



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

۹۱- در یک دنباله هندسی با جمله اول ناصفر، جمله چهارم، میانگین جملات دوم و سوم است. قدرنسبت این دنباله کدام می تواند باشد؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم چند جمله‌ای $ax - 1 - 3x^2 + 5x^4$ بر $x + 1$ برابر با ۷ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵
(۳) ۶ (۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۹۳- معادله درجه دومی که جواب‌هایش از نصف جواب‌های معادله $x^2 + 4x - 1 = 0$ ، یک واحد کم‌تر باشد، کدام است؟

- (۱) $4x^2 + 16x - 5 = 0$ (۲) $4x^2 + 16x + 11 = 0$
(۳) $4x^2 - 16x - 5 = 0$ (۴) $4x^2 - 16x + 11 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- تعداد جواب‌های معادله $x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
(۳) ۳ (۴) ۴

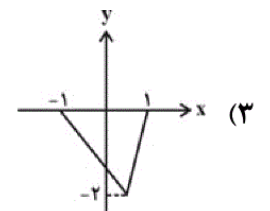
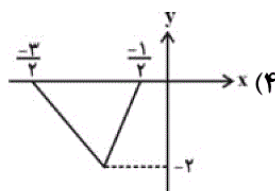
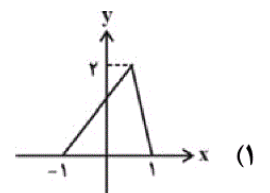
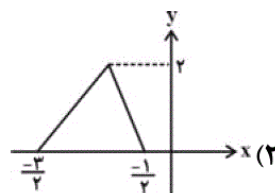
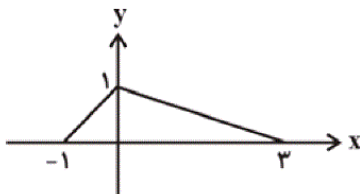
شما پاسخ نداده اید

۹۵- نامعادله $|x - 2\sqrt{x}| - 3 < 0$ چند جواب در مجموعه اعداد صحیح دارد؟

- (۱) ۸ (۲) ۹
(۳) ۱۰ (۴) ۱۱

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر نمودار تابع f مانند شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = -2f(-2x + 1)$ کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۷- اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = x$ و $D_f = (-\infty, -1]$ باشد، آنگاه ضابطه $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $-1 - \sqrt{1+x}$ (۲) $1 + \sqrt{1+x}$ (۳) $1 - \sqrt{x+1}$ (۴) $-1 + \sqrt{1+x}$

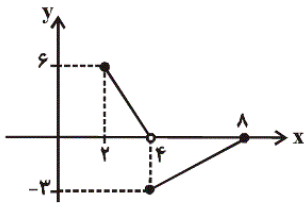
شما پاسخ نداده اید

۹۸- تابع $f(x) = x^4 - 2x^2$ با شرط $0 \leq x \leq 1$ مفروض است. ضابطه تابع وارون آن کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}$ (۲) $f^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{x+1}-1}$
 (۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{1-\sqrt{x+1}}$ (۴) $f^{-1}(x) = -\sqrt{\sqrt{x+1}+1}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \frac{f \circ f^{-1}(x)}{f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟



- (۱) $[2, 6]$ (۲) $[-3, 6]$
 (۳) $[4, 6]$ (۴) $[4, 8]$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- مقدار عبارت $\frac{\sin 9^\circ}{\sin 3^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\cos 3^\circ}$ چند برابر $\cos 6^\circ$ است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- حاصل $\sin\left(2 \cos^{-1} \frac{1}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$
 (۳) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- انتهای کمان جوابهای معادله $\tan x \tan 2x = 1$ بر روی دایره مثلثاتی، رئوس کدام چند ضلعی است؟

- (۱) مثلث (۲) مربع
 (۳) مستطیل (۴) شش ضلعی

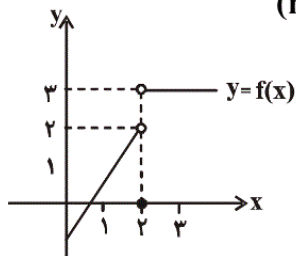
شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- در شکل زیر، اگر $m \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + n \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{m}{n}$ کدام است؟ ($n \neq 0$)



(۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $-\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$
(۳) $-\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{\sin(x-1)\tan(2x-2)}$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) صفر

(۱) وجود ندارد

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- تابع باضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{3x - 1} & ; x > \frac{1}{3} \\ b & ; x = \frac{1}{3} \\ \lfloor \frac{-1}{\sqrt{3x}} \rfloor + c & ; x < \frac{1}{3} \end{cases}$ در $x = \frac{1}{3}$ پیوسته است. مقدار $9c + 1$ کدام است؟ ($\lfloor \cdot \rfloor$ ، نماد جزء صحیح است).

