

$$S_{ABD} = \frac{(AB) \times (BD)}{2} \Rightarrow 2 = \frac{(2c)(2c)}{2}$$

$$\Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow c = -1 \text{ قابل قبول}$$

چون مجانب قائم مثبت است، باید $c < 0$ باشد.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فرهنگ فامی)

-۸۸

تابع فاقد مجانب قائم است پس گزینه های (۲) و (۴) حذف می شوند. از طرفی تابع در

$X = 0$ مشتق پذیر است پس گزینه ی (۳) نیز حذف می شود، چون $X = 0$ برای این

تابع نقطه ی زاویه دار است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شعرابی)

$$\frac{1}{\sqrt{i-3} + \sqrt{i-2}} = \frac{1}{\sqrt{i-2} + \sqrt{i-3}} \times \frac{\sqrt{i-2} - \sqrt{i-3}}{\sqrt{i-2} - \sqrt{i-3}}$$

$$= \sqrt{i-2} - \sqrt{i-3}$$

پس:

$$\sum_{i=12}^n (\sqrt{i-2} - \sqrt{i-3}) = 5 \Rightarrow \sum_{i=12}^n \sqrt{i-2} - \sum_{i=12}^n \sqrt{i-3} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} + \sqrt{11} + \sqrt{12} + \dots + \sqrt{n-2} - \sqrt{9} - \sqrt{10} - \sqrt{11} - \dots - \sqrt{n-3} = 5$$

$$\sqrt{n-2} - \sqrt{9} = 5 \Rightarrow \sqrt{n-2} = 8 \Rightarrow n = 66$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مصدر، ضا توجه)

-۹۰

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\frac{k! \pi}{3})}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{-1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{18} + (\frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots)$$

عبارت داخل پراتنز حد مجموع جملات یک سری هندسی با جمله اول $\frac{1}{27}$ و قدرنسبت $\frac{1}{3}$ است. (حد مجموع جملات دنباله هندسی از رابطه $\frac{a}{1-q}$ بدست می‌آید.)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\frac{k! \pi}{3})}{3^k} = \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

با توجه به خاصیت $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ داریم:

$$\begin{aligned} B^T &= (AA^T)^{-1}A = ((A^T)^{-1}A^{-1})A \\ &= (A^T)^{-1}(\underbrace{A^{-1}A}_I) = (A^T)^{-1} \end{aligned}$$

اکنون با توجه به خاصیت $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ داریم:

$$B^T = (A^{-1})^T \Rightarrow B = A^{-1}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امیر حسین ابومشوب)

-۱۱۲

رابطه $A^{-1} + B^{-1} = I$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$A(A^{-1} + B^{-1}) = AI \Rightarrow I + AB^{-1} = A$$

$$\Rightarrow (I + AB^{-1})B = AB$$

$$\Rightarrow B + A(\underbrace{B^{-1}B}_I) = AB \Rightarrow B + A = AB$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱

اگر دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد، آن گاه علاوه بر این که دترمینان ضرایب دستگاه برابر صفر است، با جایگزین کردن مقادیر ثابت دستگاه به جای هر ستون در دترمینان ضرایب، باز هم حاصل دترمینان صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & a & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = \frac{7}{4}$$

$$a + b = \frac{-9}{4}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(همید کروسبی)

- ۱۱۴

با توجه به همگن بودن دستگاه، اگر دترمینان ضرایب یعنی $|A|$ ، برابر صفر باشد، بی‌شمار جواب و اگر $|A| \neq 0$ تنها یک جواب داریم.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 12 - 1) - (-2 - 3 + 4) = -10 \neq 0$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۴۲ و ۱۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کاتخم باقرزاده پهنره)

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a + 2b}{5} \\ y = \frac{2a - b}{5} \end{cases}$$

X و y باید در معادله‌ی سوم صدق کنند:

$$x + 2y = 1 \Rightarrow \frac{a + 2b}{5} + 2\left(\frac{2a - b}{5}\right) = 1$$

$$\Rightarrow a + 2b - 2b + 4a = 5 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$$

