



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۸۱- اگر  $a < b$  و  $c < d$  باشد، آنگاه کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح است؟

(۲)  $a + c < b + d$

(۱)  $a - c < b - d$

(۴)  $ac < bd$

(۳)  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر  $\bar{a} = 1/27$  و  $\bar{a} + 0/83 = 0$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

شما پاسخ نداده اید

۸۳- تابع  $f(x) = \min\{x^2, 6 - |x|\}$  چگونه است؟

(۲) همواره منفی است.

(۱) همواره مثبت است.

(۴) می‌نیم آن ۲ است.

(۳) ماکزیمم آن ۴ است.

شما پاسخ نداده اید

۸۴- مجموعه جواب نامعادله  $|1 - x^3| < 1 - x$ ، بازه‌ای متقارن با نقطه میانی  $a$  و شعاع  $r$  است.  $a + r$  کدام است؟

(۴)  $\frac{3}{2}$

(۳) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱) صفر

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۸۵- دنباله‌های  $a_n = \frac{n^2}{n+2}$  و  $b_n = \frac{n^2}{n+1}$  مفروضند. دنباله  $\{a_n - b_n\}$  چگونه است؟

(۲) واگرا با جملات مثبت

(۱) همگرا با جملات منفی

(۴) واگرا با جملات منفی

(۳) همگرا با جملات مثبت

شما پاسخ نداده اید

۸۶- کدام دنباله از بالا و پایین بی کران است؟

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (۲) \qquad a_n = -n \quad (۱)$$

$$a_n = (-1)^n \sqrt{n} \quad (۴) \qquad a_n = (-1)^{n+1} + ۲ \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  باشد، دنباله  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  بیکران است.

(۲) اگر جملات دنباله  $a_n$  منفی و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$  باشد، آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

(۳) اگر  $a_n$  واگرا باشد، هر زیر دنباله از آن نیز واگرا است.

(۴) اگر  $a_n$  همگرا باشد، زیر دنباله‌ای از آن وجود دارد که همگرا نباشد.

شما پاسخ نداده اید

۸۸- کدام گزینه در مورد دنباله  $\left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\}$  صحیح است؟

(۱) کوچکترین کران بالای دنباله صفر است.

(۲) کوچکترین کران بالای دنباله یک است.

(۳) بزرگترین کران پایین دنباله صفر است.

(۴) بزرگترین کران پایین دنباله یک است.

شما پاسخ نداده اید

۸۹- دنباله غیر ثابت  $(|x| - 1)^n$  همگراست. حدود  $x$  شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۹۰- دنباله  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$  کدام یک از ویژگی‌های زیر را داراست؟

(۱) صعودی - همگرا (۲) صعودی - واگرا (۳) نزولی - کراندار (۴) نزولی - بیکران

شما پاسخ نداده اید

۹۱- دنباله  $a_n = \left\{ \sin \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right\}$ ، به ازای  $n \geq 3$  چه وضعیتی دارد؟

(۱) بی کران و غیر یکنوا (۲) کراندار و صعودی (۳) کراندار و نزولی (۴) کراندار و غیر یکنوا

شما پاسخ نداده اید

۹۲- در دنباله  $\left\{ \frac{2n + \cos n\pi}{n+2} \right\}$  به ازای  $n \geq M$ ، فاصله جملات دنباله از حدش کمتر از  $0.01$  است. کمترین مقدار طبیعی  $M$  کدام است؟

(۱) ۴۹۸ (۲) ۴۹۹ (۳) ۲۹۹ (۴) ۳۰۰

شما پاسخ نداده اید

۹۳- دنباله  $a_n = \left(\frac{3n+a}{bn-1}\right)^n$  همگرا به  $e^2$  است.  $a-b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

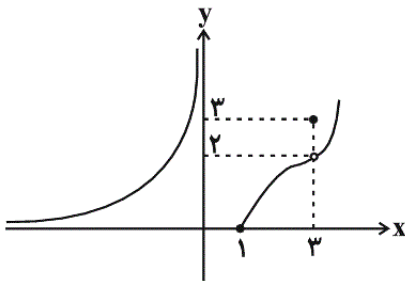
۹۴- دنباله  $\{a_n\}$  که جملات آن به صورت  $a_1 = 1$  و  $a_{n+1} = 2^{-n} + a_n$  تعریف شده‌اند، چگونه دنباله‌ای است؟

- (۱) صعودی و کراندار (۲) نزولی و کراندار (۳) صعودی و بیکران (۴) نزولی و بیکران

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، حد، حد و پیوستگی - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۹۵- با توجه به نمودار تابع  $f(x)$ ، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح نیست؟



(۱)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$

(۲)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$

(۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

(۴)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- کدام دنباله نشان می‌دهد که تابع  $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x > 1 \\ x+1 & , x < 1 \end{cases}$  در  $x=1$  حد ندارد؟

- (۱)  $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}$  (۲)  $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$  (۳)  $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$  (۴)  $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- تابع  $f(x) = (x^3 + ax + b)[2x]$  در فاصله  $(-1, 1)$  حد دارد.  $a-b$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $-\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- حد راست تابع  $f(x) = [\sin x + \cos x] - [\cos x]$  در  $x = \frac{\pi}{2}$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر حد توابع  $f-g$  و  $\frac{f}{g}$  در نقطه‌ی  $x=2$  به ترتیب از راست به چپ برابر ۲ و ۳ باشد، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x+1) + g(2x))$  کدام است؟

۱۰۰- اگر  $a_n = \frac{2n+b}{2n+3}$  و  $f(x) = [2x] + 1$  باشد، به ازای کدام مجموعه مقادیر برای  $b$ ، دنباله  $f(a_n)$  به عدد ۲ همگراست؟ ( [ ] ، نماد جزء

صحیح است.)

- (۱)  $(3, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 3)$  (۳)  $(-1, 3]$  (۴)  $[3, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، بردار - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۲۱- اگر  $|a| = |b| = |a - b|$ ، زاویه بین بردارهای  $b$  و  $a + b$ ، کدام است؟

- (۱)  $30^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- بردار  $a = 3i - j + 5k$  با کدام یک از بردارهای داده شده، زاویه بزرگ تری می‌سازد؟

- (۱)  $(2, -7, -1)$  (۲)  $(3, 0, 4)$  (۳)  $(-2, 4, 1)$  (۴)  $(4, 1, 6)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- روی دو بردار  $a$  و  $b$  مثلثی با مساحت ۳ واحد مربع بنا می‌شود. حاصل  $|(2a - b) \times (a + 3b)|$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۱ (۳) ۴۲ (۴) ۲۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴-  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه نقطه دلخواه در فضا هستند. بردار  $\vec{AB} \times \vec{CB}$  همواره با کدام بردار برابر است؟

- (۱)  $\vec{BC} \times \vec{CA}$  (۲)  $\vec{AC} \times \vec{BA}$  (۳)  $\vec{AB} \times \vec{BC}$  (۴)  $\vec{BC} \times \vec{AC}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، خط و صفحه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۲۵- اگر  $A(-3, 4, -1)$ ،  $B(0, 1, 1)$  و  $C(0, 1, 3)$ ، ۳ رأس یک مثلث باشند، آنگاه معادله خطی که از مرکز ثقل مثلث، عمود بر صفحه مثلث رسم

می‌شود، کدام است؟

- (۱)  $\begin{cases} y - x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} y + x = 3 \\ z = 1 \end{cases}$   
 (۳)  $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$  (۴)  $\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

۱۲۶- چند نقطه روی خط  $x = y = \frac{z}{2}$  وجود دارد که از صفحه  $x - y + z = 4$  به فاصله ۲ باشد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- صفحه  $P$ ، محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند. اگر این صفحه با محور  $z$  ها موازی باشد، آنگاه

شامل کدام نقطه است؟

- (۱)  $(1, 2, 1)$  (۲)  $(2, 1, 1)$   
 (۳)  $(-2, 2, 1)$  (۴)  $(2, -2, 3)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- صفحه‌ای که از نقطه  $A(3, 2, 4)$  گذشته و شامل محور  $z$  ها باشد، از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱)  $(2, 3, 0)$  (۲)  $(2, -3, 0)$   
 (۳)  $(3, -2, 0)$  (۴)  $(3, 2, 0)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- خط  $d$  شامل نقطه  $A(0, 0, 1)$  بوده و داخل صفحه مثلث  $ABC$  واقع است. اگر  $B(-4, 2, -1)$  و  $C(0, -2, 3)$  دو طرف  $d$  واقع بوده و از آن

به یک فاصله باشند، معادله خط  $d$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$  (۲)  $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$   
 (۳)  $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$  (۴)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- طول عمود مشترک دو خط متنافر  $d: x = \frac{y}{2} = z$  و  $d': x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (۲)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$   
 (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- چند گراف منتظم از مرتبه ۹ وجود دارد که اندازه‌اش کوچکتر از ۱۰ باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

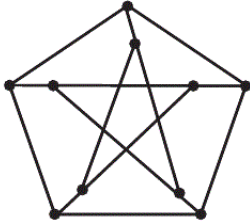
۱۴۲- در گراف ساده  $G$  از مرتبه ۵، تعداد مسیرهای به طول ۰ تا ۴ با هم برابر هستند. به این گراف حداقل چند یال اضافه کنیم تا بازه‌ی گردد؟

