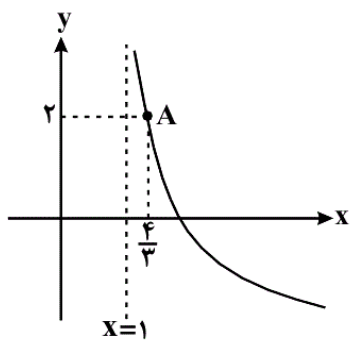
۱۰۱- حاصل عبارت $\log_9^{27} - 10^{\log\frac{1}{2}}$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر نمودار تابع $f(x)=2\log_b^{(x+a)}$ به‌صورت زیر باشد، مقدار ab کدام است؟



۱) ۳
۲) -3
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $-\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر $\frac{x}{2} = \log_8^{2\sqrt{2}}$ باشد، آن‌گاه $\log_{\sqrt{3}}^{1+2x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) -2

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- حاصل عبارت $\log_6^2 \times \log_6^{18} + (\log_6^3)^2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- نمودارهای $f(x)=(\frac{1}{2})^{ax-1}$ و $g(x)=32^{x-1}$ در نقطه‌ای به عرض $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ متقاطع‌اند. در این صورت نمودار $f^{-1}(x)$، خط $x=\frac{1}{16}$ را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{7}{5}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{14}{25}$ ۴) $\frac{43}{7}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- معادلهٔ $\log(\log x^2) = \log(10-\log x) - \log 2$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- از تساوی $\log_{\sqrt{x}}^{(x+4)} = 1+\log_x^{(5x+8)}$، مقدار لگاریتم x در پایهٔ $\sqrt{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $2^{2y}+2^{y}=2$ و $x\log(x+y)+\log x-x-1=0$ باشد، حاصل $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۹-

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است. اگر جمعیت این شهر بعد از t سال از رابطهٔ $P(t)=10000e^{0/07t}$ به‌دست آید، بعد از چند سال جمعیت شهر ۴۰۰۰۰ نفر خواهد شد؟ $(Ln2=0/7)$

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- مقدار جرم باقیماندهٔ یک مادهٔ رادیواکتیو بعد از t دقیقه از رابطهٔ $f(t)=Ae^{kt}$ محاسبه می‌شود. مقدار این ماده پس از ۹۰ دقیقه $\frac{1}{5}$ برابر می‌شود. مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار مادهٔ اولیه نصف شود، تقریباً چند دقیقه است؟ $(\log 2=0/3)$

۱) ۲۷ ۲) ۳۳ ۳) ۳۸ ۴) ۴۲

شما پاسخ نداده اید

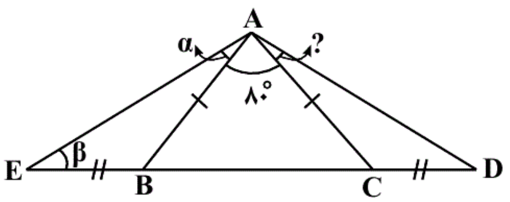
رياضي ، رياضي پايه ، - ۱۳۹۶۱۰۰۱

۱۱۱- نقطهٔ K درون مربع $ABCD$ طوری واقع است که مثلث $\overset{\Delta}{KAB}$ متساوی‌الاضلاع است. زاویهٔ $A\hat{D}K$ چند درجه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۴۵

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- در شکل زیر، نقاط D و E روی امتداد ضلع BC از مثلث ABC قرار دارند و زاویهٔ α، سی درجه از زاویهٔ β کم‌تر است. زاویهٔ $C\hat{A}D$ چند درجه است؟



۱) ۱۰
۲) ۴۰
۳) ۲۰
۴) ۳۰

شما پاسخ نداده اید

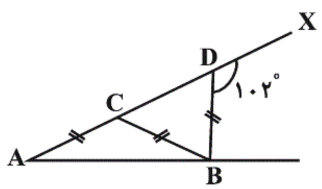
۱۱۳- در مثلث ABC که $BC=2AB$ میانهٔ AM را رسم کرده، آن را از طرف A به‌اندازهٔ خود امتداد داده و نقطهٔ حاصل را D نامیده‌ایم. کدام گزینه لزوماً برقرار نیست؟

۱) $B\hat{A}M=A\hat{M}B$ ۲) $AC=BD$

۳) $A\hat{M}C=B\hat{A}D$ ۴) $DM=2BM$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- در شکل زیر $AC=BC=BD$ و $B\hat{D}X=102^\circ$، عمودمنصف‌های AB و CD با چه زاویه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند؟



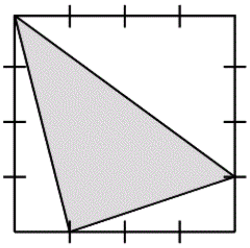
۱) 39°
۲) 34°
۳) 51°
۴) 56°

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- زاویه‌های مثلثی با اعداد ۲، ۷ و ۹ متناسبند. زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر ضلع بزرگ‌تر کدام است؟