(هنرسة تعلیلی - دستگانه‌های معادلات فطی: مشابه تمرین ۷ صفه ۱۵۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاتخم علمدار)

-۱۱۶

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \\ x + y = 2 \Rightarrow y = -2 \\ 2y - 3z = -13 \Rightarrow z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = a \Rightarrow a = 9 \\ 4x + 5y + 6z = b \Rightarrow b = 24 \end{cases} \Rightarrow a + b = 33$$

(هنرسة تعلیلی - دستگانه‌های معادلات فطی: صفه‌های ۱۴۶ تا ۱۴۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

(داریوش ناظمی)

-۱۱۷

$$|A^*| = |A|^2$$

$$|A^*| = 25 \xrightarrow{|A| > 0} |A| = 5 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(هنرسة تعلیلی - دستگانه‌های معادلات فطی: صفه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$|A| = 5 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow 4a + b = 16 \quad (1)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 5 & 3 \\ b & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} \Rightarrow -\frac{17}{10} = \frac{2a - 5b - 11}{5} \Rightarrow -4a + 10b = -5 \quad (2)$$

از حل معادلات (۱) و (۲) در یک دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 4a + b = 16 \\ -4a + 10b = -5 \end{cases}$$

$$11b = 11 \Rightarrow b = 1$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق روش کرامر داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix}} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

عدد (-2) را در ستون اول ماتریس دوم ضرب می‌کنیم. در دو ماتریس موجود دو

ستون یکی با دو ستون دیگری برابر است. دو ستون متفاوت را با هم جمع می‌کنیم و هر

دو ستون یکسان را به همان صورت می‌نویسیم.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2a & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3-2a & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

۴

۳

۲

۱

$$\text{هر دستگاه به صورت } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \text{ یک دستگاه همگن است. هر}$$

دستگاه همگن حداقل یک جواب به صورت $(0, 0, 0)$ دارد، بنابراین اگر ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ماتریس ضرایب این دستگاه باشد، دو حالت برای}$$

این دستگاه امکان پذیر است:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \text{دستگاه فقط جواب } (0, 0, 0) \text{ دارد}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{دستگاه بی شمار جواب دارد}$$

بر اساس شکل، این دستگاه بی شمار جواب دارد. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} a+2 & b & c \\ a & b+2 & c \\ a & b & c+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c+2 & b & c \\ a+b+c+2 & b+2 & c \\ a+b+c+2 & b & c+2 \end{vmatrix} = (a+b+c+2) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+2 & c \\ 1 & b & c+2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} (a+b+c+2) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(a+b+c+2) = 0$$

$$\Rightarrow a+b+c+2=0 \Rightarrow a+b+c=-2$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، یعنی تعداد همه حالات ممکن را پیدا می‌کنیم. هر دانش آموز در یک روز از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده است، پس هر دانش آموز ۳۶۵ انتخاب دارد. طبق اصل ضرب این اعداد در هم ضرب می‌شوند:

$$|S| = \overbrace{365 \times 365 \times \dots \times 365}^{20} = 365^{20}$$

در پیشامد مطلوب، روز تولد هیچ دو نفری یکسان نیست، پس اگر اولی ۳۶۵ انتخاب داشته باشد، دومی یک انتخاب از دست می‌دهد و ۳۶۴ انتخاب دارد و الی آخر. در نتیجه:

$$|A| = 365 \times 364 \times \dots \times 346 = P(365, 20)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{P(365, 20)}{365^{20}}$$

(ببر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر A را پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره و B را پیشامد هم شماره بودن دو مهره تعریف کنیم، آنگاه پیشامد مطلوب، $A \cup B$ است. البته A و B ناسازگار هستند، در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}} + \frac{\binom{3}{2}n}{\binom{3n}{2}}$$

$$\frac{\frac{3n(n-1)}{2}}{3n(3n-1)} + \frac{\frac{3n}{2}}{3n(3n-1)} = \frac{n-1}{3n-1} + \frac{2}{3n-1} = \frac{n+1}{3n-1}$$

