



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

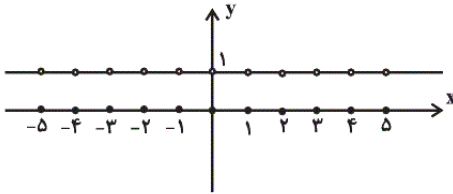
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۸۱- تابع f با نمودار زیر، در $x \in \mathbb{R}$ تعریف شده است. به ازای چه مقادیری از a ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ است؟



(۱) $a \in \mathbb{Z}$

(۲) $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

(۳) $a \in \mathbb{R}$

(۴) نمی توان تعیین کرد.

شما پاسخ نداده اید

۸۲- جمله صدم دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \right\}$ ، تقریبی از کدام عدد زیر است؟

(۴) $\frac{e}{2}$

(۳) e^2

(۲) $\sqrt[4]{e}$

(۱) \sqrt{e}

شما پاسخ نداده اید

۸۳- کدام گزینه در مورد دنباله $\left\{ \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n-1} \right\}$ صحیح است؟

(۲) نزولی و همگرا به ۱

(۱) صعودی و همگرا به ۱

(۴) نزولی و همگرا به عدد کوچکتر از ۱

(۳) صعودی و همگرا به عدد کوچکتر از ۱

شما پاسخ نداده اید

۸۴- دنباله $a_n = n(\log(2n+3) - \log(2n-1))$ به چه عددی همگراست؟

(۴) $(\log e)^2$

(۳) $4 \log e$

(۲) $2 \log e$

(۱) $\log e$

شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر $a_n = 2n(1 + \frac{a}{n})^4$ ، $b_n = 2n - 1$ و دنباله $a_n - b_n$ همگرا به ۱۷ باشد، a کدام است؟

(۴) -۱

(۳) $\frac{9}{4}$

(۲) ۲

(۱) ۱

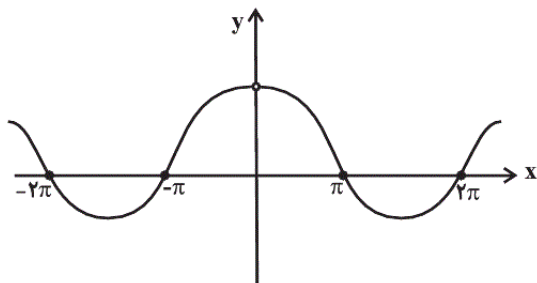
شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر $a_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ و $b_n = \cos(n\pi)$ باشد، آنگاه کدام گزینه درباره دنباله $a_n \cdot b_n$ صحیح است؟

- (۱) همگرا به ۲ (۲) همگرا به $\frac{1}{2}$ (۳) همگرا به صفر (۴) واگرا است.

شما پاسخ نداده اید

۸۷- در شکل زیر نمودار $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ رسم شده است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right]$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است).



- (۱) ۱
(۲) صفر
(۳) -۱
(۴) موجود نیست.

شما پاسخ نداده اید

۸۸- اگر $a_n = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{1-n}$ و $b_n = \sqrt{n^2 - n}$ ، هر یک از دنباله‌های $a_n - b_n$ و $\frac{b_n}{a_n}$ به ترتیب از راست به چپ چگونه‌اند؟

- (۱) همگرا-واگرا (۲) همگرا-همگرا
(۳) واگرا-واگرا (۴) واگرا-همگرا

شما پاسخ نداده اید

۸۹- اگر $f(x) = [2^x - x^2]$ و $a_n = \frac{2n+1}{n+4}$ باشد، در این صورت دنباله $f(a_n) + f(2a_n)$ به چه عددی همگراست؟ ([]، علامت جزء صحیح

است.)

- (۱) ۱ (۲) -۱
(۳) ۲ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۹۰- فرض کنید $a_n = 2n + 3 + (-1)^n$ و $b_n = n + a$. اگر دقیقاً ۴۹ جمله اول دنباله $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ خارج همسایگی $\left(\frac{101}{51}, \frac{103}{51}\right)$ قرار بگیرد،

کدام می‌تواند باشد؟ ($1 < a < 2$)

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- معادله‌ی خطی که با خط $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ موازی است و خط $\frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{2}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، کدام است؟

(۱) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2}, z=2$ (۲) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{5-z}{4}$ (۳) $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{4}$ (۴) $\frac{x+2}{2} = \frac{1+y}{3} = \frac{1-z}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- نقطه $(a, 13, 3)$ روی خط شامل نقاط $(8, 6, 4)$ و $(2, b, 5)$ واقع است. $a + b$ کدام است؟

(۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- خطی که از دو نقطه $A(1, 2, -2)$ و $B(2, -1, 1)$ می‌گذرد، صفحه‌ی xz را در نقطه (a, b, c) قطع می‌کند. $a + c$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- خط d از مبدأ مختصات گذشته و بر خطوط $d_1(x=y=z)$ و $d_2 \begin{cases} x-3y=1 \\ z=2 \end{cases}$ عمود است. این خط از کدام نقطه عبور می‌کند؟

(۱) $(1, -3, 2)$ (۲) $(2, -3, 1)$ (۳) $(1, 1, 1)$ (۴) $(1, -1, 2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- قرینه‌ی خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{1-z}{4}$ نسبت به صفحه‌ی xy کدام است؟

(۱) $\frac{1-x}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{1-z}{4}$ (۲) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{1-z}{4}$ (۳) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ (۴) $\frac{1-x}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- مختصات تصویر نقطه $A(1, 0, 0)$ روی خط $x = \frac{y}{2} = z$ کدام است؟

(۱) $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ (۲) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (۳) $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$ (۴) $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- زاویه‌ی بین خط گذرنده از نقاط $A(1, -1, 3)$ و $B(3, 0, 2)$ و خط به معادلات $x+1 = \frac{3-y}{-2} = z-1$ کدام است؟

(۱) 30° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 90°

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر A' قرینه‌ی نقطه $A(1, 1, 0)$ نسبت به خط $D: x = -y = z + 3$ باشد، آن گاه طول پاره خط AA' کدام است؟

(۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $2\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- فاصله‌ی نقطه $P(2, m, 1)$ از نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم در صفحه‌ی yz ، برابر با $2\sqrt{3}$ است. مقدار مثبت m کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- دو یال غیرهم وجه یک مکعب، هر کدام روی یکی از خطهای $d : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ و $d' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ واقع هستند. حجم این مکعب چند برابر $\sqrt{26}$ است؟

- (۱) $\frac{13}{3}$ (۲) $\frac{13}{6}$ (۳) $\frac{13}{2}$ (۴) $\frac{13}{4}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته، - 13960903

۱۲۱- درختی که دو رأس از درجه ۵ داشته باشد، حداقل چند رأس از درجه ۱ دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- چند نوع درخت وجود دارد که در آن $\Delta = 5$ و میانگین درجات رئوس آن برابر با $\frac{7}{4}$ باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- گراف G از مرتبه ۸، همبند و فاقد دور است. این گراف حداکثر چند مسیر به طول ۲ می تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۳۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- برای آنکه ماتریس مجاورت $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$ متناظر با یک درخت باشد، a و b به ترتیب از راست به چپ عبارتند از:

- (۱) ۰,۱ (۲) ۱,۰ (۳) ۱,۱ (۴) ۰,۰

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر اعداد روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف ساده G به صورت ۴,۲,۱,۱,۱,۱ باشند، کدام عبارت درباره گراف G غلط است؟
 (۱) همبند است.
 (۲) در این گراف، مسیری به طول بزرگ تر از ۳ وجود ندارد.
 (۳) دارای دور است.
 (۴) دور به طول فرد ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- گراف ساده G از مرتبه ۶ است. اگر حاصل جمع درایه های روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت گراف G برابر ۲۸ باشد، آن گاه درجه چند رأس آن ماکزیمم است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- A ماتریس مجاورت گراف ساده ای از مرتبه ۹ است به طوری که در ماتریس A^2 ، درایه های قطر اصلی همگی برابر ۸ هستند. چند یال از این گراف را باید حذف کنیم تا به درخت هم مرتبه اش تبدیل شود؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۳۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در گراف ساده G که مجموع اندازه و مرتبه آن برابر ۹ است، کم ترین تعداد درایه صفر ممکن در ماتریس مجاورت آن وجود دارد. مجموع درایه های قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت این گراف کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- ماتریس مجاورت یک گراف به صورت

	a	b	c	d	e	f
a					•	•
b					•	•
c					•	•
d					•	•
e	•	•	•	•		
f	•	•	•	•		

است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۸ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- فاصله هر دو رأس گراف G برابر یک است. اندازه این گراف کدام می‌تواند باشد؟