(۴) ۲۰

(۳) ۲۱

(۲) ۱۰

(۱) ۱۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & ; x > 1 \\ x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2f(1+h) - 3f(1-h)}{h}$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) -۵

(۲) ۵

(۱) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- مشتق وارون تابع $f(x) = x^5 + \sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ای به عرض ۱ روی نمودار تابع وارون کدام است؟

(۴) $\frac{3}{16}$

(۳) $\frac{16}{3}$

(۲) $\frac{3}{17}$

(۱) $\frac{17}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- معادله خط قائم بر منحنی به معادله $y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ ، در نقطه‌ای به طول $x = 3$ واقع بر آن، کدام است؟

(۴) $3y + 8x = 27$

(۳) $8y + 3x = 17$

(۲) $3y - 8x = -21$

(۱) $8y - 3x = -1$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- اگر $f(x) = |3x - 5|$ و $f(x) = f\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ باشد، مشتق y به ازای $x = 1$ کدام است؟

(۴) -۱۵

(۳) ۳

(۲) ۱۵

(۱) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- از برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، مربعی به ضلع $3\sqrt{2}$ حاصل شده است. اگر طول این مستطیل دو برابر عرض آن

باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) ۷۲
(۲) ۶۴
(۳) ۶۰
(۴) ۵۶

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر S مکان هندسی نقاطی از صفحه باشد که از دو ضلع AB و AC از مثلث ABC به فاصله مساوی و از دو رأس B و C به یک فاصله باشند، آنگاه S همواره ... یا ... را مشخص می‌کند.

- (۱) یک خط راست - یک نقطه
(۲) یک نقطه - یک دایره
(۳) یک نقطه - تهی
(۴) یک خط راست - تهی

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- از نقطه M واقع در بیرون دایره $C(O, 6)$ ، یک مماس به طول $4\sqrt{6}$ و یک قاطع که دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند، رسم می‌کنیم $(MA < MB)$. اگر $MA = 8$ ، آنگاه فاصله O تا AB کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$
(۲) $3\sqrt{3}$
(۳) $2\sqrt{5}$
(۴) $2\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- یک دوزنقه متساوی‌الساقین بردایره‌ای به شعاع R محیط شده است. اگر محیط دوزنقه 40 و طول قاعده کوچک آن 4 باشد، مساحت دوزنقه چقدر است؟

- (۱) ۶۰
(۲) ۸۰
(۳) ۴۰
(۴) ۹۰

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- دو دایره $C(O, 5)$ و $C'(O', 1)$ برون یک‌دیگرند. اگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر $4\sqrt{3}$ باشد، طول مماس مشترک داخلی این دو دایره کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$
(۲) $2\sqrt{6}$
(۳) $3\sqrt{3}$
(۴) $2\sqrt{7}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- تحت یک بازتاب نسبت به نقطه P ، نقطه $A = (2, -1)$ به نقطه $B = (-4, 1)$ تصویر می‌شود. اگر $E = (\alpha - 1, 3\beta)$ تصویر $F = (0, 3)$ تحت این بازتاب باشد، $\alpha - 2\beta$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- نگاشت M با ضابطه $M(x,y) = (0,y)$ ، روی نقاط صفحه تعریف شده است. کدام گزینه درباره نگاشت M ، همواره درست است؟

(۱) M ، هر نقطه را روی محور x ها تصویر می‌کند. (۲) M ، ایزومتري است.

(۳) M ، یک به یک نیست. (۴) M ، شیب خطوط را حفظ می‌کند.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- در فضا، از یک نقطه بیرون یک ... می‌توان ... عمود بر آن رسم کرد.

(۱) خط - فقط یک خط (۲) صفحه - فقط یک صفحه

(۳) خط - بی‌شمار صفحه (۴) صفحه - بی‌شمار صفحه

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- دو صفحه متقاطع P_1 و P_2 بر صفحه Q عمودند. اگر خط d به تمامی در P_1 باشد و $d \cap P_2 = \emptyset$ ، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) بی‌شمار صفحه شامل d و عمود بر Q وجود دارد.

(۲) دقیقاً یک صفحه شامل d و عمود بر P_2 وجود دارد.

