



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

۱۰۱- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\beta^2 + 3\alpha$ کدام است؟

- (۱) ۹/۵ (۲) ۸/۵ (۳) ۷/۵ (۴) ۶/۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر عبارت $f(x) = ax^3 - x^2 - 5x - 3a$ بر سه جمله‌ای $x^2 + 2x + 1$ بخش پذیر باشد، جواب مثبت $f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- معادله‌ی $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x^2 - k| < 8$ ، یک همسایگی محذوف متقارن به مرکز α و به شعاع β باشد، $\alpha + \beta$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

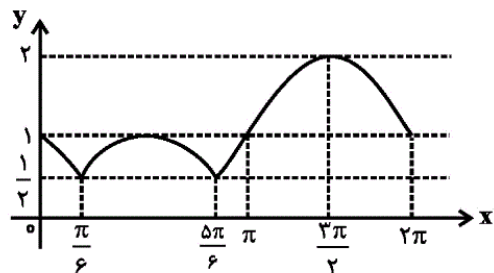
۱۰۵- اگر $g(x) = \log_3(x^2 + 1)$ ، $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ و $f(2\sqrt{2}) = 1$ باشد، آن‌گاه مقدار $(g \circ h^{-1})(1)$ کدام است؟ (f و h وارون پذیر

است.)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- شکل زیر، یک دوره تناوب از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |\sin ax + b| + c$ است. حاصل abc کدام مقدار می‌تواند باشد؟



- (۱) $-\frac{1}{4}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) $-\frac{3}{4}$
(۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر تابع $f = \{(2, 2m + 3), (1, 6), (3, -4)\}$ یک تابع نزولی اکید باشد، آن‌گاه در محدوده‌ی m چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\sin x} = 0$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعه‌ی مقادیر i کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\{1, 3, 7, 9\}$
 (۲) $\{3, 4, 7, 8\}$
 (۳) $\{3, 5, 7, 9\}$
 (۴) $\{3, 4, 8, 9\}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- حدود m کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا تابع $y_1 = \tan(\sin^{-1} x)$ و خط $y_2 = mx$ یکدیگر را در سه نقطه قطع کنند؟

- (۱) $m > 1$
 (۲) $m < -1$
 (۳) $-1 < m < 1$
 (۴) $m > 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- دنباله‌ی $\left\{ \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) صعودی و کراندار است.
 (۲) نزولی و کراندار است.
 (۳) غیریکنوا و کراندار است.
 (۴) صعودی و بی‌کران است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2} \cos x}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{\sin x}$ کدام است؟ ($\lfloor \cdot \rfloor$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) صفر
 (۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- نمودار توابع $f(x) = \frac{x+k}{x}$ و $g(x) = x^2 + x + 2$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ متقاطع هستند. حداکثر مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- عرض از مبدأ مجانب مایل تابع $f(x) = x \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) -۲
 (۴) $\ln 2$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $f(x) = \sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1}$ باشد، مقدار $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) $-\sqrt{2}$
 (۳) $-\sqrt{3}$
 (۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر تابعی اکیدا صعودی و پیوسته با دامنه‌ی R و $g(x) = f(x) - f^2(x) + f^3(x)$ باشد، آن‌گاه تابع g :

- (۱) صعودی است.
 (۲) نزولی است.
 (۳) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.
 (۴) ابتدا صعودی و سپس نزولی است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \tan^{-1} 3x$ در نقطه‌ی به طول $\frac{1}{3}$ واقع بر منحنی، محور y ها را در نقطه‌ی A قطع می‌کند.