۳۶ (۱) ۴۰ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، - 13960903

۹۱- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x+3}$ ، شامل چند عدد صحیح نمی‌باشد؟

۳ (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر $P(x) = ax^3 - bx - 1$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ برابر -2 باشد، باقی‌مانده تقسیم

$Q(x) = ax^2 + bx$ بر $x - 1$ کدام است؟

۴/۳ (۱) -۴/۳ (۲) ۲/۳ (۳) -۲/۳ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۳- ب.م.م چند جمله‌ای‌های $P(x) = x^3 + 1$ ، $Q(x) = x^6 - 1$ و $R(x) = 4x^2 - 4$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

صفر (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۴- در یک کارخانه، زنگ A هر ۴۸ دقیقه یک بار، زنگ B هر ۷۲ دقیقه یک بار و زنگ C هر ۶۰ دقیقه یک بار به صدا در می‌آید. اگر ساعت ۸

صبح هر سه زنگ به صدا در آیند، تا ساعت ۱۲ شب چند بار دیگر سه زنگ با هم به صدا در می‌آیند؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۵- در دنباله تقریبات اعشاری $\frac{5}{11}$ ، اختلاف جمله دوم و چهارم کدام است؟

۴۵ × ۱۰^{-۱} (۱) ۴۵ × ۱۰^{-۲} (۲) ۴۵ × ۱۰^{-۳} (۳) ۴۵ × ۱۰^{-۴} (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۶- ضریب عددی جمله شامل x^{12} در بسط دو جمله‌ای $(x^2 - 2x)^7$ کدام است؟

-۲۱ (۱) -۸۴ (۲) ۸۴ (۳) ۲۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۷- اگر $x^2 + 2x + 1$ ، $\frac{x^2}{2} + x + 1$ و $x^2 + x$ به ترتیب سه جمله اول یک دنباله حسابی نزولی باشد، در این صورت جمله نوزدهم کدام است؟

- ۱۶ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۱۸ (۳)
- ۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۸- در یک دنباله حسابی با قدر نسبت d ، $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{11} = 7d$ است. حاصل $\frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{12}}{a_3 + a_5 + \dots + a_{13}}$ کدام است؟

- ۱۳ (۱)
- ۱۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۹۹- مجموع تمام جملات دنباله با جمله عمومی $a_n = 3^{-n} \cos^n(\frac{n\pi}{4})$ چقدر است؟

- صفر (۱)
- ۱ (۲)
- ۸ (۳)
- ۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر α و β جوابهای معادله $2x^2 - (m+2)x + \frac{1}{8} = 0$ باشند و بدانیم $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$ آنگاه m کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)

۴ (۳) به ازای هیچ مقدار m این رابطه برقرار نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- اگر x_1 و x_2 جوابهای معادله $-3x^2 + ax + 3 = 0$ باشد و داشته باشیم $x_2 < 1 < x_1$ ، در این صورت حدود a کدام است؟

- ۱) $a > 0$
- ۲) $a < 0$
- ۳) $a < 1$
- ۴) $a > -1$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- محیط مستطیلی P است، ماکزیمم مساحت آن کدام است؟

- ۱) $\frac{P^2}{2}$
- ۲) $\frac{P^2}{4}$
- ۳) $\frac{P^2}{8}$
- ۴) $\frac{P^2}{16}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 4 / |x + \frac{1}{x}| + 4 / 2 = 0$ چند جواب دارد؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- مجموعه مقادیر m کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا نمودار $y = (m+1)x^2 - (3m-1)x + m$ همواره از ناحیه سوم نگذرد؟

$$-1 < m < 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2) \quad m > -1 \quad (1)$$

$$0 \leq m < \frac{1}{3} \quad (4) \quad m > 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - x) - 2\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{3\cos(\pi + x) - \sin(3\pi - x)} = -\frac{5}{6}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{7\pi}{2} + x)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

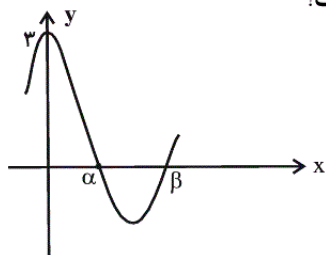
۱۰۶- نقطه $A(-\sqrt{3}, 1)$ روی دایره‌ای به شعاع ۲ واحد قرار گرفته است. نقطه A کمانی به طول π را روی این دایره در جهت مثلثاتی طی می‌کند تا به

نقطه B برسد. مختصات نقطه B کدام است؟

$$(\sqrt{3}, -1) \quad (4) \quad (2, 0) \quad (3) \quad (\sqrt{3}, 1) \quad (2) \quad (-1, -\sqrt{3}) \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + 2\cos x$ است. با توجه به شکل مقدار β کدام است؟



$$\frac{3\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

$$\frac{5\pi}{3} \quad (4) \quad \frac{4\pi}{3} \quad (3)$$

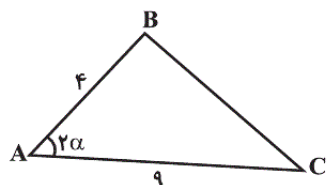
شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = 4$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{3}{5} \quad (3) \quad -\frac{3}{4} \quad (2) \quad \frac{3}{4} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



$$9\sqrt{3} \quad (2) \quad 4\sqrt{3} \quad (1)$$

$$9 \quad (4) \quad 4 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- حاصل عبارت $\frac{\sin 1^\circ + 2\sin 4^\circ + \sin 7^\circ}{\frac{1}{2}\cos 5^\circ}$ کدام است؟

$2\sqrt{3} - 4$ (۴)

$2\sqrt{3} + 4$ (۳)

$\sqrt{3} + 2$ (۲)

$\sqrt{3} - 2$ (۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه 1، - 13960903

۱۳۱- نقطه E درون مربع ABCD به فاصله یکسان از A و D قرار دارد و AD = AE است. اندازه زاویه DBE کدام است؟

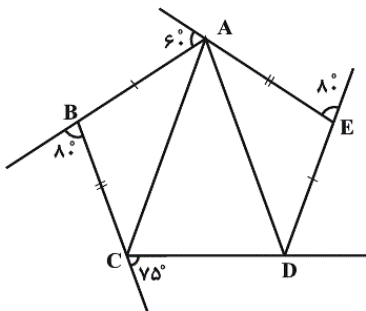
30° (۴)

25° (۳)

20° (۲)

15° (۱)

شما پاسخ نداده اید



۱۳۲- در شکل مقابل، اندازه زاویه DAE چند درجه است؟

۳۵ (۱)

۴۵ (۲)

۳۰ (۳)

۴۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در مثلثی با اضلاع ۷، ۱۱ و ۱۲ واحد، طول ارتفاع نظیر بزرگترین ضلع کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۲)

$3\sqrt{6}$ (۱)

$2\sqrt{10}$ (۴)

۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- مثلث ABC متساوی الاضلاع است و MN در نقطه N و NK در نقطه K به ترتیب بر اضلاع AC و BC عمودند. مساحت مثلث MNK کدام

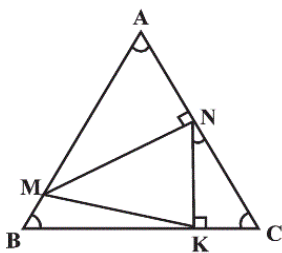
است؟ (AN = ۴, BM = ۲)

$3\sqrt{3}$ (۱)

۲۷ (۲)

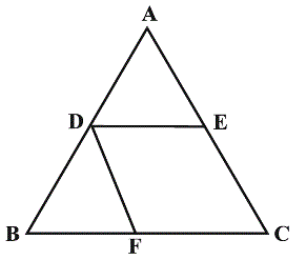
$9\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۴)



شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $DF \parallel AC$ است. اگر $\frac{AE}{EC} = x$ باشد، مقدار $\frac{CF}{BC}$ کدام است؟



(۱) x

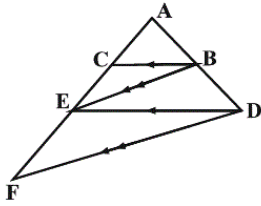
(۲) $\frac{x}{x+1}$

(۳) $\frac{x+1}{2x+1}$

(۴) $\frac{2x}{x+1}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- در شکل مقابل اگر $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر همواره صحیح نیست؟



(۱) $AE \times AB = AC \times AD$

(۲) $AF \times AB = AE \times AD$

(۳) $AE^2 = AC \times AF$

(۴) $BC \times DF = BE \times AD$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطه‌ی P روی ضلع BC طوری قرار دارد که فاصله‌ی آن از ساق AC، ۲ برابر فاصله‌ی آن از ساق AB است.