- (۱) گراف بازه‌ی است. (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

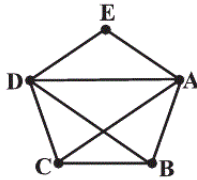
۱۴۳- شکل روبرو (گراف پترسن) چند دور با طول نایبتر از ۵ دارد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

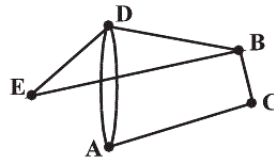


شما پاسخ نداده اید

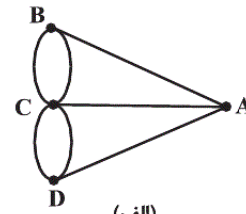
۱۴۴- در شکل‌های زیر از رأس  $A$  شروع کرده و از هر یال یک بار می‌گذریم. رأس پایانی به ترتیب از راست به چپ برای شکل‌های «الف» تا «پ» کدام است؟



(پ)



(ب)



(الف)

(۴) نشدنی،  $B$  و نشدنی

(۳)  $D$  و  $B, C$

(۲) نشدنی،  $B$  و  $A$

(۱) نشدنی،  $D$  و  $E$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- گراف  $G$  از مرتبه ۹ و فاقد دور است. با اضافه کردن هر یال دلخواه، گراف حاصل دارای دور خواهد بود. اندازه این گراف کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) ۲۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- درختی دارای  $2x+1$  رأس درجه یک،  $x$  رأس درجه دو،  $x-1$  رأس درجه ۳ و هفت رأس درجه ۴ است.  $x$  کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- مجموع درایه‌های قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده  $G$  برابر ۸۰ است. اگر در ماتریس مجاورت  $G$  تمام درایه‌های سطر اول و آخر برابر صفر باشد، حداقل مرتبه گراف کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- در دنباله  $\{L_n\}$ ، با ضابطه  $L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  ( $n \geq 3$ )، با استفاده از اصل استقرای قوی ریاضی، اگر

$A = L_n + 3L_{n-1} + 3L_{n-2}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $A < (\frac{7}{4})^n$  (۲)  $A < (\frac{4}{7})^n$  (۳)  $A < \frac{7^n}{4^{n-1}}$  (۴)  $A < (\frac{7}{4})^{n-1}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- چند عدد طبیعی  $a$  وجود دارد که باقیمانده تقسیم آن بر ۱۵، از مکعب خارج قسمت بزرگتر است؟

۳۴ (۴)

۳۳ (۳)

۱۶ (۲)

۱۷ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- چند نقطه با مختصات صحیح، بر منحنی  $4y - 2x^2 - 6 = 0$  واقع است؟

(۴) بی شمار

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) هیچ

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، مثلثات - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۰۹- تعداد جواب‌های معادله  $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۷

(۱) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- جواب کلی معادله  $\tan x + \cot x = 4(\cos 6x + \cos 2x)$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۲)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$

(۱)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$

(۴)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

(۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۰۱- جواب‌های معادله  $\sqrt{x+3} = 2x$  چگونه‌اند؟

(۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

(۱) فقط یک جواب مثبت

(۴) دو جواب مثبت

(۳) جواب حقیقی ندارد.

شما پاسخ نداده اید



۱۰۲- اگر مجموعه مقادیری از  $x$  که در آن تابع  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5}$  کم تر از یک است، بازه  $(m, 1)$  باشد، حداقل مقدار  $m$

کدام است؟

- (۱) -۴      (۲) -۳      (۳) -۲      (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر  $|x - y| < |x| + |y|$ ، آن گاه عبارت  $\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}$  چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) بی شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- معادله  $x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- مجموعه جواب نامعادله  $\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{3}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۶      (۲) ۳      (۳) ۴      (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- معادله  $|2x - 5| + |-x^2 + 2x - 3| = 5$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۴      (۴) جواب حقیقی ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- معادله  $2^x = |x^2 - 1|$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- مجموعه جواب نامعادله  $\sqrt{-x+2} \geq \log(x-1)$  کدام است؟

(۴)  $(1, 2]$

(۳)  $\emptyset$

(۲)  $(-\infty, 2]$

(۱)  $(-\infty, 1]$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۱ ، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی ۱) ، هندسه‌ی فضایی - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۵۱- از استوانه‌ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳، بزرگترین مخروط ممکن را جدا می‌کنیم. حجم باقیمانده چند برابر  $\pi$  است؟

(۴) ۸

(۳) ۷

(۲) ۶

(۱) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ، طول ضلع  $AB$  برابر ۸ واحد است. این مثلث را حول ضلع  $AB$ ،  $360^\circ$  دوران می‌دهیم تا یک شکل فضایی به حجم

$96\pi$  تولید شود. طول وتر  $BC$  کدام است؟

(۴)  $8\sqrt{2}$

(۳) ۱۰

(۲)  $6\sqrt{3}$

(۱) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- منشوری با قاعده شش‌ضلعی منتظم در استوانه‌ای با همان ارتفاع محاط است. نسبت مساحت جانبی منشور به مساحت جانبی استوانه کدام است؟

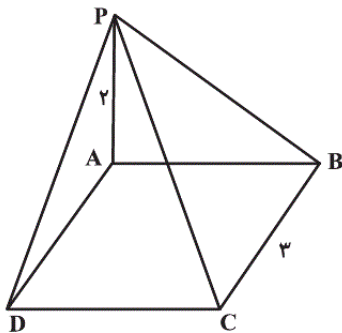
(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

(۲)  $\frac{3}{\pi}$

(۱)  $\frac{2}{\pi}$

شما پاسخ نداده اید



۱۵۴- در شکل زیر  $PC = 8$  و  $PA$  بر صفحه مستطیل  $ABCD$  عمود است. حجم هرم کدام است؟

(۲)  $\sqrt{51}$

(۱)  $\frac{2}{3}\sqrt{51}$

(۴)  $2\sqrt{51}$

(۳)  $\frac{3}{2}\sqrt{51}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- اگر مساحت‌های سه وجه دو به دو غیرموازی از مکعب مستطیلی، ۴، ۶ و ۱۲ سانتی‌متر مربع باشد، طول قطر این مکعب مستطیل چند سانتی‌متر

است؟

(۴)  $5\sqrt{2}$

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۲)  $4\sqrt{2}$

(۱)  $2\sqrt{7}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۶- یک کره به مرکز O و به حجم  $288\pi$  را با صفحه P، به فاصله ۳ از مرکز آن قطع می‌کنیم. مقطع برش، یک دایره به مرکز O' و به شعاع r می‌شود.

نسبت مساحت کره به مساحت دایره مقطع برش کدام است؟

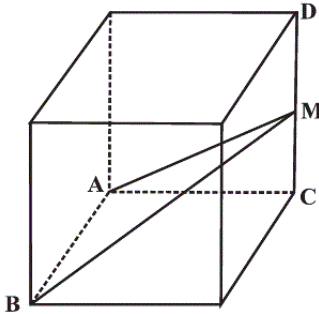
(۴)  $3\pi$

(۳) ۵

(۲)  $\frac{16}{3}$

(۱) ۶

شما پاسخ نداده اید



۱۵۷- اگر M وسط یال CD از مکعب روبه رو باشد، اندازه زاویه  $\angle AMB$  کدام است؟

(۲)  $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{3}$

(۱)  $\sin^{-1} \frac{1}{3}$

(۴)  $\sin^{-1} \frac{2}{3}$

(۳)  $\sin^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۸- کره‌ای در داخل مکعبی محاط و بر مکعب دیگری محیط است. اگر سطح کره  $S_2$  و سطح مکعب‌ها  $S_1$  و  $S_3$  باشد، حاصل  $\frac{S_1 + S_3}{2S_2}$  چقدر است؟

(۲)  $\frac{\pi}{8}$

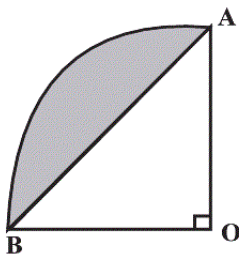
(۱)  $\frac{\pi}{4}$

(۴)  $\frac{8}{\pi}$

(۳)  $\frac{4}{\pi}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۹- ربع دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر مطابق شکل داده شده است. حجم حاصل از دوران  $36^\circ$  ناحیه رنگی حول OA چند سانتی‌متر مکعب است؟



مکعب است؟

(۱)  $72\pi$

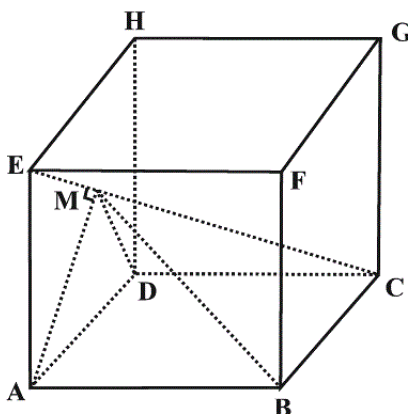
(۲)  $90\pi$

(۳)  $108\pi$

(۴)  $112\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۰- در مکعب زیر AM بر قطر CE عمود است. حجم هرم به رأس M و قاعده ABCD چه کسری از حجم مکعب است؟



(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{2}{9}$

(۳)  $\frac{4}{9}$

(۴)  $\frac{8}{27}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin 4x \cos 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۲)  $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$

(۱)  $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

(۴)  $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$

(۳)  $\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- مجموعه جواب نامعادله  $|x^2 - 2x| < x$  کدام بازه است؟