۱) 40° ۲) 50° ۳) 60° ۴) 70°

شما پاسخ نداده اید



۱۱۶- مطابق شکل هر یک از اضلاع یک مربع را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت مثلث سایه خورده چند برابر مساحت مربع است؟

۱) $\frac{۲۶}{۳۲}$　　۲) $\frac{۱۳}{۳۲}$

۳) $\frac{۱۷}{۳۲}$　　۴) $\frac{۲۲}{۲۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- ضلع‌های مثلثی با عددهای ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$ متناسب است. طول میانهٔ وارد بر ضلع بزرگ‌تر این مثلث، چند برابر طول ارتفاع وارد بر همین ضلع است؟

۱) ۱/۲۵　　۲) ۱/۳　　۳) ۱/۳۵　　۴) ۱/۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه، روی وتر پاره‌خط‌هایی به‌طول ۲ و ۸ واحد ایجاد می‌کند. طول ضلع کوچک‌تر این مثلث کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۱۶　　۳) $۲\sqrt{۵}$　　۴) $\sqrt{۵}$

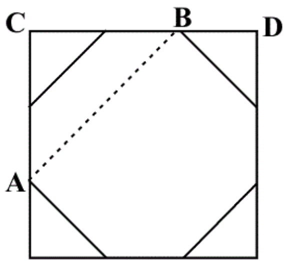
شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- در یک شش‌ضلعی منتظم طول بزرگ‌ترین قطر، چند برابر طول کوچک‌ترین قطر است؟

۱) ۲　　۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۳) $\sqrt{۳}$　　۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- مطابق شکل یک هشت‌ضلعی منتظم در یک مربع محاط شده است. اگر $AB = ۱$ ، آن‌گاه طول ضلع مربع کدام است؟



۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

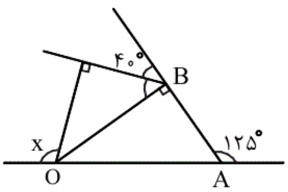
۳) $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

رياضي ، رياضي پايه - گواه ، - ۱۳۹۶۱۰۰۱

۱۲۱- در شکل مقابل $\hat{A}=۱۲۵^\circ$ و $\hat{B}=۴۰^\circ$. زاویه‌ی x چند درجه است؟



۱) ۱۰۵

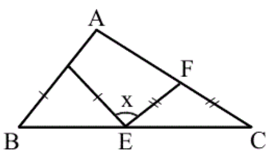
۲) ۱۱۰

۳) ۱۱۵

۴) ۱۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در شکل زیر، اگر $\hat{A}=۸۴^\circ$، آنگاه زاویه‌ی x چند درجه است؟



۱) ۸۴

۲) ۹۶

۳) ۴۸

۴) ۵۸

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- **یک مثلث متساوی‌الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟**

۱) ۶۰°، ۶۰° و ۶۰°

۲) ۳۰°، ۳۰° و ۹۰°

۳) ۳۰°، ۶۰° و ۹۰°

۴) ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰°

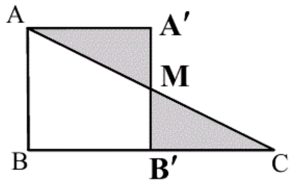
شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- **در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD ، اگر ساق AD برابر قاعده‌ی کوچک‌تر و قطر AC برابر قاعده‌ی بزرگ‌تر باشد، زاویه‌ی D چند درجه است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۵۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- **در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، بر روی ضلع AB مربع ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه زده همنهشت باشند، مساحت ذوزنقهٔ $ABB'M$ چند برابر مساحت مربع است؟**



۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- **در یک مستطیل با طول و عرض $۲\sqrt{۶}$ و $۲\sqrt{۳}$، فاصله‌ی هر رأس از قطر مستطیل کدام است؟**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

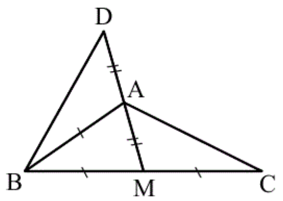
شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- **در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با زاویه‌ی ۶۰ درجه، قاعده‌ی کوچکتر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟**

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲۷\sqrt{۳}$ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- **در شکل زیر $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{B}C$ چند درجه است؟**



۱) ۳۹

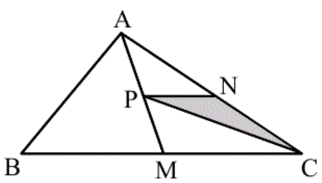
۲) ۵۶

۳) ۵۸

۴) ۶۱

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- **در شکل زیر N وسط ضلع AC و P وسط میانه‌ی AM است. مساحت مثلث PNC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟**