طول BC چند برابر طول BP است؟

(۴) ۴

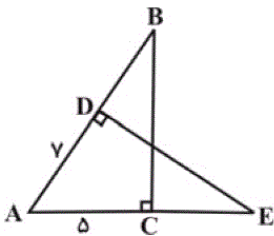
(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۲/۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- در شکل زیر $AC = ۵$ ، $AD = ۷$ و $AB = ۱۳$ است. محیط مثلث ADE کدام است؟



(۱) ۳۰

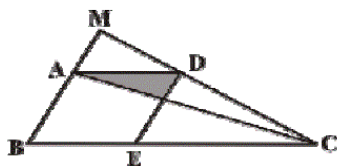
(۲) ۳۶

(۳) ۴۲

(۴) ۴۸

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- در شکل زیر ABED یک متوازی‌الاضلاع است. اگر $AD = ۶$ و $EC = ۸$ ، آنگاه نسبت مساحت مثلث سایه زده به مساحت مثلث ABC کدام است؟



(۱) $\frac{۱۶}{۲۵}$

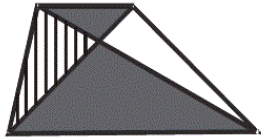
(۲) $\frac{۹}{۱۶}$

(۳) $\frac{۱۶}{۴۹}$

(۴) $\frac{۹}{۴۹}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در ذوزنقه‌ی شکل زیر، نسبت مساحت‌های دو مثلث سایه‌زده ۴ است. مساحت مثلث هاشورخورده، چه کسری از مساحت ذوزنقه است؟



(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{3}{16}$

(۳) $\frac{2}{9}$

(۴) $\frac{5}{16}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه ۱ - گواه، - 13960903

۱۴۱- در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم. اگر زاویه خارجی رأس A از مثلث

ABD برابر 102 درجه باشد، کوچک‌ترین زاویه مثلث ABC چند درجه است؟

(۲) ۲۸

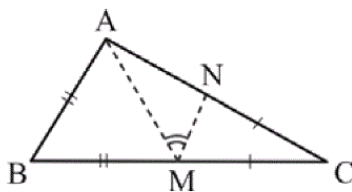
(۱) ۳۴

(۴) ۴۴

(۳) ۴۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی‌الساقین اند و $\widehat{M} = 43^\circ$ ، اندازه زاویه \widehat{BAC} چند درجه است؟



(۱) ۹۳

(۲) ۹۴

(۳) ۹۶

(۴) ۹۷

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- یک متوازی‌الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی مساوی هم تشکیل شده است. اگر مساحت مربع و یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب ۶۴ و

۲۴ واحد مربع باشند، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۲) ۳۶

(۱) ۳۲

(۴) ۵۴

(۳) ۴۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- طول ضلع یک مربع برابر با محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت‌ضلعی

منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت‌ضلعی کدام است؟

(۲) $24\sqrt{2}$

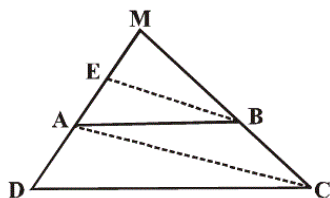
(۱) ۳۲

(۴) $16 + 16\sqrt{2}$

(۳) $24 + 8\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- در دوزنقه ABCD، پاره خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = 7$ و $AE = 3$ باشد، طول MD کدام است؟



(۱) ۱۲

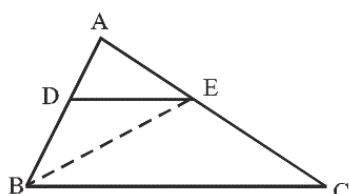
(۲) ۱۲/۲۵

(۳) ۱۲/۵

(۴) ۱۲/۷۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- در مثلث ABC، پاره خط DE موازی ضلع BC است و $AD = \frac{4}{5} DB$. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



(۱) ۲

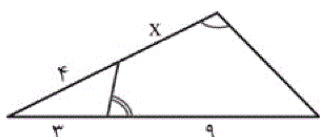
(۲) ۲/۲۵

(۳) ۲/۵

(۴) ۲/۷۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- در شکل مقابل، دو زاویه مقابل چهارضلعی مکمل اند. اندازه X کدام است؟



(۱) ۵

(۲) ۵/۵

(۳) ۶

(۴) ۷/۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر، $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد،

نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

(۲) $\frac{2}{3}$

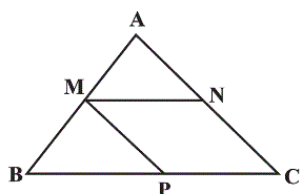
(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- در شکل زیر، $AM = \frac{2}{3} MB$ و چهارضلعی MNCP متوازی الاضلاع است. مساحت متوازی الاضلاع، چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



(۱) ۴۸

(۲) ۵۰

(۳) ۵۴

(۴) ۶۰

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- اندازه قاعده‌های یک دوزنقه ۶ و ۹ واحد و طول پاره‌خطی که دو نقطه وسط قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند، برابر ۱۲ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو

قطر این دوزنقه از وسط قاعده کوچک تر چه قدر است؟

$$۴/۲ \text{ (۲)}$$

$$۳/۶ \text{ (۱)}$$

$$۵/۴ \text{ (۴)}$$

$$۴/۸ \text{ (۳)}$$

شما پاسخ نداده اید

-۸۱

(عزیزاله علی اصغری)

این تابع در تمامی نقاط $a \in \mathbf{R}$ حد دارد و مقدار حد آن برابر با ۱ است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \text{به ازای هر } a \in \mathbf{R}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۱ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(علی اکبر کلاه‌ملکی)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt{e}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \right]^{\frac{n-1}{n+2}}$$

$$= (e^{-1})^1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

گزینه‌های ۱ و ۲ حذف می‌شوند. چون $\frac{1}{e}$ کوچکتر از ۱ است.

اینکه دنباله صعودی است و یا نزولی را می‌توانیم با مقایسه a_1 و مقدار همگرایی دنباله

$$a_1 = \left(\frac{1+1}{1+2} \right)^0 = 1 \quad \text{بفهمیم.}$$

چون $a_1 > L = \frac{1}{e}$ ، پس دنباله نمی‌تواند صعودی باشد و گزینه چهارم صحیح است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

۳

۲

۱

$$a_n = n \log \frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n-1}} = \log \left(\frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n-1}} \right)^n$$

$$b_n = \left(\frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n-1}} \right)^n = \left(1 + \frac{4}{\sqrt[n]{n-1}} \right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(1 + \frac{4}{\sqrt[n]{n-1}} - 1) \times n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{4n}{\sqrt[n]{n-1}} \right)} = e^4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n-1}} \right)^n = \log e^4 = 4 \log e$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیر هوشنگ فمسه)

ابتدا دنباله $a_n - b_n$ را تشکیل می‌دهیم.

$$a_n - b_n = \sqrt[n]{n} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^4 - (\sqrt[n]{n-1})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \left(1 + 4 \frac{a}{n} + 6 \frac{a^2}{n^2} + 4 \frac{a^3}{n^3} + \frac{a^4}{n^4} \right) - \sqrt[n]{n-1} = 17$$

$$\Rightarrow 4a + 1 = 17 \Rightarrow a = 4$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیا مقدس نیاک)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) \cdot (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) \cdot (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \times \frac{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n\pi) \cdot (2)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = 0$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(ممد مصطفی ابراهیمی)

-۸۷

نمودار به ما می‌گوید که اولاً $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ است، ثانیاً مقدار تابع از مقادیر کمتر از

۱ به عدد ۱ نزدیک می‌شود. پس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ است و تابع از مقادیر بیشتر از

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin x} \right] = [1^+] = 1 \quad \text{۱ به عدد ۱ نزدیک می‌شود، در نتیجه:}$$

(دیفرانسیل - سر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۱ تا ۶۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با بررسی هر کدام از دنباله‌ها داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1^{-1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - n} = \infty \text{ (واگرا)}$$

بنابراین دنباله‌های $a_n - b_n$ و $\frac{b_n}{a_n}$ واگرا هستند.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۴

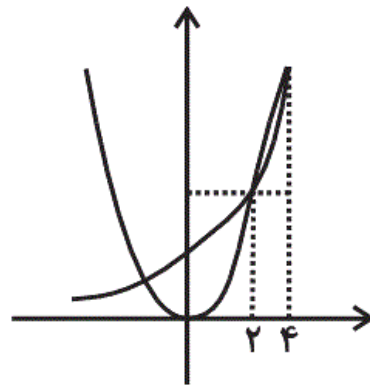
۳

۲

۱

(سیروس نصیری)