(ببر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سروش موئینی)

- ۱۲۳

طبق نتیجه تمرین کتاب درسی، احتمال تشکیل مثلث برای قطعه چوب‌هایی به طول ℓ

و $n\ell$ ($n > 1$) برابر است با $\frac{1}{n}$. اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم،

آن‌گاه:

$$P(A) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

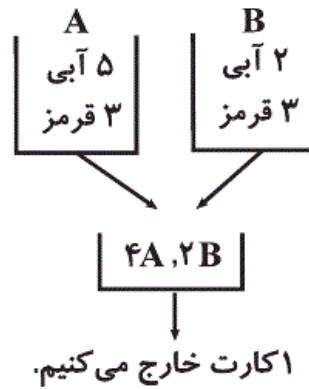
(ببر و احتمال - احتمال: مشابه تمرین ۱۱، صفحه ۱۰۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



بنابراین احتمال آن که کارت خارج شده از کیسه، قرمز باشد، برابر است با:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{4}{6} \times \frac{3}{8}}{\frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آزنگ نوید)

-۱۲۵

فرض کنیم پیشامدهای خروج مهره‌های سفید و سیاه از ظرف اول را به ترتیب B_1 و B_2 بنامیم. از آن جا که رنگ مهره اول خارج شده از ظرف دوم را مشاهده نکرده‌ایم، پس این مهره در احتمال سفید بودن مهره دوم انتخابی از این ظرف بی‌تأثیر است. اگر پیشامد اخیر را A بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$P(A) = P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{19}{36}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

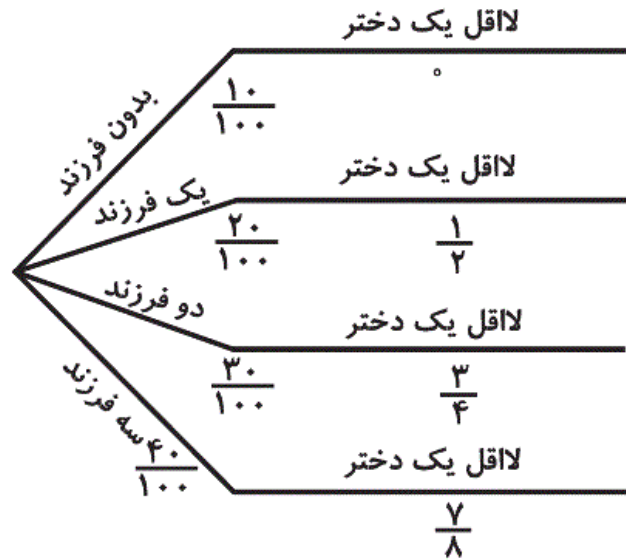
 ۳

 ۲

 ۱

احتمال مطلوب به تعداد فرزندان خانواده انتخاب شده «بستگی» دارد، پس پاسخ مسأله

یک احتمال کل است. اگر پیشامد مورد نظر را A بنامیم، آن گاه:



$$P(A) = \frac{10}{100} \times 0 + \frac{20}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{30}{100} \times \frac{3}{4} + \frac{40}{100} \times \frac{7}{8} = \frac{1}{10} + \frac{9}{40} + \frac{7}{20}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4+9+14}{40} = \frac{27}{40}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

A را پیشامد انتخاب ظرف یک و B را پیشامد انتخاب مهره سفید تعریف می‌کنیم.