۱) $\frac{۱}{۴}$

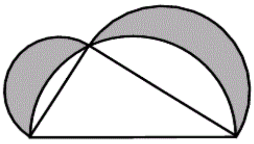
۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۱۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیهٔ سایه زده، کدام است؟



۱) ۲π

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۳π

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- (مهدی ملارمضانی)

$$\log_{۹}^{۲۷} = \log_{۳^۲}^{۳^۳} = \frac{۳}{۲}$$

$$۱۰^{\log\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}^{\log ۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$\log_{۹}^{۲۷} - ۱۰^{\log\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۱$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐✓ ۴ ☐

۱۰۲- (امین کریمی)

$$f(x) = ۲\log_{b}^{x+a} \text{ و } \begin{cases} x+a > ۰ \Rightarrow x > -a \\ x > ۱ :\text{با توجه به نمودار} \end{cases} \Rightarrow a = -۱$$

$$A\left|\begin{array}{l} x = \frac{۴}{۳} \\ y = ۲ \end{array}\right. \Rightarrow ۲ = ۲\log_{b}^{(\frac{۴}{۳}-۱)} \Rightarrow b = \frac{۴}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ab = -\frac{۱}{۳}$$

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۱)

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐✓

-۱۰۳ (مهدی ملارمضانی)

$$\log_{۸}^{۲\sqrt{۲}} = \log_{۸}^{\sqrt{۸}} = \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۲} \Rightarrow x = ۱$$

$$\log_{\sqrt{۳}}^{۱+۲x} \xrightarrow{x=۱} \log_{\sqrt{۳}}^{۳} = ۲$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

✓ [۱] [۲] [۳] [۴]

-۱۰۴ (ابراهیم قانونی)

$$\log_{۶}^{۱۸} = \log_{۶}^{۶\times۳} = ۱ + \log_{۶}^{۳} \quad (۱)$$

$$\log_{۶}^{۶} = ۱ \Rightarrow \log_{۶}^{۲\times۳} = ۱ \Rightarrow \log_{۶}^{۲} + \log_{۶}^{۳} = ۱ \Rightarrow ۱ - \log_{۶}^{۳} = \log_{۶}^{۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \text{عبارت} = (۱ - \log_{۶}^{۳}) \times (۱ + \log_{۶}^{۳}) + (\log_{۶}^{۳})^{۲}$$

$$\xrightarrow{\log_{۶}^{۳}=A} (۱ - A) \times (۱ + A) + A^{۲} = ۱ - A^{۲} + A^{۲} = ۱$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

[۱] [۲] ✓ [۳] [۴]

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = ۳۲^{x-۱} \Rightarrow ۲^{-\frac{۳}{۲}} = ۲^{۵(x-۱)} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} = ۵x - ۵ \Rightarrow ۵ - \frac{۳}{۲} = ۵x$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۲} = ۵x \Rightarrow x = \frac{۷}{۱۰}$$

پس نقطهٔ برخورد $(\frac{۷}{۱۰}, \frac{۱}{۲\sqrt{۲}})$ است که مختصات آن در تابع f نیز صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = (\frac{۱}{۲})^{a(\frac{۷}{۱۰})-۱} \Rightarrow ۲^{-\frac{۳}{۲}} = ۲^{۱-\frac{۷}{۱۰}a}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲} = ۱ - \frac{۷}{۱۰}a \Rightarrow \frac{۷}{۱۰}a = ۱ + \frac{۳}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۷}{۱۰}} = \frac{۵۰}{۱۴} = \frac{۲۵}{۷} \Rightarrow f(x) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲۵}{۷}x-۱}$$

به‌دنبال یافتن $f^{-۱}(\frac{۱}{۱۶})$ هستیم که کافی است مقداری از x را بیابیم که به‌ازای آن $f(x)$ برابر با $\frac{۱}{۱۶}$ می‌شود:

$$\frac{۱}{۱۶} = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲۵}{۷}x-۱} \Rightarrow ۲^{-۴} = ۲^{-(\frac{۲۵}{۷}x-۱)}$$

$$\Rightarrow -۴ = -\frac{۲۵}{۷}x + ۱ \Rightarrow x = \frac{۷}{۵}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷)

✓ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴

-۱۰۶ (امیرحسین ابومحبوب)

$$\log(\log x^{۲}) = \log(۱۰ - \log x) - \log ۲$$

$$\Rightarrow \log(\log x^{۲}) = \log\left(\frac{۱۰ - \log x}{۲}\right)$$

چون تابع $\log x$، تابعی یک‌به‌یک است، پس داریم:

$$\log x^{۲} = \frac{۱۰ - \log x}{۲} \Rightarrow ۲\log x = \frac{۱۰ - \log x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۵\log x = ۱۰ \Rightarrow \log x = ۲ \Rightarrow x = ۱۰۰$$