(۴) (۱,۳)

(۳) (۱,۲)

(۲) (۰,۳)

(۱) (۰,۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- نمودار تابع با ضابطه  $x > -1$  ;  $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$  در بازه  $(a, b)$  زیر محور  $x$  هاست. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله  $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$  کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) -۲

۱۱۴- در یک مزرعه شالی کاری اگر دو کارگر با هم کار کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵

روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. کارگر دوم به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کند؟

- ۱۵ (۱)      ۳۰ (۲)      ۴۵ (۳)      ۶۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4}$ ، در بازه  $(a, b)$  پایین‌تر از خط به معادله  $y = 2$  است. بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۶ (۲)      ۸ (۳)       $\infty$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع  $y = |x| - x$  و  $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

- $\frac{8}{3}$  (۱)      ۴ (۲)       $\frac{16}{3}$  (۳)      ۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$  را ۴ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- $-\frac{3}{5}$  (۱)       $-3$  (۲)       $-\frac{2}{5}$  (۳)       $-2$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- در کدام بازه از مقادیر  $x$ ، نمودار تابع  $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ ، در بالای نمودار تابع  $y = |x - 3| + 2$  قرار دارد؟

- (۱)  $\left( \frac{3 - \sqrt{17}}{2}, 5 \right)$       (۲)  $\left( 2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)$

- (۳)  $\left( 2, \frac{4 + \sqrt{15}}{2} \right)$       (۴)  $(2, 2 + \sqrt{15})$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- نقاط  $A(5, -4, 1)$ ،  $B(-1, 2, 4)$  و  $O(0, 0, 0)$  مفروض هستند و  $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ، مقدار  $|\vec{OM}|$  کدام است؟

(۱)  $\sqrt{10}$  (۲)  $\sqrt{11}$

(۳)  $\sqrt{13}$  (۴)  $\sqrt{14}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  برابر  $60^\circ$  و  $|a| = 2|b|$  است. زاویه بین بردار  $a + (-b)$  و بردار  $a$  چه قدر است؟

(۱)  $30^\circ$  (۲)  $45^\circ$

(۳)  $90^\circ$  (۴)  $120^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- اگر سه بردار  $a$ ،  $b$  و  $c$  مخالف صفر باشند، زاویه بین بردار  $b$  و بردار  $v$  که در آن  $v = (a(b \cdot c) - c(b \cdot a))$ ، چه قدر است؟

(۱)  $60^\circ$  (۲)  $90^\circ$

(۳)  $30^\circ$  (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه بردار غیر صفر باشند، خلاصه شده  $(2a - b) \cdot ((b + c) \times (c - a))$  کدام است؟

(۱)  $a \cdot (b \times c)$  (۲)  $2a \cdot (b \times c)$

(۳)  $3a \cdot (b \times c)$  (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، خط و صفحه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

۱۳۵- فاصله نقطه  $A(0, 3, 4)$  از خط گذرا بر نقطه  $(2, 0, 1)$  و موازی بردار  $a = (0, 1, 1)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- فاصله دو خط موازی  $(x + y = 1, z = 1)$  و  $(x + y = 3, z = 3)$ ، کدام است؟

(۱) ۲  $\sqrt{2}$  (۲)

(۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- صفحه شامل دو خط موازی  $(x = 2t + 1, y = t - 1, z = t)$  و  $(\frac{x}{3} = y = z - 2)$ ، محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) ۵ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- معادله صفحه ای شامل دو نقطه  $A(1, 0, 0)$  و  $B(0, 2, 2)$  که موازی محور  $x$  ها باشد، کدام است؟

(۱)  $x + 2y + z = 1$  (۲)  $2y + z - 2 = 0$

(۳)  $x + y + z = 2$  (۴)  $y - z = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- محور  $x$  ها کدام وضعیت را نسبت به صفحه گذرا از نقطه  $A(1, 2, -2)$  و فصل مشترک دو صفحه به معادلات  $2x - y + z = 4$  و  $x + 2z = 0$ ،

دارا است؟

(۱) موازی صفحه است ولی خارج آن قرار دارد. (۲) به تمامی درون صفحه واقع است.

(۳) بر صفحه عمود است. (۴) با صفحه متقاطع است ولی بر آن عمود نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- خط  $L: \frac{x}{m+1} = y - 1 = z$  در صفحه  $P: x + ny + z - 2m = 0$  قرار دارد. حاصل  $mn$  کدام است؟

(۱)  $\frac{8}{9}$  (۲)  $-\frac{8}{9}$

(۳)  $\frac{9}{8}$  (۴)  $-\frac{9}{8}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

-۸۱

(بهرام طالبی)

نامساوی‌های  $۱ < ۲$  و  $-۲ < -۱$  مثال نقض سایر گزینه‌هاست.

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه ۱۲)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(مسین شایلو)

از رابطهٔ مربوط به تبدیل عدد اعشاری متناوب به کسر متعارفی استفاده می‌کنیم:

$$0.\overline{۸۳} + 0.\overline{a} = 1.\overline{۲۷} \Rightarrow \frac{۸۳ - ۸}{۹۰} + \frac{a}{۹} = \frac{۱۲۷ - ۱۲}{۹۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۷۵}{۹۰} + \frac{۱۰a}{۹۰} = \frac{۱۱۵}{۹۰}$$

$$\Rightarrow ۷۵ + ۱۰a = ۱۱۵ \Rightarrow ۱۰a = ۴۰ \Rightarrow a = ۴$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه ۷)

۴

۳

۲

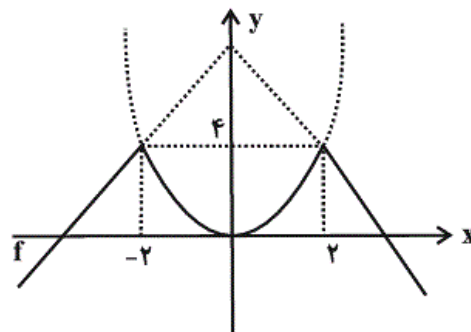
۱

-۸۳

(ممد مصطفی ابراهیمی)

نمودار تابع  $f$  به صورت زیر است.

با توجه به نمودار تابع، ماکزیمم مقدار تابع برابر ۴ است.



(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

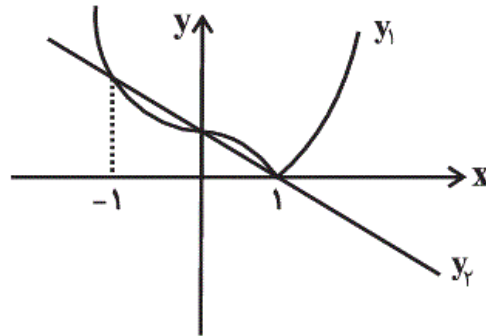
۳

۲

۱



از روش هندسی برای یافتن مجموعه جواب نامعادله استفاده می‌کنیم:



با توجه به شکل، در بازه

$(-1, 0)$  نمودار  $y_1$  پایین

نمودار  $y_2$  قرار دارد. بنابراین:

$$\text{مجموعه جواب} = (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2} \\ r = \frac{0 - (-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + r = 0$$

(دیفرانسیل - یادآوری مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، دنباله - ۱۳۹۶۰۹۱۷

(علی شعرابی)

دنباله  $a_n - b_n$  را تشکیل می‌دهیم:

$$a_n - b_n = \frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3 + n^2 - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-n^2}{(n+2)(n+1)}$$

در دنباله فوق همه جملات منفی هستند. از طرفی:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{n^2} = -1 \text{ همگرا}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{n} = \begin{cases} +\infty & ; \text{زوج } n \\ -\infty & ; \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله کران بالا و پایین ندارد.}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میثم حمزه لویی)

(۱) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  باشد، آنگاه دنباله  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$  همگرا به صفر است، زیرا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{کراندار است.}$$

(۳) به عنوان مثال دنباله  $\{(-1)^n\}$  واگراست. ولی یک زیر دنباله از آن مانند

$$\{(-1)^{2n}\}$$

همگرا به یک است.

(۴) اگر  $\{a_n\}$  همگرا باشد، هر زیر دنباله از آن همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دنباله  $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$  یک دنباله صعودی است، زیرا:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} - \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{n^2 + 2n - 1}{n+1} - \frac{n^2 - 1}{n}$$

$$= \frac{n^2 + 2n^2 - n^2 + n - n^2 + 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \geq 1} a_{n+1} - a_n > 0$$

پس بزرگترین کران پایین دنباله به ازای  $n = 1$  به دست می‌آید:

$$\text{بزرگترین کران پایین دنباله} = a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$$

دقت کنید این دنباله از بالا بیکران است، چون:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1} = \infty$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

دنباله  $\{c^n\}$  زمانی غیر ثابت و همگراست که:  $-1 < c < 1, c \neq 0$

بنابراین باید:

$$\begin{cases} -1 < |x| - 1 < 1 \Rightarrow 0 < |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2, x \neq 0 \\ |x| - 1 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}$$

مجموعه مقادیر  $x \rightarrow (-2, 2) - \{0, \pm 1\}$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فرهاد خامی)

-۹۰

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1 = L$$

بنابراین دنباله کراندار و همگراست.

از طرفی با توجه به گزینه‌ها، دنباله یا صعودی است و یا نزولی، با توجه به اینکه

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ و } a_1 < L, \text{ بنابراین دنباله صعودی است.}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \right) = 0 - (1) = -1 \Rightarrow \text{همگرا است.}$$

$\Rightarrow$  کراندار است.