در نتیجه مطلوب ما $P(A | B)$ است. طبق قاعده بیز داریم:

$$P(A | B) = \frac{P(A) \times P(B | A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{99}{100}}$$

$$\Rightarrow P(A | B) = \frac{1}{1 + \frac{99}{10}} = \frac{10}{109}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

باید جمع احتمال‌ها، برابر یک شود:

$$\sum_{x=2}^{19} P(X=x) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{19}{2}}{A}$$

یادآوری:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$\sum_{x=2}^{19} P(X=x) = \frac{\binom{20}{3}}{A} = 1$$

پس داریم:

$$\Rightarrow A = \binom{20}{3}$$

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

۴

۳

۲

۱

(رسول مصنی‌منش)

- ۱۲۹

اولاً دقت کنید که $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ است، پس ما باید $P(X=1)$ و $P(X=2)$ را حساب کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(X=2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow P(X \geq 3) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱

$X = 5$ یعنی در پرتاب سه تاس بزرگ‌ترین عدد رو شده ۵ باشد. پس:
اولاً: در سه برآمد حداقل یکی باید ۵ باشد.
ثانیاً: در بین سه برآمد ۶ نباید وجود داشته باشد.

$$n(S) = 6^3 = 216$$

$$n(A) = (\text{کل برآمدهای فاقد } 5, 6) - (\text{کل برآمدهای فاقد } 6)$$

$$= 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

$$P(A) = \frac{61}{216}$$

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضی پایه، تابع حسابان - 13970214

-۱۰۱

(علی شهرابی)

$$x \rightarrow \textcircled{g(x)+1} \rightarrow \textcircled{2f(x)} \rightarrow 8x+8$$

$$g(x)+1 \quad 2f(g(x)+1) = 2(2(g(x)+1) - 8) = 4g(x) - 12$$

$$4g(x) - 12 = 8x + 8 \rightarrow g(x) = 2x + 5$$

پس:

$$g(-1) = -2 + 5 = 3$$

بنابراین:

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۰۲

(علی اصغر شریفی)

$$(f - 2g) \circ f(1) = (f - 2g)(-2) \quad \text{پس: می‌دانیم } f(1) = -2$$

$$= f(-2) - 2g(-2) = ((-2)^2 - 3(-2)) - 2(2)$$

$$= (4 + 6) - 4 = 6$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی شهرابی)

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \Rightarrow f(x) = 2x+3$$

$$\Rightarrow f(g(a)) = 2g(a) + 3$$

$$2g(a) + 3 = g(a) + 7 \Rightarrow g(a) = 4 \Rightarrow a = -3$$

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۹ تا ۹۵)

۴

۳✓

۲

۱

(مهدی ملایمفانی)

با توجه به شکل دامنه تابع $f(x)$ برابر $D_f = (-\infty, 3]$ است.

$$g(x) = \log_2(x^2 + 2x) \Rightarrow D_g : x^2 + 2x > 0$$

$$\Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{یا} \\ x < -2 \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x > 0 \text{ یا } x < -2 \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۴✓

۳

۲

۱

(مهمربیرائی)

ابتدا ضابطه تابع وارون را بدست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow xy - y = 2x + 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{x-2}$$

حال دو ضابطه را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 2x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

مجموع طول نقاط برخورد برابر $3 = 4 + (-1)$ است.

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۵)

۴

۳✓

۲

۱

(موردار سپرکار)

$$f(x) = x^2 + 4x \xrightarrow{g(x+1)=t} f(t) = t^2 + 4t$$

از طرفی $f(t) = x^2 - 6x + 5$ پس:

$$t^2 + 4t = x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{+4} (t+2)^2 = (x-3)^2$$

$$\Rightarrow |t+2| = |x-3| \Rightarrow \begin{cases} t+2 = x-3 \Rightarrow t = x-5 \\ t+2 = -x+3 \Rightarrow t = -x+1 \end{cases}$$

$$g(x+1) = x-5 \Rightarrow g(x) = x-6$$

$$g(x+1) = -x+1 \Rightarrow g(x) = -x+2$$

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

$$f^{-1}(x) = y = 2 + e^{3x} \Rightarrow y - 2 = e^{3x} \Rightarrow 3x = \text{Ln}(y - 2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{Ln}(y - 2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \text{Ln}(x - 2)$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{(x-1)}{3} \text{Ln}(x-2)}$$

حال نباید زیر رادیکال منفی باشد.

$$\frac{(x-1)}{3} \text{Ln}(x-2) \geq 0$$

ضمناً جلوی Ln باید مثبت باشد، در نتیجه $x - 2 > 0$ یا $x > 2$ است. پسدر این حالت مثبت است. $\frac{x-1}{3}$ بنابراین $\text{Ln}(x-2)$ هم باید نامنفی باشد.

$$\text{Ln}(x-2) \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

از اشتراک دو حالت $x \geq 3$ بدست می‌آید.