بنابراین معادله دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

$\boxed{۱}$ ✓$\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

-۱۰۷ (میثم حمزه‌لویی)

$$\log_{\sqrt{x}}^{(x+۴)} = ۱ + \log_{x}^{(۵x+۸)} \Rightarrow \log_{x}^{(x+۴)^{۲}} - \log_{x}^{(۵x+۸)} = ۱$$

$$\Rightarrow \log_{x}^{\frac{(x+۴)^{۲}}{۵x+۸}} = ۱ \Rightarrow \frac{(x+۴)^{۲}}{۵x+۸} = x$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۱۶ + ۸x = ۵x^{۲} + ۸x$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲} - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{قق} \\ x = -۲ & \text{غقق (در دامنهٔ معادله قرار ندارد.)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۸}}^{x} = \log_{\sqrt{۸}}^{۲} = \log_{۲^{\frac{۳}{۲}}}^{۲} = \frac{۲}{۳}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

✓$\boxed{۱}$ $\boxed{۲}$ $\boxed{۳}$ $\boxed{۴}$

۱۰۸- (محمدمصطفی ابراهیمی)

چون $۲^{۲y} + ۲^y = ۲$ می‌توان فهمید که $y = ۰$ است. البته حل آن هم این‌گونه است.

$$(۲^y)^۲ + ۲^y = ۲ \xrightarrow{۲^y = t} t^۲ + t - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (t+۲)(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = -۲ \text{ غ‌ق‌ق} \\ t = ۱ \Rightarrow ۲^y = ۱ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

$۲^y = ۱$ یعنی $y = ۰$ است.

حالا در معادلهٔ $x\log(x+y) + \log x - x - ۱ = ۰$، y را برابر صفر می‌گذاریم:

$$x\log x + \log x - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x\log x - x + \log x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x(\log x - ۱) + (\log x - ۱) = ۰ \Rightarrow (\log x - ۱)(x+۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \log x - ۱ = ۰ \Rightarrow \log x = ۱ \Rightarrow x = ۱۰ \\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین $x + y = ۱۰ + ۰ = ۱۰$ است.

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۹۲ تا ۹۷ و ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۰۹- (میثم حمزه‌لویی)

$$P(t) = ۴۰۰۰۰ \Rightarrow ۴۰۰۰۰ = ۱۰۰۰۰e^{۰/۰۷t} \Rightarrow ۴ = e^{۰/۰۷t}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین } Ln \text{ می‌گیریم.}} Ln۴ = Lne^{۰/۰۷t} \Rightarrow Ln۲^۲ = Lne^{۰/۰۷t}$$

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

(محمدمصطفی ابراهیمی)

$$f(t)=Ae^{kt}\Rightarrow f(۹۰)=\frac{۱}{۵}A=Ae^{۹۰k}\Rightarrow \frac{۱}{۵}=e^{۹۰k}$$

$$\Rightarrow Ln\frac{۱}{۵}=Lne^{۹۰k}\Rightarrow Ln\frac{۱}{۵}=۹۰k\Rightarrow k=\frac{Ln\frac{۱}{۵}}{۹۰}\quad (*)$$

$$f(t)=\frac{۱}{۲}A\Rightarrow \frac{۱}{۲}A=Ae^{kt}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=e^{kt}$$

$$\Rightarrow Ln\frac{۱}{۲}=kt\xrightarrow{(*)}Ln\frac{۱}{۲}=\frac{Ln\frac{۱}{۵}}{۹۰}t$$

$$\Rightarrow t=\frac{Ln\frac{۱}{۲}}{Ln\frac{۱}{۵}}\times ۹۰=\frac{Ln۲}{Ln۵}\times ۹۰=\frac{\log ۲}{\log ۵}\times ۹۰$$

$$=\frac{۰/۳}{۱-۰/۳}\times ۹۰=\frac{۳}{۷}\times ۹۰\simeq ۳۸/۶$$

توجه کنید که: $\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-\log ۲$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

رياضي ، رياضي پايه ، - ۱۳۹۶۱۰۰۱

 (سینا محمدپور)

مثلث KAB متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:

$$AK = KB = AB \qquad (۱)$$

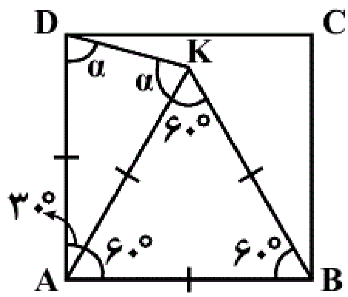
از طرفی می‌دانیم:

$$AB = AD \qquad (۲)$$

مثلث ADK متساوی‌الساقین است.