(۳) دقیقاً یک خط عمود بر d و عمود بر صفحه P_2 وجود دارد.

(۴) بی‌شمار خط متقاطع با d و موازی با Q وجود دارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- صفحه Γ و دو نقطه A و B را در فضا در نظر بگیرید. شرط لازم برای آن‌که هیچ نقطه‌ای روی Γ از A و B به یک فاصله نباشد،

کدام است؟

(۱) خط گذرنده از A و B بر Γ عمود باشد. (۲) خط گذرنده از A و B موازی Γ باشد.

(۳) A و B از Γ به یک فاصله باشند. (۴) A و B در یک طرف Γ واقع نباشند.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۶۰۷۰۷

۱۲۱- حکم کلی «هر عدد طبیعی دو رقمی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت»، چند مثال نقض دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- حداقل چند دانش آموز در یک مدرسه باید تحصیل کنند تا با اطمینان بگوییم که حداقل ۱۲ نفر در میان آن‌ها وجود دارند که ماه

تولدشان یکسان است؟

۱۰۹ (۱)

۱۲۱ (۲)

۱۳۳ (۳)

۱۴۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- حاصل عبارت $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap C'$ همواره برابر کدام است؟

$B - C$ (۱)

$B \cap C$ (۲)

$A \cup B$ (۳)

B (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- در چند حالت زیر همواره $P(A - B) = P(A) - P(B)$ برقرار است؟ ($P(X)$ مجموعه توانی X است.)

الف) $B = \{1, 3, 5\}$, $A = \{1, 2\}$

ب) $B = \{1, 3, 5\}$, $A = \{2, 4, 6\}$

ج) $A = B = \{1, 2, 3\}$

هیچ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر $A = \{x^2 - x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x < 5\}$ و $B = \{2^x + 2^{-x} \mid x \in \mathbb{N}, x < 2\}$ ، آنگاه $A \times B - B^2$ چند عضو دارد؟

۳ (۱)

صفر (۲)

۱ (۳)

۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 10\}$ باشد، کدام یک از گزینه‌ها نشان دهنده یک افراز برای مجموعه A است؟

$\{-2, 2\}, \{-3, 3\}, \{0\}, \{-1\}$ (۲)

$\{-3, 0\}, \{1, 2, 3\}, \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ (۱)

$\{2, -1\}, \{1, -2\}, \{-3, 3, 0\}$ (۴)

$\{-3, -2\}, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, -1\}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- ۹ نقطه مطابق شکل روی دو خط موازی قرار دارند. یک مثلث به تصادف با این نقاط رسم می‌کنیم. احتمال آن که یکی از رئوس مثلث

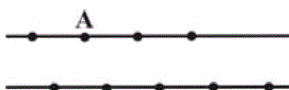
رسم شده، نقطه A باشد کدام است؟

$\frac{3}{7}$ (۱)

$\frac{4}{7}$ (۲)

$\frac{3}{14}$ (۳)

$\frac{5}{14}$ (۴)



شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در یک خانواده با چهار فرزند، احتمال این که تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشد، چند برابر احتمال این است که این خانواده دارای یک

پسر و سه دختر باشد؟

$$\frac{3}{2} \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4) \qquad 1 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است. در یک پرتاب، احتمال

وقوع عدد بزرگ‌تر از ۳ کدام است؟

$$\frac{5}{12} \quad (2) \qquad \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{7}{12} \quad (4) \qquad \frac{2}{3} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- عدد m را به تصادف از بازه $[-6, 6]$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که عبارت $x^2 - mx + m$ به ازای هر مقدار حقیقی x ، مثبت

باشد؟

$$\frac{1}{2} \quad (2) \qquad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4) \qquad \frac{1}{3} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

-۹۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

$$2a_4 = a_2 + a_3 \Rightarrow 2(a_1q^3) = a_1q + a_1q^2$$

$$\frac{q \text{ می تواند برابر صفر باشد}}{a_1q} \rightarrow 2q^2 = 1 + q \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

در غیر این صورت دو طرف را بر a_1q تقسیم می کنیم.