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۵)

۴

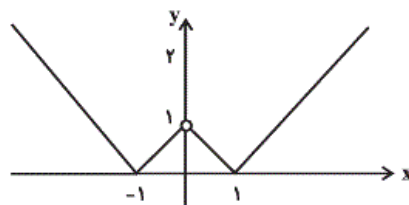
۳ ✓

۲

۱

(شروین سیاح‌نیا)

$$y = \left| \frac{x}{|x|} - x \right| = \begin{cases} \left| \frac{x}{x} - x \right| = |1 - x| = |x - 1| & ; x > 0 \\ \left| \frac{x}{-x} - x \right| = |-1 - x| = |1 + x| & ; x < 0 \end{cases}$$



(مسابان - تابع: صفحه‌های ۷۶ تا ۹۵)

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مطابق شکل این تابع در

فاصله (۰, ۱) نزولی و یک

به یک است.

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی شهرابی)

$$(-1, 4) \in f \xrightarrow{f \text{ فرد}} (1, -4) \in f$$

$$(3, 2) \in f^{-1} \Rightarrow (2, 3) \in f \xrightarrow{f \text{ فرد}} (-2, -3) \in f$$

$$f^{-1}(a) - f(-2) = 4 \Rightarrow f^{-1}(a) - (-3) = 4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a) = 1 \Rightarrow f(1) = a \Rightarrow a = -4$$

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۷۶ تا ۹۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

مطابق شکل این تابع در $[2, +\infty)$ صعودی است (البته در $(0, 1)$ هم صعودی است ولی بزرگترین بازه نمی‌باشد).

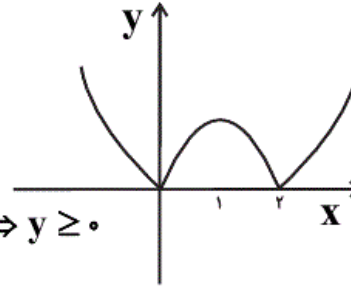
$$x > 2: y = x^2 - 2x \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 - 1$$

$$= (x-1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x-1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+1} = x-1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

$$\text{از طرفی } \sqrt{y+1} = x-1 \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y+1} \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$$

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۷۶ تا ۹۵)



۴

۳ ✓

۲

۱

تابع f در $x = -1$ پیوسته و مشتق پذیر است، حال مشتق دوم f را محاسبه می کنیم:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & ; x > -1 \\ -\frac{18}{x^3} & ; x < -1 \end{cases}$$

$x = 1$ ریشه ساده $f'' = 0$ است (ضابطه بالا) و در $x = -1$ ، f'' وجود ندارد، با تعیین علامت f'' دیده می شود که در هر دو نقطه، مشتق دوم تغییر علامت می دهد:

x		-1	1	
$f''(x)$		$+$	$-$	$+$
f		\cup	\cap	\cup

برای این که این نقاط، نقطه عطف تابع باشند، باید بتوان در این نقاط، خط مماس بر نمودار f را رسم کرد. چون $f'(1) = -3$ و $f'(-1) = 9$ ، لذا در این نقاط می توان بر منحنی خط مماس رسم کرد بنابراین این نقاط، عطف های تابع هستند، بنابراین مجموعه نقاط عطف $\{-1, 1\}$ خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲

۱

چون تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم با طول منفی دارد، پس مشتق باید دو ریشه منفی داشته باشد:

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m-1)x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(2)} x^2 - (m-1)x + 4 = 0$$

برای اینکه معادله فوق دو ریشه منفی داشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 16 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 16 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} = 4 > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} < 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-1 > 4 \text{ یا } m-1 < -4 \Rightarrow m > 5 \text{ یا } m < -3 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} m < -3$$

حال طول نقطه عطف را پیدا می‌کنیم:

$$f''(x) = 4x - 2(m-1) = 0 \Rightarrow x_I = \frac{m-1}{2}$$

با توجه به حدود m ، حدود طول نقطه عطف تابع را می‌یابیم:

$$m < -3 \Rightarrow m-1 < -4 \Rightarrow \frac{m-1}{2} < -2 \Rightarrow x_I < -2$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

در توابع مشتق‌پذیر، اگر نقطهٔ درونی A ، اکسترمم نسبی باشد، این نقطه در دو شرط صدق می‌کند:

الف- طول آن، ریشهٔ $f'(x) = 0$ است.

ب- طول و عرض آن، در خود تابع صدق می‌کند.

بنابراین، نقطهٔ $(1, -2)$ در دو شرط زیر صدق می‌کند:

$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{-a}{x^2} + 2bx$$

$$\begin{cases} f(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow -a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{3} \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

برای تعیین نوع نقطه، از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{4}{3x} - \frac{2}{3}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{8}{3x^3} - \frac{4}{3} \Rightarrow f''(1) = -\frac{8}{3} - \frac{4}{3} < 0$$

بنابراین نقطهٔ $(1, -2)$ ، ماکسیمم نسبی است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{(x^3)'(x^2 + 1) - (x^2 + 1)'(x^3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که مقدار مشتق تابع موردنظر در $x = 0$ برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع در $x = 0$ افقی است) که این شرط تنها در گزینهٔ «۴» برقرار است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

در نقطه اکسترمم، مشتق تغییر علامت می‌دهد، پس در نمودار f' ، در هر نقطه‌ای که f' از مثبت به منفی (یا بر عکس) تغییر علامت دهد، نقطه اکسترمم تابع f خواهد بود، لذا محل تلاقی تابع f' با محور x ها (نقطه اکسترمم و مشتق‌پذیر تابع f) و مجانب قائم با شاخه‌های دو طرفه محور x ها، در تابع f' نقطه اکسترمم و مشتق‌ناپذیر تابع f خواهد بود (تابع f ، همواره پیوسته فرض شده است). با توجه به توضیحات بالا، تابع f در $x = -2$ ، می‌نیمم و مشتق‌ناپذیر، در $x = -1$ ماکزیمم و مشتق‌پذیر و در $x = 1$ می‌نیمم و مشتق‌پذیر است. دقت کنید که در $x = 0$ و $x = 2$ مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، پس این نقاط، نقطه اکسترمم تابع f نخواهند بود.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

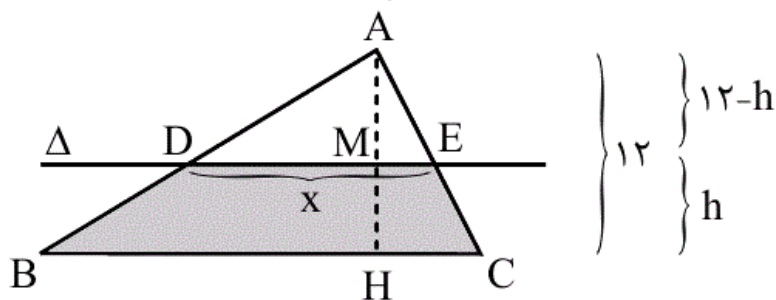
۴

۳

۲

۱

اگر ضلع $DE = x$ و ارتفاع $MH = h$ در نظر گرفته شود، برای حل مسأله در مرحله اول، متغیرها را مشخص می‌کنیم.