از طرفی با افزایش  $n$  ( $n \geq 3$ )،  $\{\sin \frac{\pi}{n}\}$  کاهش و  $\{\cos \frac{\pi}{n}\}$  افزایش می‌یابد

(بنابراین  $\{-\cos \frac{\pi}{n}\}$  کاهش می‌یابد). در نتیجه دنباله  $\{\sin \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}\}$ ، یک

دنباله نزولی است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\Rightarrow \left| \frac{(-1)^n - 4}{n+2} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n: \left| \frac{1-4}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{1}{100} \Rightarrow n+2 > 300 \\ \text{فرد } n: \left| \frac{-1-4}{n+2} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{5}{n+2} < \frac{1}{100} \Rightarrow n+2 > 500 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n > 298 \xrightarrow{\text{زوج } n} n \geq 300 \\ n > 498 \xrightarrow{\text{فرد } n} n \geq 499 \end{cases}$$

با توجه به اینکه به ازای  $n$  های زوج بزرگتر یا مساوی ۳۰۰ و  $n$  های فرد بزرگتر یا

مساوی ۴۹۹ رابطه برقرار است، در نتیجه کمترین مقدار  $M$  برابر ۴۹۸ است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

چون دنباله همگرا به  $e^2$  است، پس باید ابهام  $^\infty$  (یک حدی) داشته باشیم. بنابراین باید حد پایه وقتی  $n \rightarrow \infty$ ، برابر یک شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + a}{bn - 1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{bn} = 1 \Rightarrow \frac{r}{b} = 1 \Rightarrow b = r$$

$$\Rightarrow a_n = \left( \frac{r^n + a}{r^n - 1} \right)^n$$

حال حد دنباله را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{r^n + a}{r^n - 1} \right)^n = e^2 \Rightarrow e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{r^n + a}{r^n - 1} - 1 \right) n} = e^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{r^n + a}{r^n - 1} - 1 \right) n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{r^n + a - r^n + 1}{r^n - 1} \right) n = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + 1)n}{r^n} = 2 \Rightarrow \frac{a + 1}{r} = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a - b = 5 - 3 = 2$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$, a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2, a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

پس  $a_n$  مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت  $\frac{1}{2}$

است، در نتیجه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

پس دنباله همگراست و هر دنباله همگرا، کراندار نیز هست.

$$a_{n+1} = 2^{-n} + a_n \quad \text{هم چنین دنباله صعودی است. زیرا:}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^n} > 0 \Rightarrow \text{صعودی است.}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

با توجه به شکل داریم:

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهم‌رضا میرجلیلی)

-۹۶

باید دنباله غیر ثابت و همگرا به یک باشد و هم با مقادیر بیشتر از یک و هم با مقادیر

کمتر از یک به یک همگرا باشد. در نتیجه دنبالهٔ گزینهٔ «۳» صحیح است. زیرا:

$$\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = \begin{cases} \text{زوج } n : \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\} \Rightarrow \text{با مقادیر بیشتر از یک به یک همگراست.} \\ \text{فرد } n : \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} \Rightarrow \text{با مقادیر کمتر از یک به یک همگراست.} \end{cases}$$

دقت کنید که گزینهٔ «۱» فقط با مقادیر کمتر از یک به یک همگرا است. گزینهٔ «۲» با

مقادیر بیشتر از یک، به یک همگرا است و گزینهٔ «۴» همگرا به صفر است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



تابع  $y = [2x]$  در فاصله  $(-1, 1)$  در نقاط  $x = \frac{1}{2}$ ،  $x = 0$  و  $x = -\frac{1}{2}$  حد

ندارد. برای اینکه  $f$  در این نقاط حد داشته باشد، باید  $\frac{1}{2}$ ،  $0$  و  $-\frac{1}{2}$  ریشه‌های تابع

$y = x^3 + ax + b$  باشند. در نتیجه:

$$x = 0 : 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x^3 + ax$$

$$x = \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$$

(دیفرانسیل - ۵۳ و پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به اینکه  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$  داریم:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left( [\sin x + \cos x] - [\cos x] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left( \left[ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] - [\cos x] \right) \end{aligned}$$

می‌توان نوشت:

$$\text{حد} = \left[ \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^- \right] - [0^-] = [1^-] - [0^-] = 0 - (-1) = 1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کاظم ابلائی)

-۹۹

اگر فرض کنیم:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2$  خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_1 - L_2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = 3$$

$$\begin{cases} L_1 - L_2 = 2 \\ L_1 = 3L_2 \end{cases} \Rightarrow 3L_2 - L_2 = 2 \Rightarrow L_2 = 1 \Rightarrow L_1 = 3$$

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x+1) + g(2x)) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \\ &= L_1 + L_2 = 4 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [2a_n] + 1 = 2$$

با توجه به دنباله  $a_n$   $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+b}{2n+3} = 1 \right)$  و همگرایی دنباله

$\{f(a_n)\}$  به عدد ۲، دنباله  $a_n$  از مقادیر کمتر از یک به یک میل می‌کند.

$$a_n = \frac{2n+b}{2n+3} = \frac{2n+3+b-3}{2n+3} = 1 - \frac{3-b}{2n+3} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\Rightarrow 3-b > 0 \Rightarrow b < 3$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۱ و هر دو پیوستگی: صفحه‌های ۵۳ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

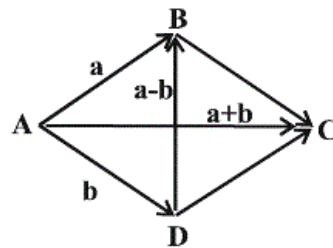
 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، بردار - ۱۳۹۶۰۹۱۷

-۱۲۱

(رضا عباسی اصل)



با توجه به شکل مقابل، مثلث  $ABD$  متساوی

الاضلاع است و زاویه بین بردارهای  $a$  و  $b$ ،

$60^\circ$  است.

حال در لوزی  $ABCD$ ،  $a+b$  (قطر لوزی) زاویه بین  $a$  و  $b$  را نصف می‌کند،

پس زاویه بین  $a+b$  و  $b$ ،  $30^\circ$  است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر حاصل ضرب داخلی هر یک از بردارهای داده شده را در بردار  $a$  محاسبه کنیم، خواهیم دید که به غیر از گزینه ۳، مابقی مثبت خواهند شد. پس بردار  $a$  با بردارهای داده شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ زاویه‌ای حاده می‌سازد، اما چون حاصل ضرب داخلی بردار  $a$  در بردار گزینه «۳» منفی است، زاویه‌ای که با این بردار می‌سازد منفرجه است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سروش موثینی)

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ۳ \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ۶$$

$$|(\mathbf{r}\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{r}\mathbf{b})| = \left| \underbrace{\mathbf{r}\mathbf{a} \times \mathbf{a}}_{\rightarrow \mathbf{0}} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{r}\mathbf{a} \times \mathbf{r}\mathbf{b} - \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{r}\mathbf{b}}_{\rightarrow \mathbf{0}} \right|$$

$$= |-\mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{r}\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

$$= \mathbf{r} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

$$= \mathbf{r} \times ۶ = ۴۲$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیوان دارایی)

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{BC} = \vec{BC} \times \vec{CA} = \vec{CA} \times \vec{AB}$$

بنابراین:

$$\vec{AB} \times \vec{CB} = -\vec{AB} \times \vec{BC} = -\vec{BC} \times \vec{CA} = \vec{BC} \times \vec{AC}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: مشابه تمرین ۷ صفحه ۳۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، خط و صفحه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

مرکز ثقل مثلث به رأس‌های  $A(-۳, ۴, -۱)$ ،  $B(۰, ۱, ۱)$  و  $C(۰, ۱, ۳)$  برابر است با:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-۳ + ۰ + ۰}{3} = -۱$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{۴}{3} = ۲$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = ۱$$

در نتیجه معادله خط گذرنده از  $G$  و عمود بر صفحه مثلث  $ABC$ ، به شرح زیر

$$\begin{cases} \overline{AB} = (۳, -۳, ۲) \\ \overline{AC} = (۳, -۳, ۴) \end{cases} \quad \text{به دست می آید:}$$

$$\vec{u} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-۶, -۶, ۰), \quad G = (-۱, ۲, ۱)$$

$$\begin{cases} \frac{x+۱}{-۶} = \frac{y-۲}{-۶} \\ z=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = y-۲ \\ z=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x=۳ \\ z=۱ \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمد صحت کار)

-۱۲۶

ابتدا وضعیت نسبی خط و صفحه را تعیین می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{هادی خط } \vec{u} = (۱, ۱, ۲) \\ \text{نرمال صفحه } \vec{n} = (۱, -۱, ۱) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = ۲ \neq ۰$$

پس خط و صفحه متقاطع هستند و مسأله ۲ جواب دارد.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله صفحه به صورت  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$  است که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  طول و عرض تلاقی

صفحه با محورهای  $X$  و  $Y$  هستند.  $d: \frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow$

تنها نقطه گزینه ۴ در معادله صدق می کند.

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عمید کروس)

صفحه  $P$  شامل بردار یکه  $k = (0, 0, 1)$  و بردار  $\overline{OA} = (3, 2, 4)$  است.