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- تابع $f(x) = x^X$ روی اعداد حقیقی مثبت تعریف شده است. مشتق دوم تابع در نقطه‌ی اکسترمم موضعی آن چقدر است؟

- (۱) $\sqrt[e]{e}$ (۲) $\frac{e\sqrt{e}}{e}$ (۳) $\frac{e}{\sqrt[e]{e}}$ (۴) e

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- طول نقطه‌ی عطف تابع $y = (\delta - \sqrt[3]{x^2})x^2$ و $x > 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{27}{4}$ (۲) $\frac{27}{8}$ (۳) 7 (۴) 6

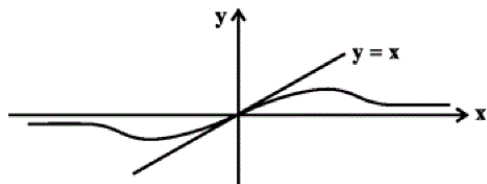
شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- در ساخت یک لیوان فلزی (بدون درب) به شکل استوانه‌ی قائم با حجم π ، با کدام ارتفاع کمترین مقدار فلز مصرف می‌شود؟

- (۱) 1 (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۱- نمودار زیر مربوط به تابع $y = \frac{ax^2 + bx}{x^2 + c}$ است. کدام گزینه لزوماً درست است؟



- (۱) $b + c = 0$ (۲) $2b - c = 0$ (۳) $b - c = 0$ (۴) $b - 2c = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- اگر $0 \leq x \leq 1$ و $f(x) = \int_0^x \cos^{-1}(t) dt$ باشد، مقدار مشتق راست تابع f^{-1} در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{2}{\pi}$ (۳) 1 (۴) صفر

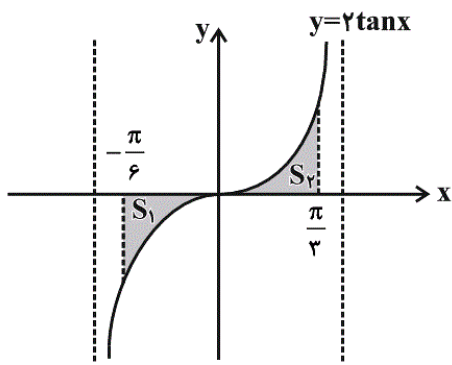
شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- اگر $\int \frac{x^3 - x}{x + \sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + C$ باشد، حاصل $f(0)$ کدام است؟ (C عدد ثابت است.)

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- با توجه به شکل زیر، حاصل $S_2 - S_1$ کدام است؟



(۱) $\text{Ln}2$

(۲) $\text{Ln}3$

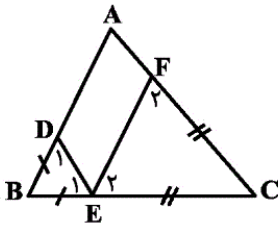
(۳) $2\text{Ln}2$

(۴) $2\text{Ln}3$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

۱۲۵- در شکل زیر مثلث‌های EFC و DBE متساوی‌الساقین هستند. زاویه‌ی \widehat{DEF} برابر است با:



(۲) $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$

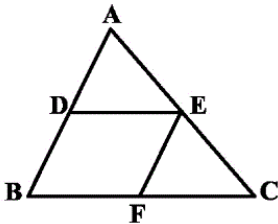
(۴) \widehat{A}

(۱) $\frac{\widehat{A}}{2}$

(۳) $90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- در شکل زیر مساحت متوازی‌الاضلاع BDEF، ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. حاصل $\frac{AD}{DB}$ کدام می‌تواند باشد؟



(۲) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{3}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- مساحت جانبی استوانه‌ای به حجم 64π با مجموع مساحت‌های قاعده‌های آن مساوی است. مساحت کل آن کدام است؟

(۴) 72π

(۳) 64π

(۲) 56π

(۱) 48π

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در مثلث ABC، $AB < AC$ و عمودمنصف ضلع BC نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی A را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. اگر M و N پای عمودهایی باشند که از D به ترتیب بر خط‌های شامل AB و AC وارد می‌شوند. کدام نابرابری درست است؟

(۴) $BM > CN$

(۳) $DC < BM$

(۲) $BM < CN$

(۱) $DC > BM$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- مربع ABCD به ضلع $2 + \sqrt{2}$ واحد مفروض است. شعاع دایره گذرا بر رأس D و مماس بر دو ضلع AB و BC کدام است؟

(۴) $2\sqrt{2} - 1$

(۳) $2 - \sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در مثلثی با طول اضلاع ۸، ۵ و ۴ واحد، دایره‌ی محاطی خارجی بر ضلع کوچک و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه‌ی تماس، ضلع