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} AK = AD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\hat{D}K = A\hat{K}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۵^\circ$$



(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

–۱۱۲ (مهدی ملارمضانی)

با توجه به هم‌نهشت‌بودن مثلث‌های AEB و ACD به‌دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین، داریم:

$$\left.\begin{matrix} A\hat{E}B = A\hat{D}C \\ B\hat{A}E = C\hat{A}D \end{matrix}\right\} \Rightarrow C\hat{D}A - C\hat{A}D = ۳۰^\circ \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

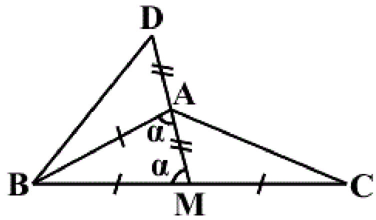
$$A\hat{C}B = C\hat{A}D + C\hat{D}A = ۵۰^\circ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} C\hat{A}D = ۱۰^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

ابتدا شکلی از مسأله ترسیم می‌کنیم.



از آن‌جا که $BC = ۲AB$، داریم:

$$AB = BM = CM$$

پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است (گزینهٔ «۱»).

هم‌چنین $A\hat{M}C = B\hat{A}D = ۱۸۰^\circ - \alpha$ (گزینهٔ «۳») و درنتیجه دو مثلث BAD و CMA با هم برابرند، پس $AC = BD$ (گزینهٔ «۲»). اما دلیلی برای درست‌بودن گزینهٔ «۴» وجود ندارد.

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

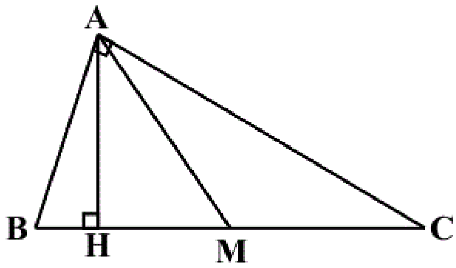
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AHB} : C\hat{A}B + H\hat{B}A = ۹۰^\circ \\ \overset{\Delta}{TH'B} : \alpha + H\hat{B}A = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha = C\hat{A}B$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{ABC}\ \text{متساوی‌الساقین}} C\hat{A}B = \frac{۷۸^\circ}{۲} = ۳۹^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ و ۲۱ تا ۲۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\frac{\hat{A}}{۹}=\frac{\hat{B}}{۷}=\frac{\hat{C}}{۲}=k$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=۲k\\ \hat{B}=۷k\\ \hat{A}=۹k\end{array}\right\}\Rightarrow ۲k+۷k+۹k=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow k=۱۰^\circ$$

پس زوایای مثلث با نام‌های A، B و C به‌ترتیب ۹۰°، ۷۰° و ۲۰° هستند. بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.

$$\left.\begin{array}{l}H\hat{A}C+H\hat{A}B=۹۰^\circ\\ H\hat{A}B+\hat{B}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow H\hat{A}C=\hat{B}\ ,\ H\hat{A}B=\hat{C}\ (*)$$

حال از آن‌جایی که میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، داریم:

$$AM=MB\Rightarrow M\hat{A}B=\hat{B}\Rightarrow H\hat{A}M=M\hat{A}B-H\hat{A}B$$

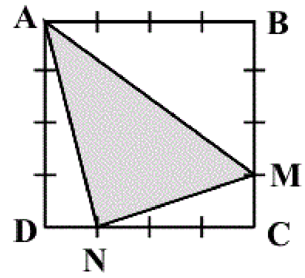
$$\xrightarrow{(*)}H\hat{A}M=\hat{B}-\hat{C}=۵۰^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

(سینا محمدپور)

در صورتی‌که طول ضلع مربع را **a** فرض کنیم، داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ADN}} = \frac{۱}{۲}a.(\frac{a}{۴}) = \frac{a^۲}{۸}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABM}} = \frac{۱}{۲}a.(\frac{۳}{۴}a) = \frac{۳}{۸}a^۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{MCN}} = \frac{۱}{۲}(\frac{a}{۴}).(\frac{۳}{۴}a) = \frac{۳a^۲}{۳۲}$$

از طرفی: $S_{\overset{\Delta}{AMN}} = S_{ABCD} - (S_{\overset{\Delta}{ADN}} + S_{\overset{\Delta}{ABM}} + S_{\overset{\Delta}{MCN}})$

بنابراین: $S_{\overset{\Delta}{AMN}} = a^۲ - (\frac{۱}{۸}a^۲ + \frac{۳}{۸}a^۲ + \frac{۳}{۳۲}a^۲) = \frac{۱۳}{۳۲}a^۲$

۱ ۲✓ ۳ ۴

—۱۱۷

(حسین حاجیلو)