$$\begin{cases} h'_t = 0/2 \\ S'_t = ? \\ h_o = 9 \end{cases}$$

حال مساحت ذوزنقه را بر حسب این متغیرها محاسبه می‌کنیم.

$$S = \frac{1}{2}(DE + BC)MH = \frac{1}{2}(x + 20)h$$

با استفاده از رابطه تالس داریم:

$$\frac{x}{20} = \frac{12-h}{12} \Rightarrow x = \frac{60 - 5h}{3} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{(*)} S = \frac{1}{2} \left(\frac{60 - 5h}{3} + 20 \right) h = \frac{1}{6} (120h - 5h^2)$$

در مرحله (۳) از رابطه به دست آمده نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$S'_t = \frac{1}{6} (120h'_t - 10hh'_t) = \frac{1}{6} (120 - 10h)h'_t$$

$$\Rightarrow S'_t = \frac{1}{6} (120 - 90) \times 0/2 = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx$$

با توجه به نمودار می توان گفت که:

(۱) نمودار از نقطه $(-۴, ۰)$ می گذرد، پس:

$$f(-۴) = ۰ \Rightarrow (-۴)^4 + a(-۴)^3 + b(-۴) = ۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴)} -۶۴ + ۱۶a + b = ۰ \quad (*)$$

(۲) نمودار در $x = ۰$ بر محور x ها مماس است، پس:

$$f'(۰) = ۰, f'(x) = ۴x^3 + ۳ax^2 + b$$

$$\Rightarrow ۴(۰)^3 + ۳a(۰)^2 + b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

$$\xrightarrow{(*)} -۶۴ + ۱۶a = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + ۴x^3 \Rightarrow f'(x) = ۴x^3 + ۱۲x^2 = ۴x^2(x + ۳)$$

با توجه به اینکه $f'(x) = ۴x^2(x + ۳)$ ، پس علامت f' در $x = -۳$ تغییر می کند و در نتیجه $x = -۳$ تنها نقطه اکسترمم نسبی تابع f است که مقدار تابع در آن برابر است با:

$$f(-۳) = (-۳)^4 + ۴(-۳)^3 = ۸۱ - ۱۰۸ = -۲۷$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

روی نمودار، تابع در نقاطی تعریف نشده است، بنابراین این نقاط جزء دامنهٔ تابع نیستند. چون تابع کسری است، این بدین معنی است که طول این نقاط ریشه‌های مخرج می‌باشند. از طرفی چون تابع در این نقاط مجانب قائم ندارد، طول این نقاط ریشهٔ صورت نیز می‌باشند، پس:

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \Rightarrow \tan x = -1$$

$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ (یک جواب معادله)}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ (ریشهٔ صورت)} \Rightarrow a \sin \frac{3\pi}{4} + b = 0$$

$$\Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b$$

لذا تابع به صورت:

$$y = \frac{a \sin 2x + a}{\sin x + \cos x} = \frac{a(1 + \sin 2x)}{\sin x + \cos x} = \frac{a(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x}$$

$$= a(\sin x + \cos x) = a\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بیشترین مقدار تابع برابر $a\sqrt{2}$ است از طرفی طبق شکل بیشترین مقدار تابع ۲ است، پس:

$$a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

می‌دانیم $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{100} \log \frac{n+2}{n+1} = \sum_{n=1}^{100} (\log(n+2) - \log(n+1))$$

قاعدهٔ تلسکوپی $\rightarrow \log(100+2) - \log(1+1)$

$$= \log 102 - \log 2 = \log \frac{102}{2} = \log 51$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کتاب آبی - سوال ۲۴۰۷)

-۱۰۰

می‌دانیم $S_n - S_{n-1} = a_n$ پس:

$$S_{12} - S_{10} = (S_{12} - S_{11}) + (S_{11} - S_{10}) = a_{12} + a_{11}$$

که $a_n = n(n-1)$ ، پس:

$$S_{12} - S_{10} = 12 \times (11) + 11 \times (10) = 132 + 110 = 242$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

www.kanoon.ir