-۸۹



دنباله a_n همگرا به ۲ و صعودی است،

$$\text{پس } \frac{3}{5} \leq a_n < 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(a_n) + f(2a_n)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$= [0^+] + [0^-] = 0 - 1 = -1$$

(دیفرانسیل - دنباله و حد و پیوستگی: صفحه‌های ۴۵ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱

(علی اکبر کلاه‌ملکی)

-۹۰

بازه داده شده یک همسایگی به مرکز ۲ و به شعاع $\frac{1}{51}$ می‌باشد. پس طبق فرض

$$n \leq 49 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - 2 \right| \geq \frac{1}{51}, \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3+(-1)^n}{n+a} - 2 \right| \geq \frac{1}{51}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3-2a+(-1)^n}{n+a} \right| \geq \frac{1}{51}$$

الف) فرض کنید n زوج باشد. (با توجه به گزینه‌ها، a عددی بین ۱ و ۲ است)

$$\left| \frac{3-2a+(-1)^n}{n+a} \right| = \frac{4-2a}{n+a} \geq \frac{1}{51} \Rightarrow 204-102a \geq n+a$$

$$\Rightarrow n \leq 204-103a \xrightarrow[n \text{ زوج}]{n \leq 49}$$

$$204-103a \geq 48 \Rightarrow a \leq \frac{156}{103} = 1/51$$

ب) فرض کنید n فرد باشد:

$$\left| \frac{3-2a+(-1)^n}{n+a} \right| = \frac{2a-2}{n+a} \geq \frac{1}{51} \Rightarrow 102a-102 \geq n+a$$

$$\Rightarrow n \leq 101a-102 \xrightarrow[n]{n \geq 49} 101a-102 \geq 49 \Rightarrow a \geq \frac{151}{101} = 1/495$$

از دو بازه به دست آمده برای a اشتراک می‌گیریم:

$$1/495 \leq a \leq 1/51$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

-۱۱۱

(مسئله همدم‌گیری)

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{2} \xrightarrow{x=2} y=0, z=5$$

پس خط مورد نظر از نقطه $(2, 0, 5)$ می‌گذرد و با بردار $u(-2, -3, 4)$ موازی

است.

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-5}{4} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{5-z}{4}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳

۲✓

۱

(سیدامیر ستوده)

-۱۱۲

نقاط را A ، B و C می‌نامیم. چون A ، B و C روی یک خط راست قراردارند، پس بردارهای \overline{AB} و \overline{BC} با هم موازی‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} A = (a, 13, 3) \\ B = (8, 6, 4) \\ C = (2, b, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (8-a, -7, 1) \\ \overline{BC} = (-6, b-6, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-a = -6 \\ b-6 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a+b = 13$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\overline{AB} = \mathbf{u} = (1, -3, 3) \Rightarrow \mathbf{d} : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{3}$$

در محل برخورد خط \mathbf{d} و صفحه XZ ، مقدار $y = 0$ است، پس:

$$y = b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{1} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow a = \frac{5}{3} \\ \frac{-2}{-3} = \frac{c+2}{3} \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + c = \frac{5}{3}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمد صحت‌گر)

- ۱۱۴

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{d} \perp \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d} \perp \mathbf{d}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L \perp L_1 \\ L \perp L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L \parallel L_1 \times L_2$$

چون خط \mathbf{d} بر دو خط \mathbf{d}_1 و \mathbf{d}_2 عمود است، پس بردار هادی آن، موازی ضرب

خارجی بردارهای هادی دو خط \mathbf{d}_1 و \mathbf{d}_2 است. داریم:

$$\begin{aligned} L_1 &= (1, 1, 1) \\ L_2 &= (3, 1, 0) \end{aligned} \Rightarrow L_1 \times L_2 = (-1, 3, -2)$$

پس از $(-1, 3, -2)$ می‌توان به عنوان بردار هادی خط \mathbf{d} استفاده کرد، از

$O(0, 0, 0)$ عبور می‌کند، پس:

$$\mathbf{d} : \left(\frac{x}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2} \right) \Rightarrow \text{تنها نقطه گزینۀ } \mathbf{d} \text{ در } \mathbf{d} \text{ صدق می‌کند.}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

برای محاسبه قرینه یک خط نسبت به صفحه XY ، کافی است ارتفاع آن (Z) را قرینه

کنیم. با تبدیل Z به $(-Z)$ ، معادله خط به صورت $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ خواهد

شد.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

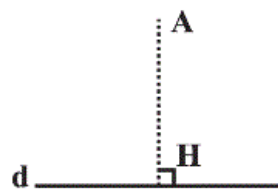
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سامان اسپهرم)



H در معادله پارامتری خط صدق می‌کند و داریم:

$$x = \frac{y}{2} = z = t \Rightarrow H : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \overline{AH}(t-1, 2t, t)$$

از طرفی \overline{AH} بر بردار u عمود است. پس:

$$\overline{AH} \cdot u = 0 \Rightarrow (t-1, 2t, t) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Rightarrow t-1+4t+t=0$$

$$\Rightarrow 6t=1 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow H\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

زاویه بین دو خط برابر است با زاویه بین بردارهای هادی آن دو خط، در نتیجه داریم:

$$A(1, -1, 3), B(3, 0, 2) \Rightarrow v_1 = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, 1, -1)$$

$$x + 1 = \frac{y - 3}{2} = z - 1 \Rightarrow v_2 = (1, 2, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1| |v_2|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2 + 2 - 1}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا فاصله نقطه A را از خط D به دست می آوریم.

$$A_0(0, 0, -3) \in D \Rightarrow \overline{A_0 A}(1, 1, 3)$$

بردار هادی خط D به صورت $u(1, -1, 1)$ است و داریم:

$$\overline{A_0 A} \times u = (4, 2, -2)$$

$$D \text{ از } A \text{ فاصله} = \frac{|\overline{A_0 A} \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 4}}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = 2\sqrt{2}$$

طول پاره خط AA' ، دو برابر فاصله نقطه A از خط D است، پس داریم:

$$|AA'| = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه : صفحه های ۳۵ تا ۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

معادله خط مورد نظر به صورت $\Delta \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ است. پس :

$$P_0(0,0,0) \in \Delta \Rightarrow \begin{cases} \overline{P_0P} = (2, m, 1) \\ \mathbf{u} = (0, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \overline{P_0P} \times \mathbf{u} = (m-1, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ از } P \text{ فاصله} = \frac{|\overline{P_0P} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(m-1)^2 + 4 + 4}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 + 8 = 24 \Rightarrow (m-1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow m-1 = \pm 4 \xrightarrow{m > 0} m = 5$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه؛ صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴

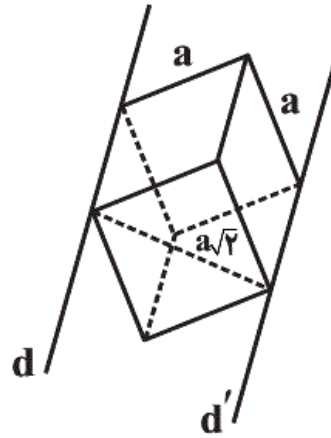
۳

۲

۱

فاصله دو خط موازی مورد نظر، برابر طول قطر وجه مکعب است. پس اگر یال مکعب a

باشد، قطر آن $a\sqrt{2}$ است.



$$a\sqrt{2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = a^3 = \frac{13\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{26}}{4}$$

$$\frac{V}{\sqrt{26}} = \frac{13}{4}$$

پس:

(هندسه تحلیلی - فط و صفه: صفه‌های ۳۷ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، - 13960903

- ۱۲۱

(آریا حاج‌ملک)

اگر فرض کنیم این درخت، رأس از درجات غیر از ۱ و ۵ نداشته باشد، آن‌گاه دنباله درجات آن به صورت ۱، ۱، ...، ۱، ۵ و ۵ است و داریم:

$$5 + 5 + \underbrace{1 + \dots + 1}_x = 2(2 + x - 1) \Rightarrow 10 + x = 2 + 2x \Rightarrow x = 8$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱

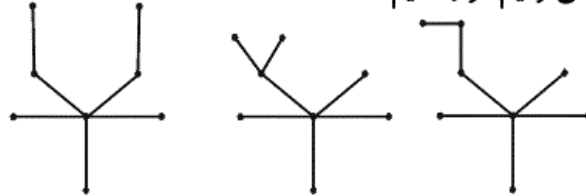
میانگین درجات رئوس برابر است با $\frac{2q}{p}$ ، بنابراین داریم:

$$\frac{2q}{p} = \frac{7}{4} \Rightarrow 7p = 8q \Rightarrow q = \frac{7}{8}p$$

همچنین در هر درخت $p = q + 1$ می‌باشد، پس:

$$p = q + 1 \Rightarrow p = \frac{7}{8}p + 1 \Rightarrow p - \frac{7}{8}p = 1 \Rightarrow p = 8, q = 7$$

۵ یال از این ۷ یال برای ساختن رأس از درجه ۵ استفاده می‌شود و ۲ یال دیگر را به ۳ حالت زیر می‌توانیم قرار دهیم:



(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد مسیرها بین رئوس متمایز یک درخت، برابر $\binom{p}{2}$ است. از طرفی در هر درخت به تعداد $q = p - 1$ ، مسیر به طول ۱ وجود دارد. پس حداکثر تعداد مسیرهای به طول ۲ در یک گراف همبند و بدون دور (درخت) مرتبه ۸، برابر است با:

$$\binom{8}{2} - (8 - 1) = 28 - 7 = 21$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا مجموع درایه‌ها را می‌نویسیم:

$$4 + 2a + 2b = 2q \xrightarrow[q=p-1]{\text{درخت}} a + b + 3 = p$$

$$a + b = 1$$

از طرفی ماتریس 4×4 است، پس $p = 4$ و در نتیجه:

اگر $b = 0$ باشد، گراف ناهمبند می‌شود که درخت نیست. بنابراین:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

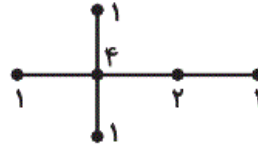
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نمودار این گراف به صورت زیر است، که به وضوح G یک درخت است. پس نمی‌تواند دارای دور باشد.



نکته: اعداد روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت یک گراف ساده، درجه رأس‌های گراف‌اند.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۲۱)

۴

۳

۲

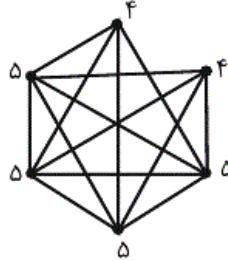
۱

درایه‌های روی قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت یک گراف، درجات رئوس آن هستند

و چون حاصل جمع این درایه‌ها ۲۸ است، پس: $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q = 28$ و لذا

$q = 14$. گراف مورد نظر از مرتبه ۶ است و یک یال

کمتر از گراف کامل K_6 دارد.



بنابراین گراف مورد نظر دارای ۴ رأس از درجه ۵ است.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد، آنگاه درایه‌های قطر اصلی A^2 همگی برابر با $p-1$ هستند. بنابراین گراف داده شده گراف کاملی از مرتبه ۹ است

که تعداد یال‌های آن $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ و تعداد یال‌های درخت هم مرتبه‌اش

$8 = 9 - 1$ است و اختلاف بین تعداد یال‌های این دو برابر است با: $36 - 8 = 28$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

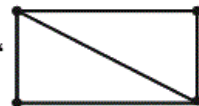
(نویز میبری)

چون تعداد صفرها کم‌ترین است، پس به جز درایه‌های قطر اصلی که صفر هستند، درایه‌های باقی مانده در ماتریس مجاورت بیش‌ترین تعداد یک‌ها را به ما نشان می‌دهند. هر چه تعداد یک‌ها بیش‌تر باشد نشان می‌دهد که گراف تعداد یال (مقدار q) بیش‌تری دارد و این زمانی رخ می‌دهد که گراف همبند است. بیش‌ترین تعداد یال زمانی پیش می‌آید که یا یک گراف کامل K_p داشته باشیم یا تعداد محدودی یال از گراف K_p حذف کنیم. در اینجا با توجه به اینکه $p + q = 9$ است، پس باید یک گراف

K_4 که اندازه‌اش برابر $\frac{4(4-1)}{2} = 6$ است ایجاد کنیم، ولی در این صورت

$4 + 6 \neq 9$ ، پس یک یال از K_4 حذف می‌کنیم که تبدیل می‌شود به گراف

، در نتیجه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی A^2 برابر



می‌شود با: $2q = 2 \times 5 = 10$.

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سروش موئینی)

با توجه به ماتریس مجاورت گراف، رأس‌های a ، b ، c ، d فقط می‌توانند با هم در ارتباط باشند. بین این رأس‌ها حداکثر ۶ یال داریم. رئوس e و f هم فقط با هم می‌توانند ارتباط داشته باشند، پس بین این دو رأس هم حداکثر ۱ یال دیگر داریم.

$$q_{\max} = 6 + 1 = 7$$

بنابراین:

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علیرضا سیف)

فاصله هر دو رأس گراف برابر یک است؛ یعنی همه رئوس مجاورند و در نتیجه گراف کامل خواهد

بود. در بین گزینه‌ها، تنها ۳۶ می‌تواند تعداد یال‌های یک گراف کامل باشد. $\binom{9}{2} = 36$

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه ۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - x + 1}{(x-1)(x+3)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(x+3)} > 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+3)} > 0$$

صورت همواره نامنفی است، پس فقط مخرج باید مثبت باشد.

$$(x-1)(x+3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|cccc} x & & -3 & & 1 \\ \hline \text{مخرج} & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

پس مجموعه جواب این نامعادله شامل ۱، ۰، -۱، -۲، و -۳ نمی‌باشد.

(ریاضی ۲ - توابع خاص - نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۱۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمرب بفرمایید)

-۹۲

چون $P(x)$ بر $x-2$ بخش پذیر است، پس:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow P(2)=0 \Rightarrow 4a-2b-1=0$$

چون باقی مانده $P(x)$ بر $x+1$ برابر -۲ است، پس:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow P(-1)=-2 \Rightarrow -a+b-1=-2 \Rightarrow -a+b=-1$$

$$\begin{cases} 4a-2b=1 \\ -2a+2b=-2 \end{cases} \Rightarrow 6a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{6} \Rightarrow b=-\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow Q(x)=-\frac{x^2}{6}-\frac{7}{6}x$$

پس باقی مانده $Q(x)$ بر $x-1$ برابر است با:

$$R=Q(1)=-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$

(مسابان - مسابان ببری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$R(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x-1)(x+1)$$

تنها عامل مشترک $(x+1)$ است. پس $x+1$ ب.م.م است که به ازای $x=1$ برابر ۲ می‌باشد.

(مسابان - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد بصیرایی)

-۹۴

ابتدا ک.م.م سه عدد ۶۰، ۷۲ و ۴۸ را به دست می‌آوریم:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5, \quad 48 = 2^4 \times 3, \quad 72 = 2^3 \times 3^2$$

$$\text{دقیقه ک.م.م} = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$$

$$720 \div 60 = 12$$

پس هر ۱۲ ساعت یک بار سه زنگ با هم به صدا در می‌آیند. یعنی یک بار دیگر در ساعت ۸ شب با هم به صدا در می‌آیند.

(مسابان - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیر هوشنگ فمسه)

-۹۵

$$\frac{5}{11} = 0.454545\dots \text{ داریم } 11 \text{ بر } 5$$

به عبارتی جمله اول دنباله 0.4 ، جمله دوم 0.45 ، جمله سوم 0.454 و جمله چهارم 0.4545 می‌باشد.

$$0.4545 - 0.45 = 0.0045 = 45 \times 10^{-4}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی دارابی نیا)

اگر دو جمله‌ای $(x^2 - 2x)^7$ را بسط دهید جمله شامل x^{12} آن به صورت زیر است:

$$\binom{7}{5}(x^2)^5(-2x)^2 \longrightarrow$$

$$\text{ضریب عددی} = \binom{7}{2}(-2)^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} \times 4 = \frac{7 \times 6}{2} \times 4 = 84$$

(مسابان - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(جمال‌الربین حسینی)

$$\frac{(x^2 + 2x) + (x^2 + x)}{2} = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow 0, 1, 2 \Rightarrow d = 1 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 1 \Rightarrow 3, \frac{5}{2}, 2 \Rightarrow d = -\frac{1}{2} & \text{قق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{19} = a_1 + 18d = 3 + 18\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 - 9 = -6$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(میلاد منصوری)

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + \dots + a_{12} &= (a_1 + d) + (a_3 + d) + \dots + (a_{11} + d) \\ &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{11}) + 6d = 7d + 6d = 13d \end{aligned}$$

$$a_3 + a_5 + \dots + a_{13} = 7d + 12d = 19d \quad \text{به طریق کاملاً مشابه:}$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با:

$$\frac{13d}{19d} = \frac{13}{19}$$

(مسابان - مسابقات چبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$a_n = 3^{-n} \cos^n\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \left(\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{3}\right)^n \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots =$$

$$= (0) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (0) + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + (0) + \left(-\frac{1}{3}\right)^6 + \dots =$$

$$\underbrace{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots}_{|q=\frac{1}{9}| < 1} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{8}$$

(مسئله - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهمدرمستفی ابراهیمی)

- ۱۰۰

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 4$$

می‌دانیم $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$ و $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{m+2}{2}$ است:

$$\frac{m+2}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 4 \rightarrow \frac{m+2}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow m+2 = 9 \Rightarrow m = 7$$

اگر $m = 7$ باشد، $\Delta > 0$ ، $\frac{-b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ است. پس معادله دو ریشه‌ی

مثبت دارد و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ تعریف شده است.