ضلع‌های مثلث را **x**، **۲x** و $\sqrt{۵}x$ درنظر می‌گیریم، از آن‌جا که

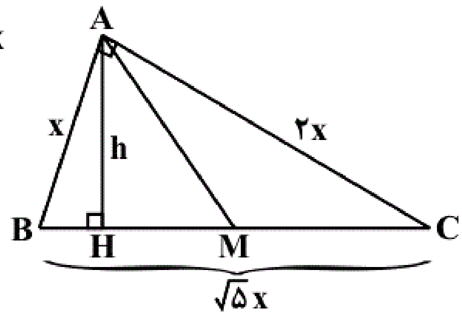
$x^۲ + (۲x)^۲ = (\sqrt{۵}x)^۲$، مثلث قائم‌الزاویه است. مطابق شکل داریم:

$$AM = \frac{۱}{۲}BC = \frac{\sqrt{۵}}{۲}x$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

$$\Rightarrow h \times \sqrt{۵}x = x \times ۲x \Rightarrow h = \frac{۲}{\sqrt{۵}}x$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}x}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}x} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

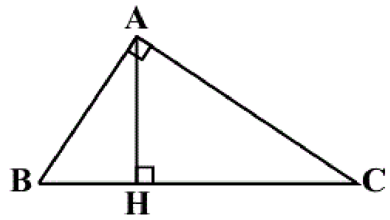


(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۶، ۵۵ تا ۵۷ و ۶۳ تا ۶۷)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۸- (محمد خندان)

$$\begin{cases} BH = ۲ \\ HC = ۸ \end{cases} \Rightarrow AB^۲ = BH \times BC$$



$$AB^۲ = ۲ \times ۱۰ = ۲۰$$

$$AB = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۱۹- (سینا محمدپور)

با توجه به شکل رسم‌شده، بزرگ‌ترین قطر در یک شش‌ضلعی منتظم برابر **۲a** است و کوچک‌ترین قطر **AE** است که طول آن دو برابر ارتفاع یکی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{AE}{۲} = h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow AE = \sqrt{۳}a$$

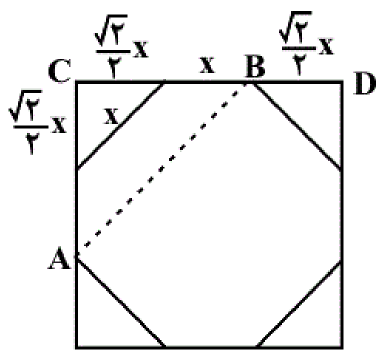
$$\Rightarrow \frac{\text{بزرگ‌ترین قطر}}{\text{کوچک‌ترین قطر}} = \frac{۲a}{\sqrt{۳}a} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۰- (حسین حاجیلو)

مطابق شکل داریم:

$$AB = \sqrt{۲}BC \Rightarrow ۱ = \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x + x)$$



$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۱ + \sqrt{۲}} \qquad (*)$$

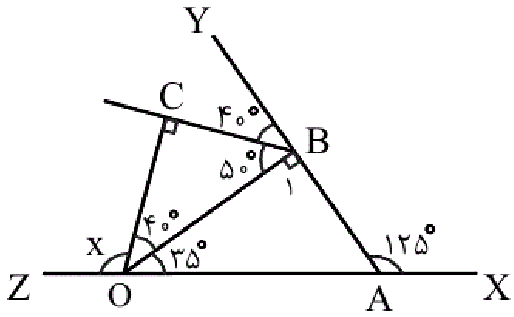
$$CD = ۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x) + x = (۱ + \sqrt{۲})x \overset{(*)}{=} ۱$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۶ و ۵۱ تا ۵۳)

۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۲۱- (سراسری تجربی — ۸۷)

برای مثلث **OAB**، زاویه‌ی $B\hat{A}X$ یک زاویه‌ی خارجی است، پس:



$$B\hat{A}X = \hat{B}_1 + A\hat{O}B$$

$$\Rightarrow ۱۲۵^\circ = ۹۰^\circ + A\hat{O}B$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B = ۳۵^\circ$$

از طرفی:

$$\hat{B}_1 + O\hat{B}C + C\hat{B}Y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ + O\hat{B}C + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow O\hat{B}C = ۵۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی **OBC**، داریم:

$$B\hat{O}C = ۹۰^\circ - O\hat{B}C = ۹۰^\circ - ۵۰^\circ = ۴۰^\circ$$

همچنین:

$$x + B\hat{O}C + A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ$$

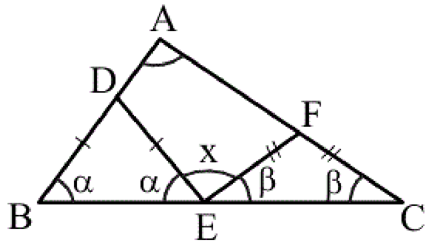
$$\Rightarrow x + ۴۰^\circ + ۳۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۵^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