کوچک را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{7}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- تصاویر نقطه‌ی A تحت دوران R به مرکز O و به زاویه‌ی 90° و تحت انتقال T با ضابطه‌ی $T(x,y) = (x+1, y-2)$ بر هم

منطبق هستند. نقطه A کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۲) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ (۳) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- دو صفحه‌ی متقاطع P و P' با خط d موازی‌اند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه‌ی سومی که بر خط d عمود باشد، کدام

وضع را دارد؟

- (۱) موازی (۲) منطبق (۳) مایل (۴) عمود

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در صورتی که $|a|=|b|=2$ و زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر 15° باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $2a+3b$ و $3a-2b$

ساخته می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۲۶ (۲) ۱۳ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو خط به معادلات $\ell: (2x+y=0, x+y=1)$ و $\ell': (x+y=3, 3x-2y=4)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{10}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- صفحه‌ی گذرنده از سه نقطه‌ی $(3,0,1)$ ، $(2,-2,1)$ و $(-2,-4,2)$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(5,1,1)$ (۲) $(1,3,2)$ (۳) $(2,4,2)$ (۴) $(-1,-3,3)$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- فاصله‌ی بین کانون و خط هادی در سهمی گذرا بر سه نقطه‌ی $C(0,-1)$ ، $B(0,3)$ و $A(-2,1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- ماتریس دوران با رابطه‌ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ معادله‌ی مقطع مخروطی $a\sqrt{3}x^2 + (4-2a)xy - a\sqrt{3}y^2 = 12$ را

به صورت استاندارد بر حسب x' و y' تبدیل می‌کند. مقدار a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $-\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- اگر ماتریس مربعی A را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن در بیاوریم، آن گاه دترمینان ماتریس پادمتقارن آن کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۱

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- حاصل $\begin{vmatrix} -1 & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 x & 0 & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 x & -1 \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\sin^4 x + \cos^4 x$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در دستگاه $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ x + 2z = 2 \\ y - z = b \end{cases}$ دترمینان ماتریس ضرایب برابر ۲ و $y = 3$ می‌باشد. حاصل ab کدام است؟

(۱) -۲۰ (۲) ۲۰ (۳) -۲۱ (۴) ۲۱

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

۱۴۱- در نمودار ساقه و برگ زیر، میانگین اعداد بزرگتر از چارک اول و کوچکتر از چارک سوم، برابر ۵۱ است. اگر عدد \overline{xy} مضرب ۱۱ باشد،

ساقه	برگ	حاصل $x^2 - y$ کدام است؟
۲	۳ ۵ ۷ ۸	(۱) ۲۰
۴	۲ ۶ ۸	(۲) ۳۰
x	۱ y ۶ ۹	(۳) ۴۲
۹	۱ ۲	(۴) ۵۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $1/44$ باشد، انحراف معیار داده‌های زیر کدام است؟

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}x_2 + \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}x_3 + \frac{4}{3}, \dots, \frac{-1}{3}x_n + \frac{4}{3}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- می‌دانیم مجموع مکعب‌های اعداد متوالی با شروع از ۱ برابر با مربع مجموع آن اعداد است. در این صورت حاصل

$$20^3 - 19^3 + \dots - 4^3 + 3^3 - 2^3 + 1^3 \text{ کدام است؟}$$

- (۱) -4100 (۲) -4200 (۳) -4300 (۴) -4400

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۶ نفره از میان ۹ نفر دوست خود ترتیب دهد. اگر امکان دعوت از دو فرد A و B با هم وجود نداشته

باشد، به چند طریق می‌تواند مهمان‌ها را انتخاب کند؟

- (۱) ۴۹ (۲) ۵۶ (۳) ۶۳ (۴) ۷۰

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- اگر $A - B = \emptyset$ و $C' - A = \emptyset$ حاصل $(A \cap B)' \cup C$ همواره کدام است؟

- (۱) A (۲) $B \cap C$ (۳) \emptyset (۴) C

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را به چند طریق می‌توان به سه زیر مجموعه افزایش کرد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۷۵ (۴) ۹۰