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

۴

۳

۲

۱

-۹۲

(علی یوسفی)

$$5x^4 - 3x^2 + ax - 1 = (x+1)Q(x) + R$$

چون مجموع ضرایب $Q(x)$ برابر ۷ است پس $Q(1) = 7$ ، در نتیجه:

$$x = 1 \Rightarrow 5 - 3 + a - 1 = 2 \times 7 + R \Rightarrow a = 13 + R \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow 5 - 3 - a - 1 = 0 + R \Rightarrow 1 - a = R \quad (2)$$

$$a = 7$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود:

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۶ تا ۸)

۴

۳

۲

۱

(مرتضی روزبهانی)

$$x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -4 \\ \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{جواب‌های معادله جدید: } \frac{\alpha}{2} - 1, \frac{\beta}{2} - 1$$

$$S = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 = -4$$

$$P = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{\alpha\beta}{4} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} + 2 + 1 = \frac{11}{4}$$

$$x^2 + 4x + \frac{11}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 11 = 0$$

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

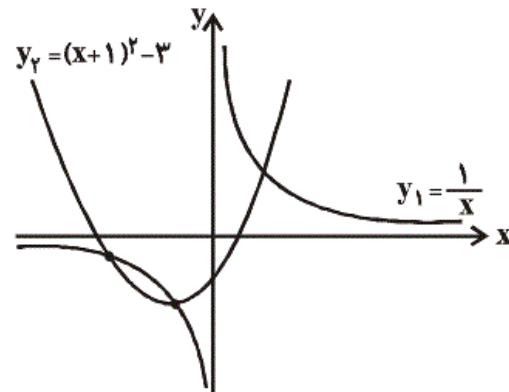
۳

۲ ✓

۱

(هادی پلور)

نقاط تلاقی نمودارهای $y_1 = \frac{1}{x}$ و $y_2 = x^2 + 2x - 2$ ، جواب‌های معادله است.



با توجه به شکل، معادله سه جواب دارد.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاترین ایندرا)

$$\begin{aligned} |x - 2\sqrt{x}| < 3 &\Rightarrow -3 < x - 2\sqrt{x} < 3 \Rightarrow -2 < x - 2\sqrt{x} + 1 < 4 \\ &\Rightarrow -2 < (\sqrt{x} - 1)^2 < 4 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 < 4 \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < 2 \\ &\Rightarrow -2 < \sqrt{x} - 1 < 2 \Rightarrow -1 < \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9 \end{aligned}$$

بنابراین اعداد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ در نامعادله صدق می‌کنند.

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

۴

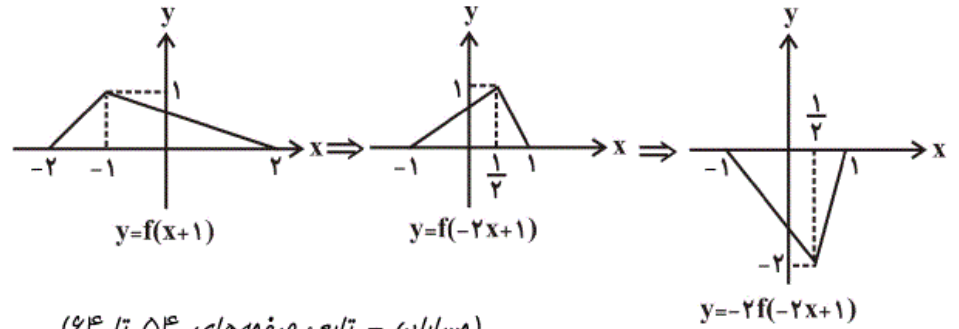
۳

۲ ✓

۱

(عیب شفیع)

ابتدا نمودار $y = f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار $y = f(-2x+1)$ و در انتها $y = -2f(-2x+1)$ را رسم می‌شود.



(مسئله - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(قسم کتابی)

$$f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) = x$$

$$\Rightarrow g^2(x) + 2g(x) - x = 0 \xrightarrow{g(x)=t} t^2 + 2t - x = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4x}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+x}$$

$$\Rightarrow g(x) = -1 \pm \sqrt{1+x}$$

چون دامنه f برابر $[-1, +\infty)$ است، پس t و در نتیجه $g(x)$ باید کوچک‌تر مساوی

-1 باشد، پس $g(x) = -1 - \sqrt{1+x}$ قابل قبول است.

(مسئله - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عبیب شفیعی)

$$y = f(x) = x^2 - 2x^2 + 1 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow y + 1 = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y + 1} = |x^2 - 1|$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 1} \sqrt{y + 1} = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \sqrt{y + 1}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{1 - \sqrt{y + 1}}$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 1} x = \sqrt{1 - \sqrt{y + 1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{y + 1}}$$

دقت شود که تابع f با شرط $0 \leq x \leq 1$ یک به یک است.