✓ ۱ ۲ ۳ ۴

۱۲۲- (سؤال ۵۱۶ کتاب آبی ۳۰ سال کنکور ریاضیات تجربی)

مطابق شکل، داریم:



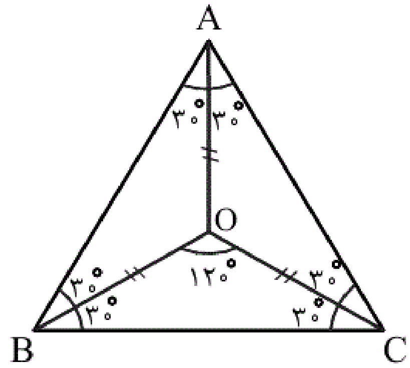
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} : \alpha + \beta + \widehat{A} = ۱۸۰^\circ \\ \alpha + \beta + x = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \widehat{A} = ۸۴^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

✓ ۱   ۲   ۳   ۴

۱۲۳- (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

در شکل مقابل، مثلث متساوی‌الاضلاع **ABC**، به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود این سه مثلث، متساوی‌الساقین بوده و زاویه‌ی مجاور ساق‌های آنها $\frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$ است.

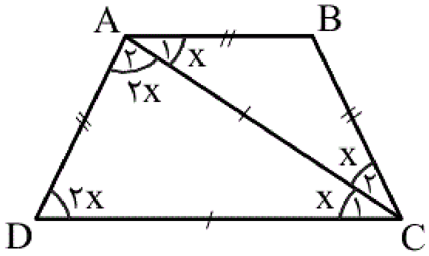


پس زاویه‌های رأس هر یک برابر است با:

$$۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۷ تا ۲۷)

۱۲۴–



فرض: $\widehat{C}_1 = x \Rightarrow \widehat{A}_1 = x$

$$AB = BC \Rightarrow \widehat{C}_2 = x$$

ABCD : ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $\widehat{D} = \widehat{C} = 2x$

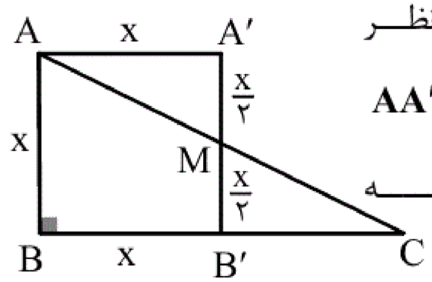
$$\xrightarrow{AC=DC} \widehat{A}_2 = \widehat{D} = 2x$$

$$\overset{\Delta}{ADC} : 2x + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 2x = 72^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۵– (سراسری تجربی – ۹۲)



طول ضلع مربع $AA'B'B$ را x در نظر می‌گیریم. از همنهشت بودن دو مثلث $AA'M$ و $CB'M$، نتیجه می‌شود که $A'M = B'M = \frac{x}{2}$، پس:

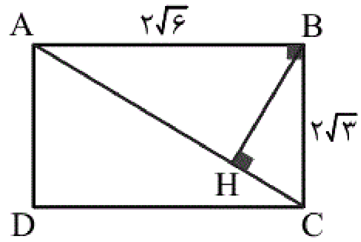
$$\frac{S(ABB'M)}{S(AA'B'B)} = \frac{\frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right)x}{x^2} = \frac{\frac{3}{4}x^2}{x^2} = \frac{3}{4}$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۵۰ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۶- (سراسری تجربی - ۸۳)

فاصله‌ی رأس از قطر مستطیل، مطابق شکل، برابر با ارتفاع وارد بـر وتـر، در مثلث قائم‌الزاویـه‌ی **ABC** اسـت. ابتـدا طـول وتـر **AC** را در ایـن مثلـث محاسبه می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\hat{B}=۹۰^\circ} AC=\sqrt{AB^۲+BC^۲}$$

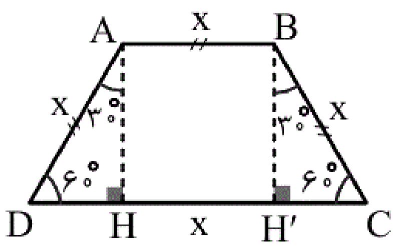
$$=\sqrt{(۲\sqrt{۶})^۲+(۲\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$\Rightarrow BH=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{(۲\sqrt{۶})(۲\sqrt{۳})}{۶}=۲\sqrt{۲}$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۱، ۴۶ و ۵۷ تا ۵۹)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۲۷- (سراسری تجربی - ۹۵)