بنابراین بردار نرمال صفحه عبارت است از:

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1) \times (3, 2, 4) = (-2, 3, 0)$$

در نتیجه معادله صفحه با جایگذاری مبدأ مختصات به صورت  $-2x + 3y = 0$

خواهد بود و اکنون با توجه به گزینه‌ها، نقطه  $(3, 2, 0)$  در معادله صدق می کند.

$$-2(3) + 3(2) = 0$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه؛ صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

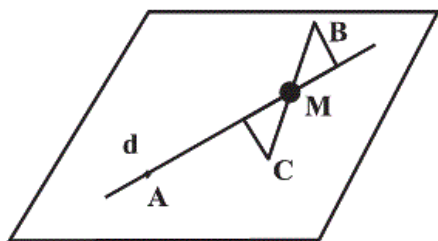
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

خط باید از نقطه  $M$  وسط  $B$  و  $C$  عبور کند، پس:



$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = (-2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = (-2, 0, 0)$$

پس خط  $d$  موازی محور  $x$  ها بوده و معادله آن به صورت  $\begin{cases} y = \beta \\ z = \gamma \end{cases}$  است.

اما خط  $d$  از  $A(0, 0, 1)$  عبور می کند، پس معادله آن به صورت  $\begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$  خواهد

بود.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کیوان دارابی)

-۱۳۰

اگر دو خط متناظر روی دو صفحه موازی واقع باشند، فاصله دو صفحه همان طول عمود مشترک دو خط است.

به سادگی می توان ۲ صفحه موازی پیدا کرد که دو خط روی آنها واقع هستند:

$$d: x = \frac{y}{2} = z \xrightarrow{\text{صفحه ای شامل } d} x = \frac{y}{2} \Rightarrow P: 2x - y = 0$$

$$d': x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{2} \xrightarrow{\text{صفحه ای شامل } d'} 2x - 2 = y \Rightarrow P': 2x - y = 2$$

$$\Rightarrow \text{فاصله } d \text{ و } d' = \frac{|2 - 0|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه ۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱



۱۴۱-

(علی اکبر علیزاده)

برای هر گراف  $r$ -منتظم، رابطه  $pr = 2q$  یا  $q = \frac{pr}{2}$  برقرار است. داریم:

$$q < 10 \Rightarrow \frac{pr}{2} < 10 \xrightarrow{p=9} \frac{9r}{2} < 10 \Rightarrow r < \frac{20}{9}$$

تنها مقادیر قابل قبول برای  $r$ ، ۰ و ۲ است. (گراف ۱- منتظم از مرتبه ۹ وجود ندارد). یک گراف ۰- منتظم از مرتبه ۹ (گراف تهی) و ۴ گراف ۲- منتظم از مرتبه ۹ (یک نه ضلعی - یک شش ضلعی و یک مثلث - یک پنج ضلعی و یک چهارضلعی - سه مثلث) وجود دارد. بنابراین در مجموع ۵ گراف با ویژگی مورد نظر می‌توان یافت.  
(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۴

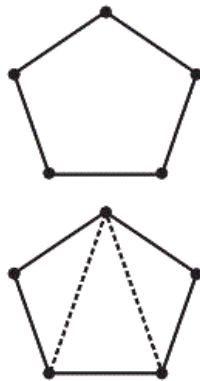
۳

۲ ✓

۱

۱۴۲-

(هومن نورائی)



با توجه به آنکه تعداد مسیرهای به طول ۰ و ۱ با هم برابر است، پس:  $p = q = 5$ ، در ضمن چون تعداد مسیرهای به طول ۲، ۳ و ۴ نیز برابر ۵ است، گراف فقط می‌تواند ۲-منتظم مرتبه ۵ باشد. برای آنکه این گراف بازه‌ای باشد، حداقل ۲ یال باید به آن اضافه کنیم:

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۳)

۴

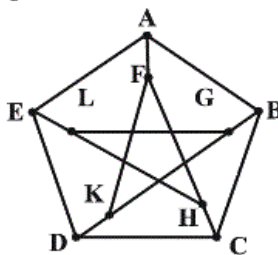
۳ ✓

۲

۱

۱۴۳-

(سروش موئینی)



هیچ دوری به طول ۳ یا ۴ ندارد.  
یک دور به طول ۵ به شکل  $ABCDEA$ ؛  
یک دور به طول ۵ به شکل  $FHLGKF$ ؛  
پنج تا به شکل همانند  $FHCDFK$ ؛  
پنج تا به شکل همانند  $ABGLEA$  دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۱۴ و ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۴۴-

(سروش موئینی)

در (الف)، گراف دارای ۴ رأس فرد است پس اویلری یا نیمه اویلری نیست و نمی‌توانیم از هر یال یک بار بگذریم.  
در (ب)، گراف نیمه اویلری است و فقط رئوس  $A$  و  $B$  فرد هستند. پس با شروع از  $A$  به  $B$  می‌رسیم.  
در (پ)، گراف نیمه اویلری است و فقط  $B$  و  $C$  فرد هستند. پس با شروع از  $A$  نمی‌توان از هر یال یک بار گذشت.

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۴۵

(علیرضا سیف)

زمانی با اضافه کردن هر یال، دوری ایجاد می‌شود که قبلاً بین آن‌ها مسیری باشد، بنابراین گراف همبند است و هر گراف همبند فاقد دوری، یک درخت است. در نتیجه:

$$q = p - 1 = 9 - 1 = 8$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۴۶

(رضا پورحسینی)

$$\text{اولاً: } p = 2x + 1 + x + x - 1 + 7 = 4x + 7$$

$$\text{ثانیاً } q = p - 1 = 4x + 7 - 1 = 4x + 6$$

$$\text{ثالثاً } \sum_{i=1}^p \deg V_i = 2q$$

$$\Rightarrow (2x+1)(1) + (x)(2) + (x-1)(3) + (7)(4) = 2(4x+6)$$

$$\Rightarrow 2x+1+2x+3x-3+28=8x+12$$

$$\Rightarrow x=14$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۴۷

(رضا پورحسینی)

اولاً: مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $A^2$  همان  $2q$  است. یعنی مجموع درجات گراف. پس گراف  $40$  یال دارد.

ثانیاً: چون درایه‌های سطر اول و آخر ماتریس مجاورت گراف همگی صفرند پس این دو سطر معرف دو رأس ایزوله هستند.

ثالثاً: حداقل مرتبه برای اینکه گراف بتواند  $40$  یال داشته باشد  $p=10$  است.

$$q_{K_{10}} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

زیرا با  $9$  رأس حداکثر  $\frac{9 \times 8}{2} = 36$  یال می‌توانیم داشته باشیم، پس گراف حداقل

$$12 = 10 + 2 \text{ رأس باید داشته باشد.}$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۹۱۷

اولاً داریم:

$$A = L_n + 3L_{n-1} + 3L_{n-2} = L_n + 3(L_{n-1} + L_{n-2}) = 4L_n$$

حال اگر دنباله فوق را که به دنباله لوکا معروف است بشناسیم، می‌دانیم:

$$L_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \Rightarrow 4L_n < 4 \times \left(\frac{7}{4}\right)^n \Rightarrow A < \frac{7^n}{4^{n-1}}$$

و پاسخ گزینه «۳» است.

در ضمن می‌توانیم با رد گزینه‌ها نیز به پاسخ صحیح برسیم:

$$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4 \rightarrow 4L_3 = 16$$

$$1) 16 < \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64} \quad \text{غ ق ق}$$

$$2) 16 < \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343} \quad \text{غ ق ق}$$

$$3) 16 < \frac{7^3}{4^2} = \frac{343}{16} = 21/43 \quad \text{ق ق ق}$$

$$4) 16 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \quad \text{غ ق ق}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۷ و ۲۸)

۴

۳✓

۲

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$a = 15q + r; 0 \leq r < 15$$

 $r > q^3$  از طرفی

$$q = 0 \Rightarrow r = 1, 2, 3, \dots, 14 \Rightarrow a = 1, 2, \dots, 14 \Rightarrow \text{حالت ۱۴}$$

$$q = 1 \Rightarrow r = 2, 3, \dots, 14 \Rightarrow a = 17, 18, \dots, 29 \Rightarrow \text{حالت ۱۳}$$

$$q = 2 \Rightarrow r = 9, 10, \dots, 14 \Rightarrow a = 39, 40, \dots, 44 \Rightarrow \text{حالت ۶}$$

$$q = 3 \Rightarrow \text{مقداری برای } r \text{ وجود ندارد.}$$

بنابراین ۳۳ عدد طبیعی برای  $a$  وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$4y - 2x^2 - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{2x^2 + 6}{4}$$

اگر  $x$  فرد باشد، می‌دانیم:  $x^2 = 8q + 1$ ، پس:

$$y = \frac{2(8q + 1) + 6}{4} = \frac{16q + 8}{4} = 4q + 2$$

بنابراین اگر  $x$  یک عدد صحیح فرد باشد، در این صورت  $y$  نیز یک عدد صحیح خواهد بود، لذا گزینه «۴» صحیح است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۰۹

(حسین اسفینی)

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos 4x \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 2x + \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x(2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad x \in [0, \pi] \rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2 \sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \quad x \in [0, \pi] \rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \quad x \in [0, \pi] \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

پس معادله داده شده، پنج جواب در بازه  $[0, \pi]$  دارد.