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- دو کیسه داریم که در اولی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در دومی ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. از هر کیسه ۳

مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این ۶ مهره هم‌رنگ هستند؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{175}$ (۳) $\frac{3}{25}$ (۴) $\frac{3}{175}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- نقطه‌ی (x, y) را به تصادف درون دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۲ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که $|x| + |y| \geq 2$ باشد،

کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{\pi}$ (۲) $\frac{1}{\pi}$ (۳) $1 - \frac{1}{\pi}$ (۴) $1 - \frac{2}{\pi}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- گراف متناظر با بازه‌های $(1, 7)$ ، $(2, 8)$ ، $(3, 6)$ ، $(5, 10)$ ، $(8, 11)$ و $(9, 12)$ ، چند دور به طول ۳ دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- به ازای کدام رقم a، عدد $(44ab)_5$ بر ۳۱ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۵۱- بزرگترین عدد سه رقمی که در تقسیم بر ۶ و ۷ به ترتیب باقیمانده‌ی ۴ و ۳ دارد، در تقسیم بر ۲۳ دارای کدام باقیمانده است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۳ (۴) ۱۸

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- اگر عدد شش رقمی \overline{ababab} در ۴۸۱ ضرب شود مربع کامل می‌شود. در این صورت تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از کوچکترین عدد دو

رقمی \overline{ab} که نسبت به آن اولند، چقدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۸

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- اگر ماتریس $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس مجاورت رابطه‌ی R_1 روی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ باشد، آن‌گاه چند رابطه مانند R_2 روی

مجموعه A می‌توان تعریف کرد به گونه‌ای که $R_1 \subseteq R_2$ و R_2 رابطه‌ای تقارنی باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- در یک مرکز مخابرات براساس تجربه می‌دانیم که فراوانی ۰ به ۱ ارسال شده برابر با ۴ به ۳ است. اگر احتمال آن که هر ۱ ارسال شده بر اثر تداخل خطوط مخابراتی در مقصد به صورت ۰ دریافت شود، برابر با $\frac{1}{7}$ و احتمال آن که هر ۰ ارسال شده در مقصد به صورت ۱ دریافت شود، برابر با $\frac{2}{7}$ باشد و بدانیم که در مقصد یک کُد ۱ دریافت شده است، آن‌گاه احتمال گزینش در مبدأ واقعا ۱ ارسال شده باشد، چه قدر است؟

- (۱) $\frac{5}{7}$ (۲) $\frac{8}{13}$ (۳) $\frac{9}{13}$ (۴) $\frac{6}{7}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ و $P(X=i) = \frac{a \binom{10}{i}}{256}$ می‌باشد. $P(X=8)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{45}{64}$ (۲) $\frac{45}{128}$ (۳) $\frac{45}{256}$ (۴) $\frac{45}{512}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

(علی ساویجی)

-۱۰۱

چون β جواب معادله است، در معادله صدق می‌کند:

$$2\beta^2 - 6\beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 3\beta + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 3\alpha = (3\beta + \frac{1}{2}) + 3\alpha = 3(\underbrace{\alpha + \beta}_S) + \frac{1}{2}$$

$$= 3(\frac{6}{2}) + \frac{1}{2} = 9/5$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(جعفر وطن‌خواه دولت‌سرا)

-۱۰۲

ریشه‌ی مضاعف $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) - 3a = 0$$

$$-a - 1 + 5 - 3a = 0 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{array}{r} x^3 - x^2 - 5x - 3 \\ - (x^3 + 2x^2 + x) \\ \hline -3x^2 - 6x - 3 \\ - (-3x^2 - 6x - 3) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ \hline x - 3 \end{array} \right.$$

$$f(x) = (x + 1)^2(x - 3) \Rightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \quad \text{ریشه‌ی حقیقی مثبت}$$

(حسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۴ تا ۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر قرار دهیم $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}$ ، آن گاه:

$$a^2 = 2x^2 + 3x + 9 \Rightarrow 2x^2 + 3x = a^2 - 9$$

بنابراین، معادله‌ی اصلی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(a^2 - 9) - 5a + 3 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow (a + 1)(a - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = -1 & \text{جواب ندارد;} \\ a = 6 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 2x^2 + 3x + 9 = 36 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(2x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

(مسئله‌بان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مدرس، رضا شوکتی بیرق)

-۱۰۴

$$|x^2 - k| < \lambda \Rightarrow -\lambda < x^2 - k < \lambda \Rightarrow k - \lambda < x^2 < k + \lambda$$

$$\Rightarrow k - \lambda = 0 \Rightarrow k = \lambda$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 < 16 \Rightarrow 0 < |x - 0| < 4 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 4$$

توجه کنید که اگر $k - \lambda < 0$ آن گاه:

$$\underbrace{k - \lambda}_{\text{منفی}} < x^2 < k + \lambda \Rightarrow 0 \leq x^2 < k + \lambda \Rightarrow 0 \leq |x| < \sqrt{k + \lambda}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{k + \lambda} < x < \sqrt{k + \lambda}$$

مجموعه جواب، یک همسایگی متقارن غیرمحدوف خواهد بود.

(مسئله‌بان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

و عد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون $f(2\sqrt{2}) = 1$ است، پس $f^{-1}(1) = 2\sqrt{2}$ اکنون داریم:

$$y = h(x) = \sqrt[3]{f(x)} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3 = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y^3) \quad (1)$$

$$y = h(x) \Rightarrow h^{-1}(y) = x \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} h^{-1}(x) = f^{-1}(x^3)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} (g \circ h^{-1})(1) &= g(h^{-1}(1)) = g(f^{-1}(1)) = g(2\sqrt{2}) \\ &= \log_3(8 + 1) = 2 \end{aligned}$$

(مسئله - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۹ تا ۹۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممیدرضا طالبیان)

$$f(x) = |\sin ax + b| + c$$

دوره‌ی تناوب این تابع با فرض $a \neq 0$ ، $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|a|} = 2\pi \Rightarrow |a| = 1$$

با فرض $a = 1$ ، با توجه به خواص قدرمطلق و نمودار f ، $x = \frac{5\pi}{6}$ ریشه عبارت

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \quad \text{بنابراین: } \sin x + b$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = |b| + c \Rightarrow c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$abc = (1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

توجه شود که اگر $a = -1$ باشد، نیز $abc = -\frac{1}{4}$ می‌شود.

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۵۲ و مسابان - مسابان جبری، معادلات

و نامعادلات: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۵ و تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

تابع نزولی اکید است. $1 < 2 < 3 \Rightarrow f(1) > f(2) > f(3)$

$$6 > 2m + 3 > -4 \Rightarrow 6 > 2m + 3, 2m + 3 > -4$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 > 2m + 3 \Rightarrow 3 > 2m \Rightarrow m < \frac{3}{2} \quad (1) \\ 2m + 3 > -4 \Rightarrow 2m > -7 \Rightarrow m > -\frac{7}{2} \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -\frac{7}{2} < m < \frac{3}{2}$$

$\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ اعداد صحیح موجود در بازه $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

(مسئله - تابع: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ابتدا از اتحاد $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ و

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x + 2\sin x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x(1 + 2\cos x + 3 - 4\sin^2 x)}{\sin x} = 0, x \neq k\pi$$

حال از اتحاد $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ بهره می‌بریم.

$$\Rightarrow 4 + 2\cos x - 4(1 - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow 2\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \end{cases} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{8\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow i = 3, 4, 8, 9$$

(مسئله‌بان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

○ حکما \Rightarrow یک جواب برای این معادله است.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = m \xrightarrow{m>0} \frac{1}{1-x^2} = m^2$$

$$\Rightarrow 1 = m^2 - m^2 x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{m^2 - 1}{m^2}$$

این معادله باید ۲ جواب داشته باشد

$$\xrightarrow{\text{تا با نقطه } x=0 \text{ دو تابع } y_1 \text{ و } y_2 \text{ در سه نقطه متقاطع باشند.}} m^2 > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{چون } m>0} m > 1$$