(مسئله - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴

۳

۲

۱

(سیروس نهیری)

- ۱۰۱

چون دهانه سهمی $f(x) = -3x^2 + ax + 3$ روبه پایین است و $x = 1$ بین

جواب‌های x_1 و x_2 قرار دارد، پس کافی است $f(1) > 0$ و $\Delta > 0$ باشد.

$$f(1) = -3 + a + 3 > 0 \Rightarrow a > 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 + 36 > 0 \Rightarrow \text{همواره درست است}$$

(مسئله - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴

۳

۲

۱

مستطیل روبرو را در نظر بگیرید، داریم:

$$\begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \end{array} \quad 2(x+y) = P \Rightarrow x+y = \frac{P}{2} \Rightarrow y = \frac{P}{2} - x$$

$$S = xy = x\left(\frac{P}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{P}{2}x$$

برای بدست آوردن ماکزیمم مساحت، می‌توانیم $\frac{P^2}{16}$ را اضافه و کم کنیم تا S را مربع کامل کنیم یا می‌توانیم از مختصات رأس تابع درجه دوم استفاده کنیم. یعنی:

$$S_{\text{Max}} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - 0}{4(-1)} = \frac{P^2}{16}$$

(حسابان - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(سیروس نصیری)

با فرض $\left|x + \frac{1}{x}\right| = t$ معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$t^2 - 4/1t + 4/2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-2/1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=2/1 \end{cases}$$

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x=1 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| = 2/1 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2/1 \quad (1) \\ x + \frac{1}{x} = -2/1 \quad (2) \end{cases}$$

چون برای هر $x \neq 0$ داریم $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ ، پس هر کدام از معادلات (۱) و (۲)

دو ریشه دارند. پس مجموعاً معادله ۶ جواب دارد.

(حسابان - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(کیا مقدس نیاک)

برای آنکه تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ از ناحیهٔ سوم نگذرد، باید:

$$a > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \quad (1)$$

$$\frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{m}{m+1} \geq 0 \xrightarrow{m+1 > 0} m \geq 0$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{3m-1}{m+1} > 0 \xrightarrow{m+1 > 0} 3m-1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

و یا باید $a > 0$ و $\Delta < 0$:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (3m-1)^2 - 4m(m+1) < 0 \Rightarrow 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} < m < 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

بنابراین طبق بازه‌های به دست آمده، بازهٔ جواب $m > 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$ است.

(مسئله - مقاسبات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی شهرابی)

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{3 \cos(\pi + x) - \sin(3\pi - x)} = \frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-\cos x + 2 \sin x}{-3 \cos x - \sin x} = \frac{-3}{5} \Rightarrow -5 \cos x + 10 \sin x = 9 \cos x + 3 \sin x$$

$$\Rightarrow \sin x = 2 \cos x \Rightarrow \tan x = 2$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x = -\frac{1}{2}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

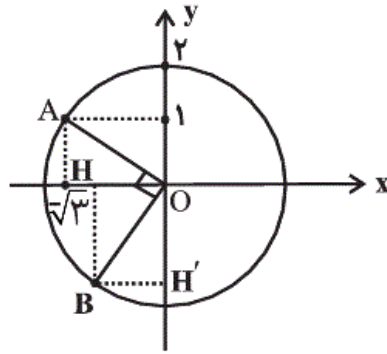
۱

(ممد بهیرایی)

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r \xrightarrow{r=2} P = 4\pi$$

$$\text{AB کمان} = \pi$$

بنابراین کمان AB برابر $\frac{1}{4}$ محیط دایره است، پس $\widehat{AB} = 90^\circ$



با توجه به شکل دو مثلث OAH و OBH' هم

نهشتند، پس $|OH'| = |OH| = \sqrt{3}$ و

$|BH'| = |AH| = 1$ که با توجه به آن که B

در ناحیه سوم قرار دارد، داریم: $B(-1, -\sqrt{3})$

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد مصطفی ابراهیمی)

اول اینکه $f(0) = 3$ می‌باشد. پس:

$$f(x) = a + 2 \cos x \Rightarrow f(0) = a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $f(x) = 1 + 2 \cos x$ بدست می‌آید.

α و β جواب‌های معادله $1 + 2 \cos x = 0$ هستند.

$$1 + 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

در مقادیر مثبت x ، اولین جایی که کسینوس $-\frac{1}{2}$ می‌شود در $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ و دومین

جا هم در $\beta = \frac{4\pi}{3}$ است.

پس β که دومین ریشه است، برابر $\frac{4\pi}{3}$ می‌شود.

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$1 + \tan^2 2x = \frac{1}{\cos^2 2x} \rightarrow 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 2x}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 2x}$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{3}{5}$$

با توجه به $\tan x = \frac{-1}{2}$ داریم:

$$k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x < 2k\pi$$

$$\Rightarrow \cos 2x > 0 \text{ در ناحیه چهارم قرار دارد.}$$

پس $\cos 2x = \frac{3}{5}$ قابل قبول است.

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱

(معرفی ملازماتی)

-۱۰۹

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 \times \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \times 9 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱

با تبدیل جمع به ضرب صورت عبارت داریم:

$$\sin 10^\circ + \sin 70^\circ = 2 \sin \frac{10^\circ + 70^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 70^\circ}{2} = 2 \sin 40^\circ \cos 30^\circ$$

$$\frac{\sin 10^\circ + 2 \sin 40^\circ + \sin 70^\circ}{\frac{1}{2} \cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ (\cos 30^\circ + 1)}{\frac{1}{2} \cos 50^\circ}$$

$$\underline{\underline{\cos 50^\circ = \sin 40^\circ}} 2(\cos 30^\circ + 1) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = 2\sqrt{3} + 4$$

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

 ۴

 ۳

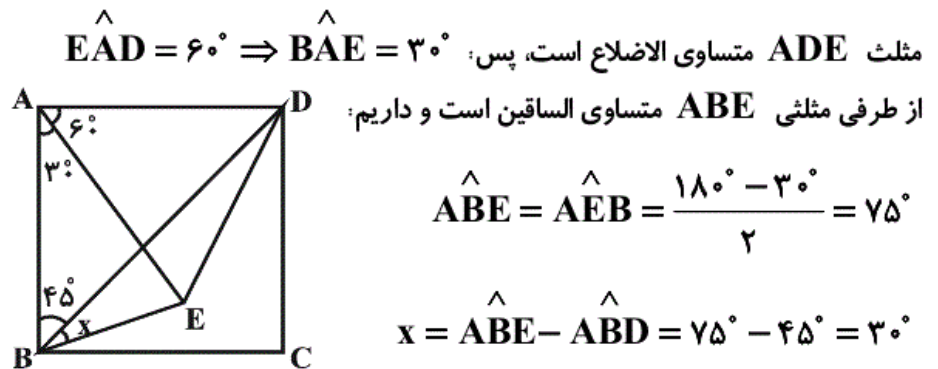
 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه ۱، - 13960903

- ۱۳۱

(رضا عباسی اصل)



(هندسه ۱ - هندسه و استدلال: صفحه‌های ۱۱ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنید $\hat{DAE} = x$ ، $\hat{ADE} = y$. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AE = BC \\ \hat{AED} = \hat{ABC} = 100^\circ \\ DE = AB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض)}} \triangle ADE \cong \triangle ABC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{BAC} = y \\ \hat{ACB} = x \\ AC = AD \end{array} \right.$$

بنا به زاویه خارجی داریم $x + y = 80^\circ$ و می توان نوشت:

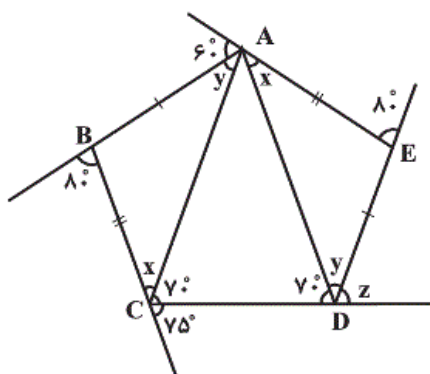
$$60^\circ + y + \hat{CAD} + x = 180^\circ \Rightarrow \hat{CAD} = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$$

مثلث ACD متساوی الساقین است. پس

$$\hat{ADC} = \hat{ACD} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$$

اما مجموع اندازه های زاویه های خارجی پنج

ضلعی $ABCDE$ برابر 360° است. پس:



$$60^\circ + 80^\circ + 75^\circ + 80^\circ + z = 360^\circ \Rightarrow z = 65^\circ$$

$$\Rightarrow y = 45^\circ$$

$$x + y = 80^\circ \Rightarrow x = 80^\circ - 45^\circ = 35^\circ$$

(هندسه ۱ - هندسه و استرلا: صفحه های ۱۱ تا ۲۲)

۴

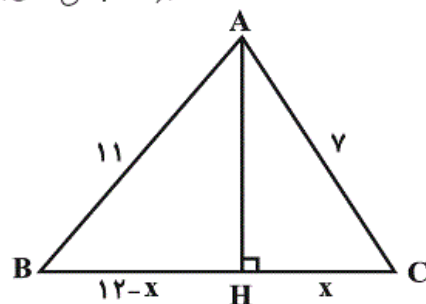
۳

۲

۱ ✓

بنا به قضیه فیثاغورس در مثلث های

ABH و ACH داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle AHC : AH^2 = 49 - x^2 \\ \triangle ABH : AH^2 = 121 - (12-x)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 49 - x^2 = 121 - (12-x)^2$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$AH^2 = 49 - x^2 = 49 - 9 = 40 \Rightarrow AH = 2\sqrt{10}$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه های ۵۷ تا ۵۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عباس اسدی امیرآبادی)

$$\widehat{AMN} = 30^\circ \xrightarrow{\text{ضلع روبه رو به زاویه } 30^\circ \text{ در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است}} MA = 2(4) = 8$$

$$MN^2 = AM^2 - AN^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow MN = 4\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{KNC} = 30^\circ \\ AC = AB = 8 + 2 = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow NC = 6 \Rightarrow KC = 3$$

$$NK^2 = NC^2 - KC^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow NK = 3\sqrt{3}$$

$$\widehat{MNK} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} MN \times NK \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ تا ۶۵)

۴

۳✓

۲

۱

(علی ارجمند)

- ۱۳۵

$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel FC \\ DF \parallel EC \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } DECF \Rightarrow FC = DE \quad (*)$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \xrightarrow{(*)} \frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{x}{x+1}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۴

۳

۲✓

۱

(علی ارجمند)

- ۱۳۶

$$\triangle AED : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad (1) \Rightarrow AE \times AB = AC \times AD$$

$$\triangle AFD : BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DF} \quad (2) \Rightarrow AF \times AB = AE \times AD$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC \times AF \\ \frac{BC}{DE} = \frac{BE}{DF} \Rightarrow BC \times DF = BE \times DE \end{cases}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۴✓

۳

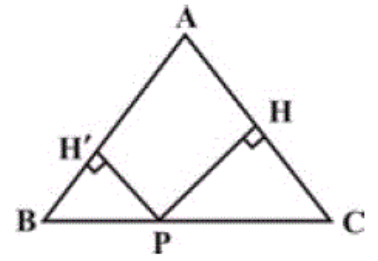
۲

۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow$ طبق فرض $\triangle ABC$ متساوی الساقین است

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\hat{H}=\hat{H}'} \triangle HPC &\sim \triangle H'BP \\ \Rightarrow \frac{HP}{H'P} &= \frac{PC}{BP} \xrightarrow{HP=2H'P} \frac{2}{1} = \frac{PC}{BP} \\ \Rightarrow \frac{2+1}{1} &= \frac{PC+BP}{BP} \Rightarrow 3 = \frac{BC}{BP} \Rightarrow BC = 3BP \end{aligned}$$



(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 - AC^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow BC = 12$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = 13 + 5 + 12 = 30$$

$$\triangle ABC, \triangle ADE \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{ADE} = \hat{ACB} \end{cases} \xrightarrow{(ز)} \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\Rightarrow k = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\triangle ABC \text{ محیط}}{\triangle ADE \text{ محیط}} = k \Rightarrow \frac{30}{\triangle ADE \text{ محیط}} = \frac{5}{7} \Rightarrow \triangle ADE \text{ محیط} = 42$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۲)

۴

۳ ✓

۲

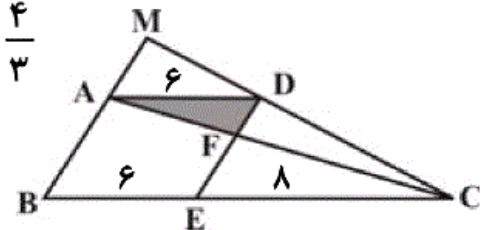
۱

(نوید میری)

دو مثلث $\triangle AFD$ و $\triangle FEC$ متشابه‌اند، داریم:

$$k_1 = \frac{EC}{AD} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad (\text{نسبت تشابه})$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle ADF}} = k_1^2 = \frac{16}{9} \quad (*)$$



دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle FEC$ هم متشابه‌اند، پس خواهیم داشت:

$$k_2 = \frac{EC}{BC} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{49} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} \frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{49} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{49}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۲)

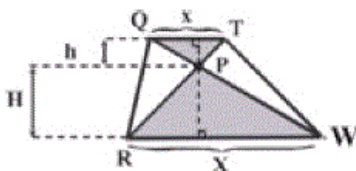
۴ ✓

۳

۲

۱

توجه کنید که دو مثلث سایه خورده، به حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابهند و چون



نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر ۴ است، پس نسبت تشابه آن‌ها $\sqrt{4} = 2$ است. نسبت اضلاع و ارتفاع‌های نظیر در مثلث‌های متشابه، برابر با نسبت تشابه است،

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = 2 \Rightarrow H = 2h \\ \frac{X}{x} = 2 \Rightarrow X = 2x \end{cases}$$

پس مطابق شکل:

$$\begin{aligned} \frac{S(PQR)}{S(QRWT)} &= \frac{S(QRT) - S(PQT)}{S(QRWT)} = \frac{\frac{1}{2}(h+H)x - \frac{1}{2}hx}{\frac{1}{2}(x+X)(h+H)} \\ &= \frac{(h+H)x - hx}{(x+X)(h+H)} = \frac{(h+2h)x - hx}{(x+2x)(h+2h)} = \frac{2hx}{9hx} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۰۲)

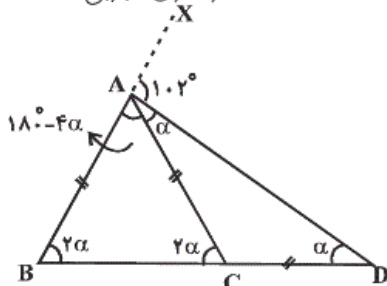
۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا شکلی از مسأله ترسیم می‌کنیم. در شکل رسم شده فرض می‌کنیم $\hat{A}DB = \alpha$ ، داریم:



$\hat{A}CD \Rightarrow \hat{C}AD = \hat{A}DB = \alpha$ متساوی الساقین

$\hat{A}CB = \alpha + \alpha = 2\alpha = \hat{A}BC$ زاویه خارجی

$\Rightarrow \hat{B}AC = 180^\circ - (2\alpha + 2\alpha) = 180^\circ - 4\alpha$

$\hat{D}AX = 102^\circ \Rightarrow 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha + \alpha) = 102^\circ$ مطابق شکل، داریم:

$\Rightarrow 3\alpha = 102^\circ \Rightarrow \alpha = 34^\circ$

بنابراین زاویه‌های مثلث ABC، عبارتند از:

$$\begin{cases} \hat{A} = 180^\circ - 4 \times 34^\circ = 44^\circ \\ \hat{B} = \hat{C} = 2 \times 34^\circ = 68^\circ \end{cases}$$

(هندسه ۱ - هندسه و استرلا: صفحه‌های ۱۱ تا ۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

مطابق شکل، می‌توان نوشت:

$$\hat{A}MB + \hat{A}MN + \hat{N}MC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} + 43^\circ + \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 43^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 0 \Rightarrow 43^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}AC = 94^\circ$$

(هندسه ۱ - هندسه و استدلال: صفحه‌های ۱۱ تا ۲۲)