(مسئله - تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عبیب شفیعی)

-۹۹

همواره برقرار

توجه:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid \overbrace{f^{-1}(x) \in D_f}^{\text{همواره برقرار}}\} = D_{f^{-1}} \\ D_{f^{-1} \circ f} = \{x \in D_f \mid \overbrace{f(x) \in D_{f^{-1}}}^{\text{همواره برقرار}}\} = D_f \end{array} \right.$$

$$D_f = [2, 8], D_{f^{-1}} = R_f = [-3, 6]$$

$$D_g = D_{f \circ f^{-1}} \cap D_{f^{-1} \circ f} - \{x \mid f^{-1} \circ f(x) = 0\}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

اما با توجه به این که $0 \notin D_f$ بنابراین هیچ مقداری از x تابع $f^{-1} \circ f$ را صفر نمی‌کند.

$$D_g = D_{f^{-1}} \cap D_f - \{0\} = [-3, 6] \cap [2, 8] = [2, 6]$$

(مسئله - تابع: صفحه‌های ۸۵ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مجموعه رضا اسلامی)

$$\frac{\sin 9^\circ + \cos 9^\circ}{\sin 3^\circ + \cos 3^\circ} = \frac{\sin 9^\circ \cos 3^\circ + \sin 3^\circ \cos 9^\circ}{\sin 3^\circ \cos 3^\circ}$$

$$= \frac{\sin(9+3)^\circ}{\frac{1}{2}\sin 6^\circ} = \frac{2\sin 6^\circ \cos 6^\circ}{\frac{1}{2}\sin 6^\circ} = 4\cos 6^\circ$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳✓

۲

۱

(میثم عمزهلوثی)

-۱۰۱

$$\left. \begin{array}{l} \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \\ 0 < \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\left(2\cos^{-1}\frac{1}{3}\right) = \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱✓

$$\tan x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ، پس انتهای

کمان جواب‌های معادله داده شده بر روی دایره مثلثاتی، مستطیل می‌باشد. توجه کنید

که تانژانت به ازای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است.

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید مدیرفراسانی)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{\left(\sqrt{x-2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)}$$

$$= \frac{2}{0+1} = 2$$

(مسئله‌ها - حد و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مطابق شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3, \quad f(2) = 0$$

$$\Rightarrow m(3) + n(2) = 0 \Rightarrow 3m + 2n = 0 \Rightarrow 3m = -2n$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$$

(مسئله - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(امیرمسین افشار)

-۱۰۵

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{\sin(x-1)\tan(2x-2)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{\sin(x-1)\tan(2x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-1)(x+2)}{\sin(x-1)\tan(2x-2)}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(x-1)} = 1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)(x+2)}{2\tan(2x-2)}}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-2)}{\tan(2x-2)} = 1}{1 \times \frac{1}{2} \times 3} = \frac{3}{2}$$

(مسئله - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^+} \frac{1(3x-1)(3x+1)}{3x-1} = \frac{2}{9}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = b$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{3})^-} \left(\left[\frac{-1}{\sqrt{3x}} \right] + c \right) = \left[\frac{-1}{1^-} \right] + c = [-(1^+)] + c$$

$$= [(-1)^-] + c = -2 + c \Rightarrow \frac{2}{9} = b = -2 + c$$

$$\Rightarrow c - 2 = \frac{2}{9} \Rightarrow 9c - 18 = 2 \Rightarrow 9c = 20 \Rightarrow 9c + 1 = 21$$

(مسابان - هر و پیوستگی توابع: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(قاسم کتابچی)

-۱۰۷

تابع f در $x = 1$ پیوسته است. داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2f(1+h) - 3f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2[f(1+h) - f(1)] - 3[f(1-h) - f(1)] - f(1)}{h}$$

$$\underline{\underline{f(1) = 0}} \quad 2 \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= 2f'_+(1) + 3f'_-(1) = 2(-3x^2) \Big|_{x=1} + 3(1) = -6 + 3 = -3$$

(مسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض می‌کنیم $(\alpha, 1) \in f^{-1}$ بنابراین $(1, \alpha) \in f$:

$$(f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f(x) = x^5 + \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow (f^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{16}$$

(مسئله‌ها - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(گروهش شاه منصوریان)

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x_0=3} y_0 = \frac{3-1}{\sqrt{3+1}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \text{نقطه پای قائم: } (x_0, y_0) = (3, 1)$$

$$y' = \frac{(1)(\sqrt{x+1}) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(x-1)}{(\sqrt{x+1})^2}$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ در مماس خط } m = y'(3) = \frac{(1)(2) - \left(\frac{1}{4}\right)(2)}{2^2} = \frac{3}{8}$$