(مسئله‌بان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰ و مسائل جبری، معادلات و

نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

دنباله همگرا به $\frac{1}{2}$ است، پس کراندار است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

دنباله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} = \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} + \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2+2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$$

واضح است که با افزایش n ، مقدار مخرج کسر کاهش می‌یابد و مقدار جملات دنباله افزایش می‌یابد. پس دنباله صعودی است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۴۱ و ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدطاهر شعاعی)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2} \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2} \cos x)(1 + \sqrt{1 - x^2} \cos x)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2} \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2) \cos^2 x}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2} \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + x^2 \cos^2 x}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2} \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \cos^2 x}{1 + \sqrt{1 - x^2} \cos x} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \left(\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \right)$$

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ و تابع $y = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ در $x = 0$ حد

ندارد، پس مقدار حد صورت سوال وجود ندارد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(بهبافش نیکنام)

اگر معادله‌ی $x^2 + x + 2 = \frac{x+k}{x}$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ جواب داشته باشد.

نمودار تابع f و g در این بازه متقاطع خواهند بود. پس:

$$\frac{x+k}{x} = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^3 + x^2 + x - k = 0, \quad x \neq 0$$

تابع $h(x) = x^3 + x^2 + x - k$ ابتدا صعودی و پیوسته است.

$$h'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$$

پس باید $h(1)h(-1) \leq 0$ باشد تا تابع در بازه‌ی $[-1, 1]$ دارای ریشه باشد.

$$h(1) \cdot h(-1) = (3 - k)(-1 - k) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq k \leq 3$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا شیب مجانب مایل را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{Ln}\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Ln}\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \operatorname{Ln} 2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{Ln}\left(\frac{2x}{x+1}\right) - x \operatorname{Ln} 2 \right) \quad \text{بنابراین:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{Ln}\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \operatorname{Ln} 2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Ln}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^x$$

$$= \operatorname{Ln} e^{-1} = -1$$

(دیفرانسیل - مجانب: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

در همسایگی $x = \frac{3}{2}$ ضابطه‌ی تابع f به شکل زیر است:

$$f(x) = -\sqrt{x-1} + 2 - \sqrt{x-1} + 3 = 5 - 2\sqrt{x-1}$$

بنابراین:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

(مسابان - مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴ و ۱۶۶ تا ۱۷۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

(جوانبش نیکنام)

- ۱۱۶

 f صعودی است، پس $f'(x) \geq 0$.

همچنین:

$$g'(x) = f'(x) - 2f'(x)f(x) + 3f^2(x)f'(x)$$

$$g'(x) = f'(x)(1 - 2f(x) + 3f^2(x))$$

با توجه به این که عبارت $1 - 2f(x) + 3f^2(x)$ همواره مثبت است، پس $g'(x) \geq 0$ بنابراین تابع g صعودی است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۷۸ تا ۱۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فریدون ساعتی)

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ نقطه‌ی تماس}$$

$$f(x) = \tan^{-1} 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{1+(3x)^2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب مماس} = f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{1+(3\left(\frac{1}{3}\right))^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{معادله مماس: } y - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$| \text{عرض از مبدأ} | = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right| \text{ فاصله } A \text{ تا مبدأ مختصات}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۵۸ و حسابان - مشتق: صفحه‌های ۱۶۰)

تا ۱۷۵ و ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\frac{y'}{y} = \text{Ln}x + 1 \Rightarrow y' = y(\text{Ln}x + 1) = 0 \Rightarrow \text{Ln}x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

پس $\frac{1}{e}$ طول اکسترمم نسبی تابع است. مشتق دوم تابع را در این نقطه حساب می‌کنیم.

$$y' = y(\text{Ln}x + 1) \Rightarrow y'' = y'(\text{Ln}x + 1) + \frac{y}{x}$$

در تساوی فوق قرار می‌دهیم: $x = \frac{1}{e}$ ، $y' = 0$ و $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

$$y'' = 0 + \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} = \frac{e}{\sqrt[e]{e}}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱ و حسابان - مشتق: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۸۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممدظاهر شعاعی)

$$y = (5 - \sqrt[3]{x^2})x^2 = 5x^2 - x^{\frac{8}{3}}$$

$$y' = 10x - \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'' = 10 - \frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} \xrightarrow{x>0} x = \frac{27}{8}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(ممدظاهر شعاعی)