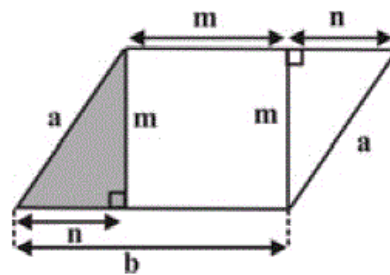
۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل و با توجه به فرض داریم:



$$m^2 = 64 \Rightarrow m = 8 \quad \text{مساحت مربع}$$

$$\frac{mn}{2} = 24 \xrightarrow{m=8} n = 6 \quad \text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه}$$

در مثلث قائم‌الزاویه سایه‌خورده، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$a = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

پس طول اضلاع متوازی‌الاضلاع برابر $a = 10$ و $b = m + n = 14$ است و در

نتیجه:

$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = 2(a + b) = 2 \times 24 = 48$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه فیثاغورس: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۳ و ۵۷)

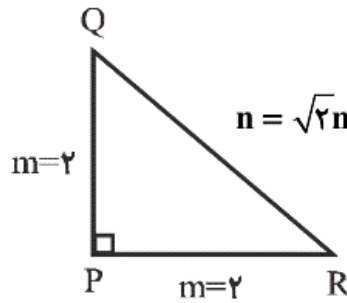
۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا طول ضلع مربع را به دست می آوریم:

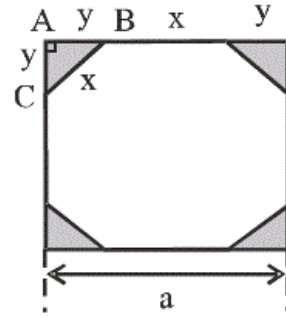


$$\Delta PQR \text{ محیط} = 2m + n = 4 + 2\sqrt{2}$$

یعنی طول ضلع مربع مورد نظر $a = 4 + 2\sqrt{2}$ است.

در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC، داریم:

$$x = \sqrt{2} y$$



$$\text{از طرفی: } a = x + 2y \xrightarrow{x = \sqrt{2}y} a = \sqrt{2}y + 2y \xrightarrow{a = 4 + 2\sqrt{2}}$$

$$4 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 2)y \Rightarrow y = 2$$

$$S = a^2 - 4\left(\frac{1}{2}y^2\right) = (4 + 2\sqrt{2})^2 - 2(2)^2$$

$$= 16 + 16\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه فیثاغورس؛ مشابه تمرین ۲۰ صفحه ۶۷)

۴

۳

۲

۱

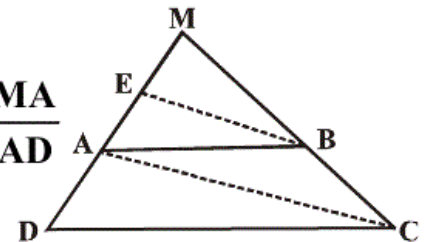
طبق قضیه تالس می توان نوشت: $(ME = x)$

$$\left. \begin{aligned} BE \parallel AC &\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel DC &\Rightarrow \frac{MA}{AD} = \frac{MB}{BC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x+3}{7} \Rightarrow x = 2/25$$

$$MD = ME + AE + AD = 2/25 + 3 + 7 = 12/25$$

(هندسه ۱ - تشابه؛ صفحه های ۷۷ تا ۸۳)



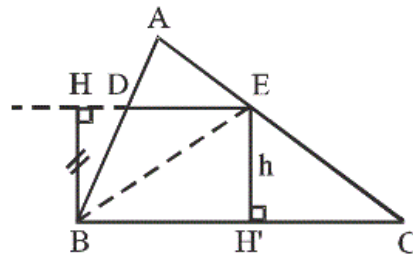
۴

۳

۲

۱

مطابق شکل از آنجا که $DE \parallel BC$ ، داریم $BH = EH' = h$ ، پس:



$$\frac{S(\triangle EBC)}{S(\triangle EBD)} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot BC}{\frac{1}{2}h \cdot DE} = \frac{BC}{DE} \quad (*)$$

از طرفی: $AD = \frac{4}{5}DB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB + AD} = \frac{4}{5 + 4} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{4}{9} \quad (**)$$

نتیجه‌ی تالس: $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \xrightarrow{(**)} \frac{DE}{BC} = \frac{4}{9}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S(\triangle EBC)}{S(\triangle EBD)} = \frac{BC}{DE} = 2.25$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)

۴

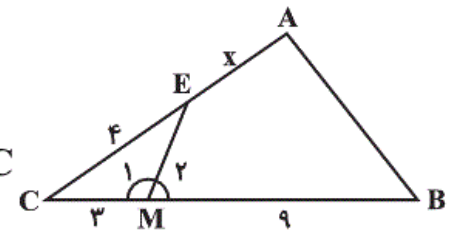
۳

۲ ✓

۱

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{M}_\gamma = 180^\circ \\ \hat{M}_\gamma + \hat{M}_\beta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_\gamma = \hat{A}$$

$$\begin{cases} \hat{M}_\gamma = \hat{A} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle ABC \sim \triangle MEC$$



$$\Rightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{CM}{AC} \Rightarrow \frac{4}{3+9} = \frac{3}{x+4} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{3}{x+4} \Rightarrow x = 5$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۲)

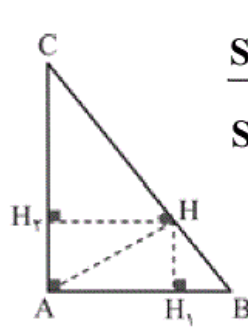
۴

۳

۲

۱ ✓

در مثلث قائم الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند. یعنی مثلث‌های ABH و ACH با هم متشابهند.



$$\frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC)} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ABC) - S(\triangle ABH)} = \frac{1}{5-1}$$

$$\Rightarrow \frac{S(\triangle ABH)}{S(\triangle ACH)} = \frac{1}{4}$$

۴

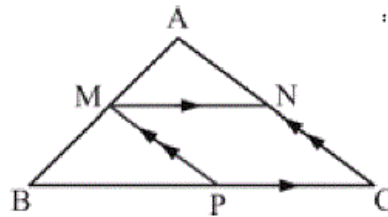
۳

۲

۱ ✓

(سراسری خارج از کشور تهری - ۱۹)

از متوازی‌الاضلاع بودن چهار ضلعی $MNCP$ ، نتیجه می‌شود که $MN \parallel BC$ و $PM \parallel CA$ ، داریم:



$$AM = \frac{2}{3}MB$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM}{MB + AM} = \frac{2}{3+2} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{MN \parallel BC} \frac{S(\triangle AMN)}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0.16$$

$$\Rightarrow S(\triangle AMN) = 0.16 S(\triangle ABC) \quad (*)$$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{BM}{BM + AM} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{PM \parallel CA} \frac{S(\triangle BMP)}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0.36$$

$$\Rightarrow S(\triangle BMP) = 0.36 S(\triangle ABC) \quad (**)$$

$$S(MNCP) = S(\triangle ABC) - S(\triangle AMN) - S(\triangle BMP) \xrightarrow{(*), (**)}$$

$$S(MNCP) = S(\triangle ABC) - 0.16 S(\triangle ABC) - 0.36 S(\triangle ABC)$$

$$\Rightarrow S(MNCP) = 0.48 S(\triangle ABC)$$

(هنر سه ۱ - تشابه : صفحه‌های ۸۳ تا ۱۰۲)

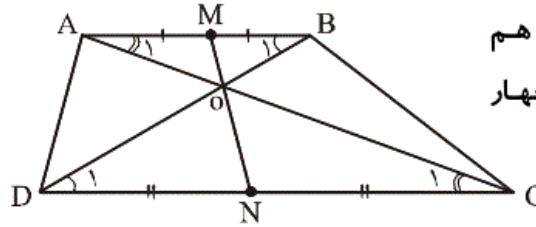
۴

۳

۲

۱ ✓

نکته: در هر دوزنقه، محل برخورد قطرها، روی پاره‌خطی که وسط دو قاعده را به هم وصل می‌کند، قرار دارد. طبق فرض، چهار ضلعی ABCD دوزنقه است، پس:



$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \xrightarrow{\text{مورب } BD} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow[\text{زاویه‌ها}]{\text{تساوی}} \triangle AOB \sim \triangle COD$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های متناظر، برابر نسبت تشابه است، بنابراین:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{OM}{MN - OM}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{OM}{12 - OM}$$

$$\Rightarrow 24 - 2OM = 3OM \Rightarrow OM = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۷)

۴

۳

۲

۱