می‌دانیم که اگر $m \neq 0$ ، آنگاه معادله خط قائم به صورت

$$y - y_0 = \frac{-1}{m}(x - x_0) \text{ است، پس داریم:}$$

$$y - 1 = \frac{-8}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y + 8x = 27$$

(مسئله‌ها - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عیب شفیع)

$$y' = \left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)' f'\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y' = \left(1 \times f\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right)\right) f'\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow y'(1) = (f(1) - f'(1))f'(f(1)) \quad (*)$$

$$f(1) = |3(1) - 5| = 2, f'(1) = (-3x + 5)' = -3$$

$$f'(f(1)) = f'(2) = (3x - 5)' = 3$$

$$(*) \Rightarrow y'(1) = (2 - (-3)) \times 3 = 15$$

(مسابان - مشتق توابع: صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۹۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی ، هندسه ۲ ، - ۱۳۹۶۰۷۰۷

-۱۱۱

(داریوش ناظمی)

اندازه ضلع مربع حاصل از برخورد نیم‌سازهای زوایای داخلی مستطیلی به اضلاع **a** و **b**برابر با $|a - b| \frac{1}{\sqrt{2}}$ است. طبق فرض اگر $a = 2b$ ، آنگاه داریم:

$$3\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |2b - b| \Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow$$

$$S = a.b = 72 : \text{مساحت مستطیل}$$

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌های ۱۲ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع AB و AC به یک فاصله باشند، نیمساز زاویه A است و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه B و C به یک فاصله باشند، عمودمنصف BC است. فصل مشترک نیمساز \hat{A} و عمودمنصف BC مکان هندسی مورد نظر است.

اگر $AB = AC$ باشد، نیمساز و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند و مکان هندسی مورد نظر یک خط راست است. در غیر این صورت نیمساز و عمودمنصف متقاطع‌اند و مکان هندسی مورد نظر یک نقطه است.

(هندسه ۲ - استرلال؛ صفحه‌های ۳۱ تا ۳۵)

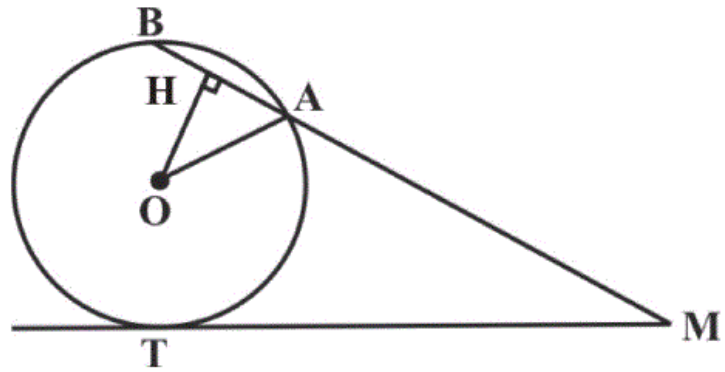
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اکنون با توجه به اینکه شعاع عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، می‌توانیم بنویسیم:



$$OA^2 = OH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

(هندسه ۲ - ایره؛ صفحه‌های ۴۸، ۷۴ تا ۷۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله ریاضی)

$$AD + BC = AB + CD$$

در دوزنقه محیطی ABCD داریم:

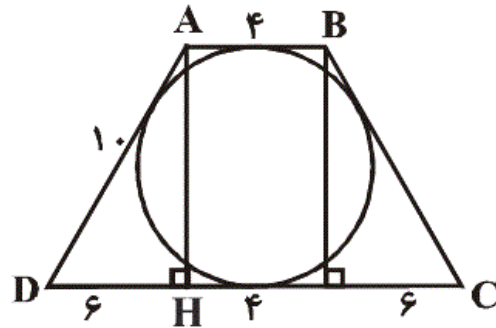
محیط دوزنقه متساوی الساقین ۴۰ واحد است، پس:

$$AD + BC = 20 \Rightarrow AD = BC = 10$$

$$\underbrace{AB}_{4} + CD = 20 \Rightarrow CD = 16$$

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AH}{2} = 80$$



(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$C' \text{ و } C \text{ طول مماس مشترک خارجی } l = \sqrt{d^2 - (\Delta - 1)^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow d^2 - 16 = 48 \Rightarrow d^2 = 64 \Rightarrow d = 8$$

$$\Rightarrow C' \text{ و } C \text{ طول مماس مشترک داخلی } l' = \sqrt{d^2 - (\Delta + 1)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 - 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\text{مختصات مرکز تقارن} = \left(\frac{-۴+۲}{۲}, \frac{۱-۱}{۲} \right) = (-۱, ۰)$$