- ۱۲۰

حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با $\pi r^2 h$. پس:

$$\pi = \pi r^2 h \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$$

اگر مساحت لیوان کم‌ترین شود، مقدار فلز به کار رفته در ساخت آن کم‌ترین می‌شود.
چون لیوان استوانه‌ای در باز است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{r^2} = \pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$$

مقدار h برای کمترین مقدار S را به کمک مشتق پیدا می‌کنیم.

$$S' = \pi(2r - \frac{2}{r^2}) = \frac{2\pi(r^3 - 1)}{r^2} = 0 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{1^2} = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow y = \frac{bx}{x^2 + c}$$

ثانیاً: شیب خط مماس بر منحنی در $x = 0$ برابر ۱ است:

$$y' = \frac{b(x^2 + c) - 2x(bx)}{(x^2 + c)^2} \xrightarrow{x=0} \frac{bc}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow b = c$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کاظم ایلالی)

$$f(0) = \int_0^0 \cos^{-1} t dt = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 \quad \text{ابتدا توجه کنید که}$$

$$f'(x) = \cos^{-1} x \geq 0$$

پس تابعی اکیدا صعودی و معکوس پذیر است.

$$(f^{-1})'_+(0) = \frac{1}{f'_+(0)} = \frac{1}{\cos^{-1} 0} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(علی ساوپی)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - x}{x + \sqrt{x}} dx &= \int \frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx \\ &= \int \frac{(\sqrt{x})^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx \\ &= \int (x - \sqrt{x})(x+1) dx = \int (x^2 + x - x\sqrt{x} - \sqrt{x}) dx \\ &= x\sqrt{x} \left(\frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{2}{5} x - \frac{2}{3} \right) + C \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{3} x\sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{2}{5} x - \frac{2}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

حاصل $S_2 - S_1$ همان جمع جبری مساحت‌های محصور بین نمودار تابع و محور

x ها و خطوط $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ است. پس:

$$S_2 - S_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \tan x dx = -2 \text{Ln} |\cos x| \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2 \left(\text{Ln} \frac{1}{2} - \text{Ln} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \text{Ln} 3$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

-۱۲۵

(عباس اسری امیرآبادی)

$$\hat{E}_1 = \frac{180 - \hat{B}}{2}$$

اگر $\hat{D}\hat{E}\hat{F} = \hat{E}_3$ فرض شود، آن‌گاه داریم:

$$\hat{E}_2 = \frac{180 - \hat{C}}{2}$$

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3 = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - \left(\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \right) + \hat{E}_3 = 180^\circ$$

$$\hat{E}_3 = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180 - \hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{E}_3 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

(هندسه ۱ - استرلال: صفحه‌های ۱۱ و ۲۲)

 ۴

 ۳

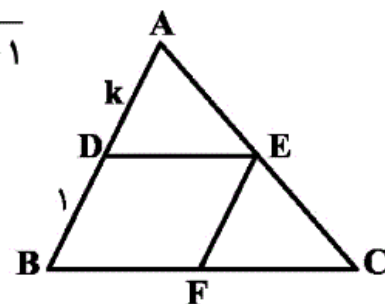
 ۲

 ۱

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{CE} = k \Rightarrow \frac{CE}{AC} = \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{S_{(ADE)}}{S_{(ABC)}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{k^2}{(k+1)^2}$$

$$\frac{S_{(CEF)}}{S_{(ABC)}} = \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{(k+1)^2}$$



$$\text{(فرض)} \frac{S_{(BDEF)}}{S_{(ABC)}} = \frac{48}{100} \Rightarrow 1 - \frac{k^2}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{48}{100}$$

$$\frac{k^2 + 1}{k^2 + 2k + 1} = 1 - \frac{48}{100} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$$

$$\Rightarrow 25k^2 + 25 = 13k^2 + 26k + 13$$

$$\Rightarrow 12k^2 - 26k + 12 = 0 \Rightarrow 6k^2 - 13k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (3k - 2)(2k - 3) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ یا } k = \frac{3}{2}$$

هر دو جواب قبول هستند و با توجه به گزینه‌ها $k = \frac{2}{3}$ جواب است.