مطابق شکل، ذوزنقه‌ای با شرایط مسأله رسم و ارتفاع‌های آن را نیز رسم می‌کنـیم کـه در این صورت دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویـه‌هـای حـاده‌ی ۳۰° و ۶۰° در دو طـرف ذوزنقـه حاصل می‌شود. مطابق شکل داریم:

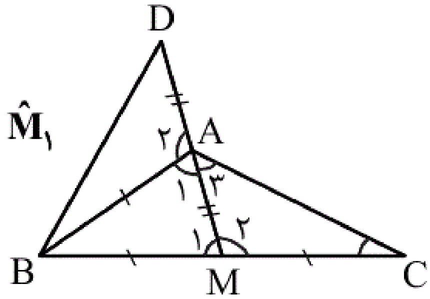
$$\overset{\Delta}{ADH}:\ \text{ضلع روبه‌رو به زاویهٔ } ۳۰^\circ:\ DH=\frac{۱}{۲}AD=\frac{x}{۲}$$

$$\text{با نظیر استدلال بالا}: CH'=\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow CD=CH'+HH'+DH=\frac{x}{۲}+x+\frac{x}{۲}=۲x$$

$$\text{محیط ذوزنقه}=CD+AD+AB+BC=۲x+x+x+x=۳۰$$

۱ ۲✓ ۳ ۴



$\overset{\Delta}{BAM}$ متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱$

$\Rightarrow ۱۸۰° - \hat{A}_۱ = ۱۸۰° - \hat{M}_۱$

$\Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{M}_۲$

$$\begin{cases} AM = AD \\ \hat{M}_۲ = \hat{A}_۲ \\ CM = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{DAB} \Rightarrow \hat{A}_۳ = \hat{D} \quad (*)$$

$$\hat{D} + \hat{C} = ۶۱^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{A}_۳ + \hat{C} = ۶۱^\circ \quad (**)$$

زاویهٔ خارجی: $\hat{M}_۱ = \hat{A}_۳ + \hat{C} \xrightarrow{(**)} \hat{M}_۱ = ۶۱^\circ$

$$\xrightarrow{AB=MB} \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱ = ۶۱^\circ$$

در مثلث **ABM**، می‌توان نوشت:

$$A\hat{B}C + \hat{A}_۱ + \hat{M}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}C + ۶۱^\circ + ۶۱^\circ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{B}C = ۵۸^\circ$$

(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

$$\overset{\Delta}{APC} : \xrightarrow{\text{میانه } PN} S_{PNC} = \frac{۱}{۲} S_{APC}$$

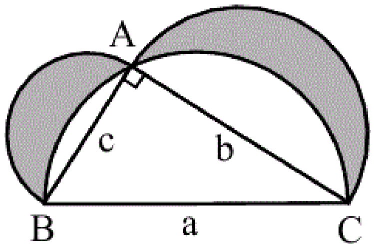
$$\overset{\Delta}{AMC} : \xrightarrow{\text{میانه } CP} S_{APC} = \frac{۱}{۲} S_{AMC}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \xrightarrow{\text{میانه } AM} S_{AMC} = \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{PNC} = \frac{۱}{۴} S_{AMC} = \frac{۱}{۸} S_{ABC}$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳، ۴۶ و ۵۰ تا ۵۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴



مطابق شکل، مساحت کل شکل مقابل، برابر است با مجموع مساحت‌های دو نیم‌دایره به قطرهای **b** و **c** و مثلث قائم‌الزاویه‌ی **ABC**، پس:

$$\text{مساحت کل شکل}: S=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{c}{۲}\right)^{۲}+\frac{bc}{۲}$$

$$=\frac{\pi}{۸}(b^{۲}+c^{۲})+\frac{bc}{۲}$$

حال اگر مساحت نیم‌دایره‌ای به قطر **a** از مساحت کل شکل کم شود، مساحت قسمت هاشورخورده به‌دست می‌آید.

$$\text{مساحت نیم‌دایره به قطر } a: S'=\frac{۱}{۲}\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}=\frac{\pi}{۸}a^{۲}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده}: s=S-S'$$

$$s=\frac{\pi}{۸}(b^{۲}+c^{۲})+\frac{bc}{۲}-\frac{\pi}{۸}a^{۲}=\frac{\pi}{۸}(b^{۲}+c^{۲}-a^{۲})+\frac{bc}{۲}$$

طبق قضیه‌ی فیثاغورس، در مثلث **ABC**، داریم: $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$، در نتیجه $b^{۲}+c^{۲}-a^{۲}=۰$، پس مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با $\frac{bc}{۲}$، یعنی مساحت مثلث **ABC**.

$$s=S(A\overset{\Delta}{B}C)=\frac{bc}{۲}\xrightarrow[c=۳]{b=۴}s=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

(مساحت و قضیهٔ فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۴۱، ۴۶ و ۵۷ تا ۵۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