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

-۱۱۰

(مهری ملارمضانی)

از فرمول‌های تبدیل جمع به ضرب و از رابطه  $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$  استفاده

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4(2 \cos 2x \cos 4x) \quad \text{می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow 4 \underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x} \cos 4x = 1 \Rightarrow 2 \sin 4x \cos 4x = 1 \Rightarrow \sin 8x = 1$$

$$\Rightarrow 8x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x + 3 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب}} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (\text{در معادله اولیه صدق نمی‌کند})$$

بنابراین معادله فقط یک جواب مثبت دارد.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات، نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(میثم حمزه‌لویی)

مقادیر  $f$  کم‌تر از یک هستند، یعنی:

$$\frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5} < 1 \Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + k}{x^2 - 4x + 5} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + 2x + k - x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 5} < 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 6x + k - 5}{x^2 - 4x + 5} < 0$$

عبارت مخرج یک عبارت همواره مثبت است (چون در معادله  $x^2 - 4x + 5 = 0$ ,

$\Delta < 0$  است. همچنین ضریب  $x^2$  مثبت است). پس باید:

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x + k - 5 < 0 \quad (*)$$

چون مجموعه جواب این نامعادله فاصله  $(m, 1)$  است، پس یک جواب معادله

$$2x^2 + 6x + k - 5 = 0, \quad x = 1 \text{ است و در آن صدق می‌کند:}$$

$$x = 1: 2(1)^2 + 6(1) + k - 5 = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$\xrightarrow{(*)} 2x^2 + 6x - 8 < 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

پس حداقل مقدار  $m$  برابر  $-4$  است.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کازم ابلالی)

نامساوی داده شده را به صورت  $|x + (-y)| < |x| + |-y|$  می‌نویسیم. بنابراین با توجه به نامساوی مثلثی باید داشته باشیم  $x(-y) < 0$ ، یعنی  $xy > 0$ . پس  $x$  و  $y$  هم‌علامت هستند و داریم:

$$x, y > 0 \Rightarrow \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = \frac{x}{x} - \frac{y}{y} = 0$$

$$x, y < 0 \Rightarrow \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} = \frac{x}{-x} - \frac{y}{-y} = 0$$

(مسئله‌ها - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات، صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

بنابراین در معادله داریم:

$$\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2$$

حال با فرض  $\frac{x^2 + 1}{x} = t$  معادله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \xrightarrow[t \neq 0]{\times t} t^2 + 1 = 2t$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ معادله جواب ندارد.}$$

(مسئله‌ها - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فرهاد عامی)

ابتدا توجه کنید که باید مخرج کسرها مخالف صفر باشند. در نتیجه:  $x \neq 1$   
 از طرفی با شرط  $x \neq 1$ ، دو طرف نامساوی، مثبت هستند، در نتیجه می‌توانیم طرفین را معکوس کنیم:

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{3} \Rightarrow |x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3$$

$$\Rightarrow -2 < x < 4 \xrightarrow{x \neq 1} x \in (-2, 4) - \{1\}$$

این مجموعه جواب شامل اعداد صحیح  $-1$ ، صفر،  $2$  و  $3$  می‌باشد.

(حسابان - مناسبات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(بهرام طالبی)

$$|2x-5| + |-x^2 + 2x - 3| = 5$$

$$-x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{\Delta < 0, a < 0} \text{همواره منفی}$$

$$\Rightarrow |-x^2 + 2x - 3| = -(-x^2 + 2x - 3)$$

$$\Rightarrow |2x-5| - (-x^2 + 2x - 3) = 5$$

$$۱) \text{ اگر } x \geq \frac{5}{2}: 2x-5+x^2-2x+3=5 \Rightarrow x^2=7$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{7} & \text{ق.ق} \\ x = -\sqrt{7} & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$۲) \text{ اگر } x < \frac{5}{2}: -2x+5+x^2-2x+3=5 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق.ق} \\ x=3 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

پس معادله دو جواب حقیقی دارد.

(حسابان - مناسبات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

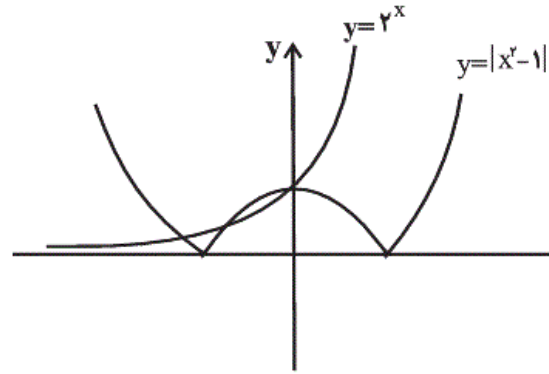
۴

۳

۲ ✓

۱

از روش هندسی برای یافتن تعداد جواب‌های حقیقی معادله استفاده می‌کنیم:



دو نمودار سه نقطه تلاقی دارند.

بنابراین معادله سه جواب حقیقی دارد.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۵)

۴

۳ ✓

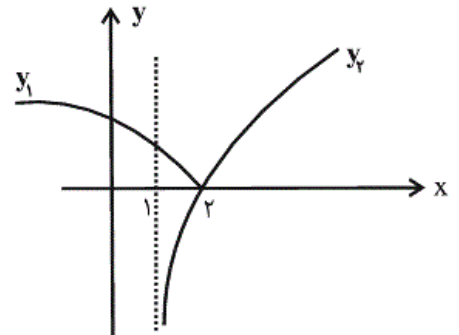
۲

۱

از روش هندسی برای یافتن مجموعه جواب نامعادله استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{-x+2} \geq \log(x-1) \Rightarrow$$

$y_1$                        $y_2$



با توجه به نمودار، مجموعه جواب نامعادله، بازه  $(1, 2]$  است.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۴ ✓

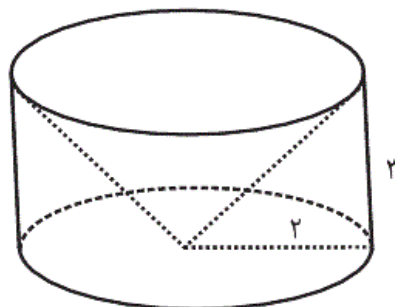
۳

۲

۱

ریاضی، هندسه ۱، هندسه فضایی (هندسه ۱)، هندسه فضایی - ۱۳۹۶۰۹۱۷

مخروط  $-V$  استوانه  $V =$  حجم باقیمانده  $V$



$$= \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi (2^2) \times 3$$

$$= 8\pi$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۵)

۴ ✓

۳

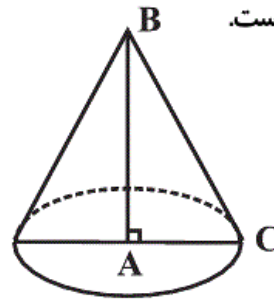
۲

۱



شکل فضایی تولید شده یک مخروط است که در آن ضلع  $AB = 8$  ارتفاع و ضلع

$AC = R$  شعاع دایره قاعده است.



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow 96\pi = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \times 8 \Rightarrow AC^2 = 36$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

وتر  $BC$  را که حول  $AB$  دوران می‌کند و مخروط را تولید می‌نماید، مولد مخروط

می‌نامند.

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمبر مهدی مسن زاره طبری)

اگر قاعده استوانه، دایره‌ای به شعاع  $R$  باشد،

اندازه ضلع شش‌ضلعی منتظم

$(AB = OA = a = R)$  نیز  $R$  است.

پس محیط آن برابر  $6R$  است.

مساحت جانبی منشور و استوانه برابر است با

حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع آن، در نتیجه:

$$\frac{S'}{S} = \frac{6Rh}{2\pi Rh} = \frac{3}{\pi}$$

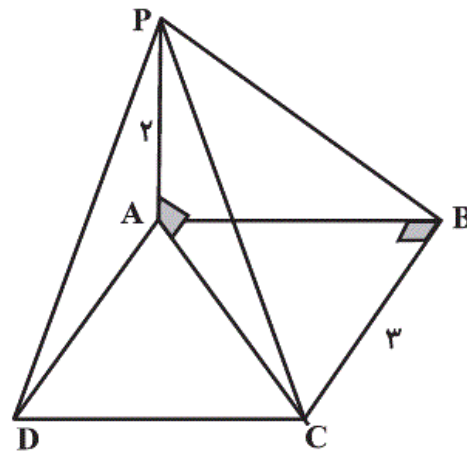
(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



چون  $PA$  بر صفحه مستطیل عمود است، پس بر تمامی خطوط آن از جمله خط  $AC$  عمود است. حال در مثلث قائم الزاویه  $PAC$  بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^2 = PC^2 - PA^2 = 64 - 4 = 60$$

همچنین در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 60 - 9 = 51 \Rightarrow AB = \sqrt{51}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \frac{1}{3} (\sqrt{51} \times 3) \times 2 = 2\sqrt{51}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۴