وسط EF منطبق بر مرکز تقارن است و داریم:

$$\left(\frac{\alpha - ۱ + ۰}{۲}, \frac{۳\beta + ۳}{۲} \right) = (-۱, ۰)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha - ۱}{۲} = -۱ \Rightarrow \alpha = -۱ \\ \frac{۳\beta + ۳}{۲} = ۰ \Rightarrow \beta = -۱ \end{cases} \Rightarrow \alpha - ۲\beta = ۱$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

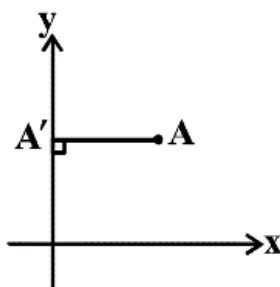
 ۲

 ۱

(مسن فاطمی)

-۱۱۷

این نگاشت هر نقطه مانند $A = (x, y)$ را به $A' = (۰, y)$ تصویر می‌کند. از نظر هندسی، A' تصویر قائم‌نقطه A روی محور y ها است. این نگاشت یک‌به‌یک نیست، زیرا مطابق شکل، هر نقطه روی پاره‌خط AA' و یا امتداد آن به نقطه A' تصویر می‌شود.



(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از یک نقطه بیرون یک خط می‌توان بی‌شمار خط و فقط یک صفحه عمود بر آن خط رسم کرد. از یک نقطه بیرون یک صفحه می‌توان بی‌شمار صفحه و فقط یک خط بر آن عمود کرد.

(هندسه ۲ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۹)

 ۴

 ۳

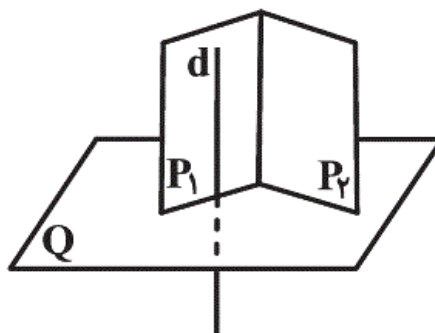
 ۲

 ۱

(نویر میبری)

- ۱۱۹

با توجه به مفروضات سؤال خط d بر P_1 واقع است، به‌گونه‌ای که موازی P_2 است و اشتراکی با آن ندارد ($d \parallel P_2$) پس دقیقاً یک صفحه شامل d و عمود بر P_2 وجود دارد، ولی بی‌شمار خط عمود بر d و عمود بر P_2 موجود است که همگی بر صفحه شامل d و عمود بر P_2 واقع هستند. از آن‌جا که $d \perp Q$ پس بی‌شمار صفحه شامل d و عمود بر Q موجود است. اگر صفحه‌ای عمود بر d رسم کنیم، موازی با Q خواهد بود و هر خط واقع بر آن صفحه که d را قطع کند، با Q موازی می‌شود.



(هندسه ۲ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۹)

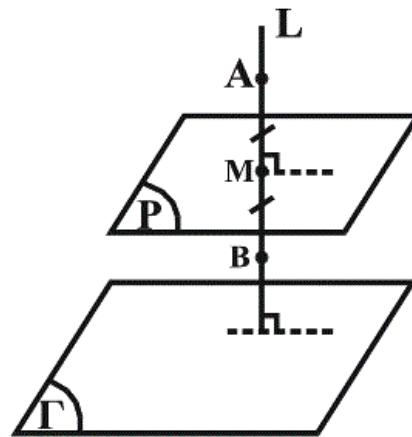
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تقاطی از فضا که از A و B به یک فاصله هستند، روی صفحه عمود منصف AB قرار دارند. حال اگر خط گذرنده از A و B بر Γ عمود باشد، عمود منصف AB با Γ موازی خواهد بود و بنابراین با شرط $AB \perp \Gamma$ ، بجز در حالتی که Γ از وسط AB بگذرد، هیچ نقطه‌ای روی Γ وجود ندارد که از A و B به یک فاصله باشد.