۳

۲

۱

اگر ابعاد مکعب مستطیل را  $a$  ،  $b$  و  $c$  بنامیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} ab = 4 \\ ac = 6 \\ bc = 12 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین}} (abc)^2 = 2^2 \times 6^2 \times 2 \Rightarrow abc = 12\sqrt{2}$$

$$abc = 12\sqrt{2} \xrightarrow{bc=12} a = \sqrt{2} \xrightarrow{ab=4} b = 2\sqrt{2} \xrightarrow{bc=12}$$

$$\Rightarrow c = \frac{12}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

و در نتیجه:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\triangle OO'A : \hat{O}' = 90^\circ, OO' = 3, R = 6, O'A = r$$

$$r = \sqrt{R^2 - OO'^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$$

$$S = 4\pi R^2 \text{ : مساحت کره}$$

$$S' = \pi r^2 \text{ : مساحت دایره مقطع برش}$$

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{4 \times 6^2}{(3\sqrt{3})^2} = \frac{16}{3}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر اندازه یال مکعب  $a$  باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\Delta AMC : AM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Delta AMB : BM = \sqrt{BA^2 + MA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{\Delta a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$$

$$\Delta AMB : \sin(\widehat{AMB}) = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = 6b^2 \\ \sqrt{3}b = 2R \rightarrow b = \frac{2R}{\sqrt{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = 8R^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{2S_2} = \frac{22R^2}{8\pi R^2} = \frac{4}{\pi}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶ و ۱۳۶ تا ۱۴۲)

۴

۳

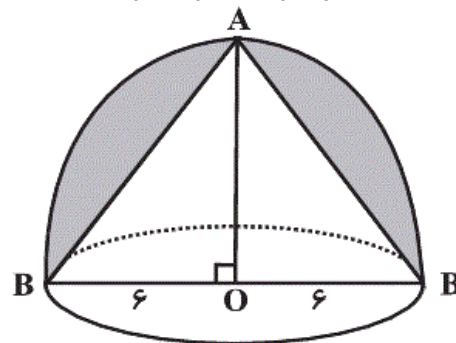
۲

۱

(نویز مبینی)

-۱۵۹

کافی است حجم مخروط را از حجم نیم کره کم کنیم:



$$V = \text{حجم مخروط} - \text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3}\pi(6)^2 - \frac{1}{3}\pi(6)^2 \times 6 = 72\pi$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی، صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۴۳)

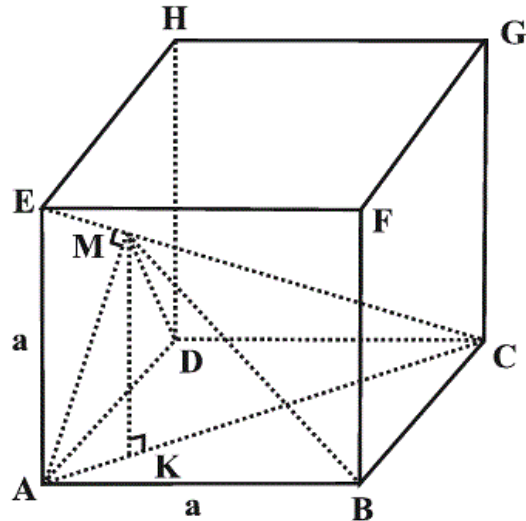
۴

۳

دانلود از سایت ریاضی سرا

۱

ارتفاع هرم به رأس  $M$  و قاعده  $ABCD$ ،  $MK$  می‌باشد.  
 $AM$  ارتفاع وارد بر وتر  $CE$  در مثلث قائم الزاویه  $ACE$  است، پس داریم:



$$AC^2 = CM \times CE \Rightarrow (a\sqrt{2})^2 = CM \times a\sqrt{3} \Rightarrow CM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$MK \parallel AE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{MK}{AE} = \frac{CM}{CE} \Rightarrow \frac{MK}{a} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{a\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$MK = \frac{2}{3}a$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}MK \times S(ABCD) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times a \times a^2 = \frac{2}{9}a^3$$

پس حجم هرم،  $\frac{2}{9}$  حجم مکعب است.

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶ و ۱۳۵ تا ۱۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضی پایه - گواه، مثلثات - ۱۳۹۶۰۹۱۷

$$\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

در سمت چپ معادله از تبدیل ضرب به جمع و در سمت راست از فرمول

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \text{ استفاده می‌کنیم:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x \text{ پس: } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha \text{ می‌دانیم}$$

$$\Rightarrow \sin 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری تهرانی خارج از کشور - ۹۵)

- ۱۲۰

راه حل اول: داریم  $x + \frac{\pi}{4} = \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}$  ، پس با توجه به اینکه

معادله مورد نظر سؤال را به صورت زیر بازنویسی  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$

می‌کنیم:

$$\cos\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

با توجه به اینکه  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$  ، معادله اخیر را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$\frac{-1}{2} \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

دانشگاه آزاد اسلامی (ریاضی)  $\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$   
 $\Rightarrow -\cos 2x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$   
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

راه حل دوم: با توجه به اتحاد

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

معادله سؤال را بازنویسی می‌کنیم.

$$\left( \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( \cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}$$

با توجه به اینکه  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  داریم:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$  داریم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، ریاضی پایه - گواه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۶۰۹۱۷

از آنجایی که  $|x^2 - 2x| > x$  ، پس  $x > 0$  است ، حال طرفین نامساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2 > x^4 - 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 3x^2 < 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) < 0 \xrightarrow{x^2 > 0} x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Rightarrow 1 < x < 3$$

پس مجموعه جواب نامعادله بازه  $(1, 3)$  است.

(مسئله‌بان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱

ابتدا تابع  $f$  را به صورت زیر به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x^3 - x) + (4 - 4x^2)$$

$$= x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = (x - 4)(x^2 - 1)$$

$$= (x - 4)(x - 1)(x + 1)$$

معادله دارای سه جواب ساده  $-1$ ،  $1$  و  $4$  است، بنابراین تابع در هریک از این جواب‌ها تغییر علامت می‌دهد. حال جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$4$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\phi$	$+$	$\phi$	$+$

تابع  $f$  به ازای  $x > -1$  در فاصله  $(1, 4)$  پایین محور  $x$  ها قرار دارد، بنابراین  $a = 1$  و  $b = 4$  است، لذا:

$$b - a = 4 - 1 = 3$$

(مسئله‌بان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۴

۳

۲

۱



فرض کنیم  $x^2 + 4x + 3 = t \geq 0$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 3 + 2} \Rightarrow t = \sqrt{t + 2}$$

طرفین معادله را با شرط  $t \geq 0$ ، به توان ۲ می‌رسانیم:

$$t^2 = t + 2$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 & \text{غ‌ق‌ق} \\ t = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

در این معادله،  $\Delta = 4^2 - 4 = 12 > 0$ ، بنابراین:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

(مسایان - مقاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای حل این نوع مسائل باید کار انجام شده در یک روز را محاسبه کنیم. مثلاً اگر کارگر اول در  $x$  روز کار را به تنهایی انجام دهد، در اینصورت کار انجام شده توسط

کارگر اول در یک روز  $\frac{1}{x}$  از کل کار می‌باشد. بنابراین کارگر دوم در  $x + ۱۵$  روز

کار را به تنهایی انجام می‌دهد. در اینصورت کار انجام شده توسط کارگر دوم در یک

روز  $\frac{1}{x + ۱۵}$  از کل کار است. با توجه به اینکه اگر دو کارگر با هم کار کنند در ۱۸

روز کار تمام می‌شود. پس کار انجام شده توسط هر دو کارگر با هم در یک روز  $\frac{1}{۱۸}$  از

کل کار است و خواهیم داشت:

کار انجام شده	کار انجام شده	کار انجام شده
توسط کارگر اول	+ توسط کارگر دوم	= توسط دو کارگر
در یک روز	در یک روز	با هم در یک روز

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{x+15+x}{x(x+15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow x^2 + 15x = 36x + 270 \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ x = -9 \end{cases} \quad (\text{تعداد روز منفی نمی‌تواند باشد}) \quad \text{غقق}$$

بنابراین کارگر اول در ۳۰ روز کار را به تنهایی انجام می‌دهد و کارگر دوم در ۴۵ روز کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

(مسئله - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

باید نامعادله  $f(x) < 2$  را حل کنیم، پس:

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} < 2 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 4} - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 2x - 2x^2 - 8}{x^2 + 4} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} < 0$$

اما  $x^2 + 4$  همواره مثبت است، پس:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 4$$

بنابراین بیشترین مقدار  $b - a$  برابر با  $6 = 4 - (-2) = b - a$  است.

(حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

۴

۳

۲

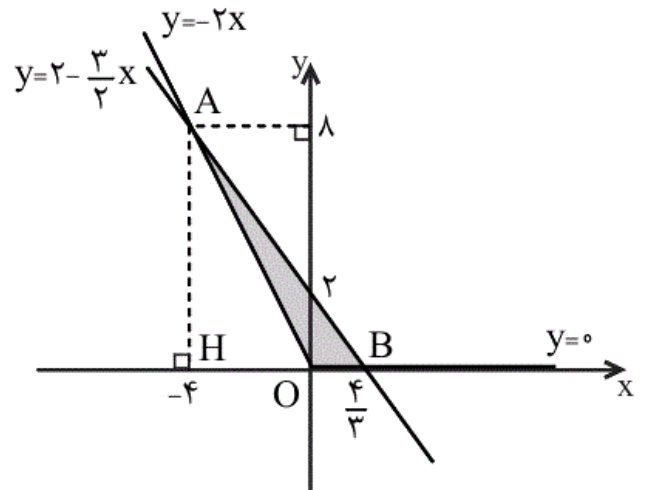
۱

(سراسری تهرانی خارج از کشور - ۹۵)

$$y_1 = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y_2 = 2 - \frac{3}{2}x$$

نمودارهای  $y_1$  و  $y_2$  را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل، مساحت مثلث  $OAB$  مورد نظر است، داریم:

$$S(OAB) = \frac{1}{2} \times AH \times OB = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

(حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۵)

۴

۳

۲

۱

اگر نمودار تابع  $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$  را ۴ واحد به سمت چپ منتقل کنیم، معادله به

$y = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 2$  تبدیل می‌شود و اگر یک واحد به بالا منتقل کنیم معادله به

$y = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 2 + 1$  تبدیل می‌شود که برای محاسبه محل تقاطع آن‌ها، دو

تابع را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2 \\ y_2 = \left| \frac{1}{2}(x + 4) \right| - 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{y_1=y_2} \frac{1}{2}|x| - 2 = \frac{1}{2}|x + 4| - 1$$

$$\xrightarrow{\times 2} |x| - |x + 4| = 2$$

جواب ندارد.  $x < -4 : -x + x + 4 = 2 \Rightarrow 4 = 2$

$-4 \leq x \leq 0 : -x - x - 4 = 2 \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = -3$

جواب ندارد.  $x > 0 : x - x - 4 = 2 \Rightarrow -4 = 2$

تذکر: به جای حل معادله  $|x| - |x + 4| = 2$  می‌توانیم گزینه‌ها را در این معادله

قرار دهیم که فقط گزینه «۲» یعنی  $x = -3$  در معادله صدق می‌کند.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\sqrt{-x^2 + 4x + 5} > |x - 3| + 2$$

باید:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 5 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ \Rightarrow (x - 5)(x + 1) \leq 0 &\Rightarrow -1 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به حدود متغیر معادله و ریشه داخل قدر مطلق خواهیم داشت:

$$1) \quad -1 \leq x < 3: \sqrt{-x^2 + 4x + 5} > -x + 5$$

طرفین به توان ۲

$$\xrightarrow{\quad} -x^2 + 4x + 5 > x^2 - 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < x < 5$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه اصلی}} 2 < x < 3 \quad (\text{I})$$

$$2) \quad 3 \leq x \leq 5: \sqrt{-x^2 + 4x + 5} > x - 1$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 5 > x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 2 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه اصلی}} 3 \leq x < \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow[\text{II, I}]{\text{اجتماع}} x \in \left( 2, \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

(مسئله - مناسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، بردار - ۱۳۹۶۰۹۱۷

$$\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB} \Rightarrow \overline{OM} - \overline{OA} = \frac{2}{3}(\overline{OB} - \overline{OA})$$

$$\Rightarrow \overline{OM} = \frac{1}{3}(2\overline{OB} + \overline{OA})$$

$$\Rightarrow \overline{OM} = \frac{1}{3}((-2, 4, 8) + (5, -4, 1))$$

$$\Rightarrow \overline{OM} = (1, 0, 3) \Rightarrow |\overline{OM}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۷ تا ۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

راه حل اول:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ}{|\mathbf{a}| |\mathbf{a} - \mathbf{b}|}$$

$$= \frac{|\mathbf{a}| - \frac{1}{2}|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{2|\mathbf{b}| - \frac{1}{2}|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{3|\mathbf{b}|}{2|\mathbf{a} - \mathbf{b}|}$$

حال اگر  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  را بر حسب  $|\mathbf{b}|$  پیدا کنیم،  $\cos \theta$  به دست می‌آید.

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos 60^\circ}$$

$$\xrightarrow{|\mathbf{a}|=2|\mathbf{b}|} |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{3} |\mathbf{b}|$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سؤال ۷۲ کتاب آبی هندسه تحلیلی)

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

بنابراین بردار  $\mathbf{v}$  بر بردار  $\mathbf{b}$  عمود است، یعنی زاویه بین  $\mathbf{v}$  و  $\mathbf{b}$   $90^\circ$  است.

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۳۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}
& (\forall a - b) \cdot ((b + c) \times (c - a)) \\
&= (\forall a - b) \cdot ((b + c) \times c - (b + c) \times a) \\
&= (\forall a - b) \cdot (b \times c + \underbrace{c \times c}_{\substack{\rightarrow \\ 0}} - b \times a - c \times a) \\
&= (\forall a - b) \cdot (b \times c - b \times a - c \times a) \\
&= \forall a \cdot (\underbrace{b \times c}_0) - \underbrace{\forall a \cdot (b \times a)}_0 - \underbrace{\forall a \cdot (c \times a)}_0 - \underbrace{b \cdot (b \times c)}_0 \\
&+ \underbrace{b \cdot (b \times a)}_0 + b \cdot (c \times a)
\end{aligned}$$

(توجه کنید که به دلیل عمود بودن  $b \times a$  بر  $a$  و  $b$  داریم:

$$a \cdot (b \times a) = b \cdot (b \times a) = 0$$

$$b \cdot (b \times c) = a \cdot (c \times a) = 0$$

و به دلیل مشابه داریم:

$$\forall a \cdot (b \times c) + b \cdot (c \times a)$$

در نتیجه حاصل برابر است با:

$$= \forall a \cdot (b \times c) + a \cdot (b \times c) = \forall a \cdot (b \times c)$$

(توجه کنید که:  $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$ )

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، خط و صفحه - ۱۳۹۶۰۹۱۷

ابتدا توجه کنید که معادلات خط گذرنده از نقطه  $(۲, ۰, ۱)$  و موازی بردار  $(۰, ۱, ۱)$ .

$$\text{به صورت } L : \begin{cases} x = 2 \\ \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1} \end{cases} \text{ است.}$$

برای پیدا کردن فاصله نقطه  $A$  از خط  $L$  نیاز به دانستن مختصات نقطه‌ای واقع بر خط  $L$

$$h = \frac{|\overline{AP} \times \mathbf{u}_L|}{|\mathbf{u}_L|} \quad \text{داریم (نقطه } P \text{). اگر این فاصله را با } h \text{ نشان دهیم، داریم:}$$

$$\begin{cases} A = (0, 2, 2), P = (2, 0, 1) \in L \Rightarrow \overline{AP} = (2, -2, -1) \\ \mathbf{u}_L = \mathbf{a} = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$$h = \frac{|(2, -2, -1) \times (0, 1, 1)|}{|(0, 1, 1)|} = \frac{|(0, -2, 2)|}{|(0, 1, 1)|}$$

$$= \frac{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2}}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

(هندسه تحلیلی - فط و صغه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آزاد ریاضی - ۸۲)

- ۱۳۶

$$L : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 1, 1) \in L$$

$$L' : \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 3, 3) \in L'$$

بردار  $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$  با هر دو خط  $L$  و  $L'$  موازی است، پس:

$$\overline{AB} = (0, 2, 2) \Rightarrow h = \frac{|\overline{AB} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{|(2, 2, -2)|}{|(1, -1, 0)|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صغه: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\begin{cases} A = (1, -1, 0) \in L \\ B = (0, 0, 2) \in L' \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \vec{AB} = (-1, 1, 2) \\ u = (2, 1, 1) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow n = \vec{AB} \times u = (-1, 5, -3) \text{ و } A = (1, -1, 0) \in P$$

$$P: -x + 5y - 3z = -6$$

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 6$$

(هندسه تحلیلی - فظ و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله‌ی کلی صفحه‌هایی که موازی محور X ها هستند، به صورت  $by + cz = d$  و

یا به طور خلاصه  $y + kz + d' = 0$  می‌باشد و چون A و B، دو نقطه روی این

صفحه هستند، داریم:

$$P: y + kz + d' = 0, \begin{cases} A = (1, 0, 0) \in P \\ \Rightarrow 0 + 0 + d' = 0 \Rightarrow d' = 0 \\ B = (0, 2, 2) \in P \\ \Rightarrow 2 + 2k + 0 = 0 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P: y - z = 0$$

(هندسه تحلیلی - فظ و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

راه حل اول: ابتدا معادلات فصل مشترک دو صفحه را می‌یابیم:

$$P_1 : \begin{cases} x + 2z = 0 \Rightarrow \frac{z}{1} = \frac{x}{-2} & (1) \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{جمع طرفین دو معادله} : -y - 3z = 4 \Rightarrow \frac{z}{1} = \frac{y+4}{-3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow$$

$$P_2 \text{ و } P_1 \text{ فصل مشترک} : L : \frac{x}{-2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{1}$$

حال باید معادله صفحه شامل نقطه  $A(1, 2, -2)$  و خط

$$L : \frac{x}{-2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{1} \text{ را بیابیم.}$$

برای این منظور، نقطه دلخواهی مانند  $B(0, -4, 0)$  را روی خط  $L$  در نظر

می‌گیریم، بردار  $\overline{AB} \times \mathbf{u}_L$  بردار نرمال صفحه مورد نظر و  $A$  یا  $B$  نقطه‌ای معلوم

از آن است:

$$\mathbf{u}_L = (-2, -3, 1) \text{ و } \overline{AB} = (-1, -6, 2)$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سؤال ۲۳۸ کتاب آبی هندسه تحلیلی)

$$\mathbf{u}_L = (m+1, 1, 1) \quad , \quad \mathbf{n}_P = (1, n, 1)$$

$$\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_P = 0 \Rightarrow m+1+n+1=0 \Rightarrow m+n=-2 \quad (1)$$

نقطه  $(0, 1, 0)$  از خط  $L$  را در صفحه  $P$  صدق می‌دهیم:

$$0 + n(1) + 0 - 2m = 0 \Rightarrow 2m - n = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m = -\frac{2}{3}, n = -\frac{4}{3} \Rightarrow mn = \frac{8}{9}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

www.kanoon.ir