(هندسه ۲ - هندسه فضایی؛ صفحه‌ی ۱۵۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۶۰۷۰۷

-۱۲۱

(سروش موئینی)

در حالت کلی، اعدادی که به صورت 2^n ($n \in \mathbb{W}$) باشند، مثال نقض هستند (به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشته نمی‌شوند). پس در بین اعداد دو رقمی، ۳ مثال نقض داریم: ۶۴، ۳۲، ۱۶

(پرواحتمال - استدلال ریاضی؛ مشابه مثال ۶ - صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نکته مهم درسی: تعدادی کبوتر می‌خواهند در n لانه قرار گیرند. برای این که حداقل یک لانه وجود داشته باشد که حداقل k کبوتر در آن قرار بگیرند، باید حداقل تعداد کبوترها برابر با $1 + n(k - 1)$ باشد.

پس داریم:

$$\text{حداقل تعداد دانش‌آموزان} = 12(12 - 1) + 1 = 12 \times 11 + 1 = 133$$

(بیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$(A \cup B) \cap [(B \cup C) \cap C']$$

$$= (A \cup B) \cap \left[(B \cap C') \cup \underbrace{(C \cap C')}_{\emptyset} \right]$$

$$= (A \cup B) \cap (B - C) = B - C$$

$$B - C \subseteq B \subseteq A \cup B$$

تذکر:

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

نکته، اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، همواره $\emptyset \in P(A)$ می‌باشد. با توجه به نکته فوق $\emptyset \in P(A - B)$ است و چون $\emptyset \in P(A)$ و $\emptyset \in P(B)$ ، نتیجه این است که $\emptyset \notin P(A) - P(B)$. پس امکان تساوی $P(A - B) = P(A) - P(B)$ وجود ندارد.

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها؛ صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A = \{3, 7, 13\} \text{ و } B = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$(A \times B) \cap (B \times B) = \emptyset \Rightarrow A \times B - B^2 = A \times B$$

$$\Rightarrow |A \times B - B^2| = |A \times B| = |A| \times |B| = 3 \times 1 = 3$$

(بیر و احتمال - مجموعه‌ها؛ صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 10\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

در گزینه (۱) مجموعه تهی وجود دارد که تهی نمی تواند یکی از مجموعه های افراز کننده باشد. اجتماع مجموعه های گزینه (۲) با A برابر نیست. در گزینه (۳) مجموعه ها اشتراک دارند.

(بیر و احتمال - مجموعه ها: صفحه های ۶۵ و ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا پورسینی)

- ۱۲۷

ابتدا کل مثلث های ممکن که رئوسشان روی این دو خط قرار بگیرند را حساب می کنیم:

$$\binom{4}{1} \binom{5}{2} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 40 + 30 = 70$$

حالت مطلوب این است که یکی از رئوس مثلث رسم شده، نقطه A باشد، پس دو حالت داریم:

$$\binom{5}{2} = 10$$

(۱) دو رأس دیگر از خط پایین باشد:

(۲) یک رأس از خط بالا و یک رأس از خط پایین باشد:

$$\binom{3}{1} \binom{5}{1} = 15$$

در نتیجه مجموعاً ۲۵ مثلث با این شرایط وجود دارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

(بیر و احتمال - احتمال: صفحه های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میرغفور باقری)

- ۱۲۸

اگر تعداد پسرها در این خانواده برابر X باشد، داریم:

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} \quad \text{و} \quad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{4}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{P(X=2)}{P(X=1)} = \frac{3}{2}$$

(بیر و احتمال - احتمال: صفحه های ۸۷ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومصوب)

اگر احتمال وقوع هر عدد غیراول را p فرض کنیم، آنگاه احتمال وقوع هر عدد اول برابر $3p$ خواهد بود، بنابراین در صورتی که X عدد ظاهر شده روی تاس باشد، آنگاه:

$$\sum_{i=1}^6 P(X=i) = 1 \Rightarrow p + 3p + 3p + p + 3p + p = 1$$

$$\Rightarrow 12p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{12}$$

$$P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= p + 3p + p = 5p = \frac{5}{12}$$

(پیرواحتمال - احتمال: صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیرحسین ابومصوب)

برای این که چند جمله‌ای درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد لازم است

$$f(x) = x^2 - mx + m \quad \text{که } a > 0 \text{ و } \Delta < 0$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 4m < 0$$

$$\Rightarrow m(m-4) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < m < 4, a = 1 > 0$$

مقادیر مطلوب برای m که پیشامد تصادفی مورد نظر می‌باشد، بازه‌ای به طول ۴ و فضای

نمونه‌ای برابر بازه $[-6, 6]$ است. پس احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(پیرواحتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۴

۳ ✓

۲

۱