(هندسه ۱ - تشابه؛ صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳ و ۹۷ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۲۷

$$\text{مجموع مساحت‌های دو قاعده} = \text{مساحت جانبی} \Rightarrow 2\pi r h = 2\pi r^2 \Rightarrow r = h$$

$$V = \pi r^2 h \xrightarrow{r=h} 64\pi = \pi r^2 \times r \Rightarrow r = 4 \Rightarrow h = 4$$

$$\text{مساحت کل استوانه} = 2\pi r(r + h) = 2\pi \times 4(4 + 4) = 64\pi$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۸)

 ۴

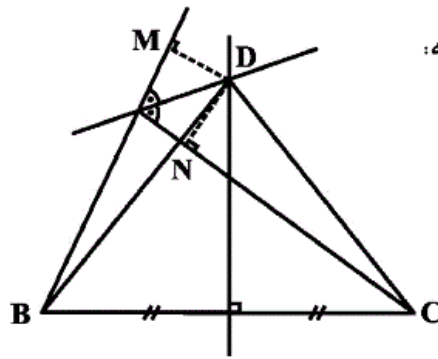
 ۳

 ۲

 ۱

(معمربطاهر شعاعی)

نقطه‌ی D روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد پس $BD = DC$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDM ، پاره خط BD وتر است، پس از اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن بزرگ‌تر است. $(DB > BM)$ در نتیجه:



آن بزرگ‌تر است. $(DB > BM)$ در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} DB = DC \\ DB > BM \end{array} \right\} \Rightarrow DC > BM$$

(هندسه ۲ - استدلال؛ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۴

۳

۲

۱

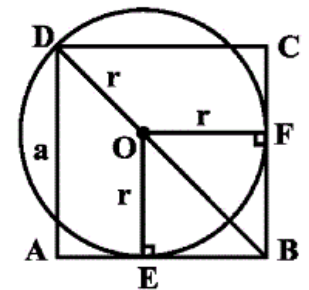
(معمربطاهر شعاعی)

مرکز دایره روی قطر مربع قرار دارد زیرا O از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است. چهارضلعی $BEOF$ مربع است و قطر آن برابر است با $OB = r\sqrt{2}$ و داریم:

$$DB = OB + OD \Rightarrow a\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow r = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = a(2 - \sqrt{2})$$



بنابه فرض $a = 2 + \sqrt{2}$ است، در نتیجه:

$$r = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

(هندسه ۲ - دایره؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۳)

۴

۳

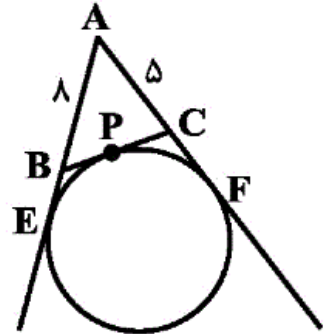
۲

۱

$$\text{محیط مثلث} = AE + AF = AB + BP + PC + AC = ۱۷$$

$$\Rightarrow AE = AF = \text{نصف محیط} = \frac{۱۷}{۲}$$

$$\begin{cases} CF = AF - AC = \frac{۱۷}{۲} - ۵ = \frac{۷}{۲} = CP \\ BE = AE - AB = \frac{۱۷}{۲} - ۸ = \frac{۱}{۲} = BP \end{cases}$$



$$\Rightarrow \frac{BP}{CP} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{7}$$

(هندسه ۲ - دایره؛ صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

-۱۳۱

ضابطه‌ی دوران به مرکز O و به زاویه‌ی 90° : $R(x, y) = (-y, x)$

$$A(x, y) \xrightarrow{R} A'(-y, x), \quad A(x, y) \xrightarrow{T} A''(x+1, y-2)$$

باید دو نقطه‌ی A' و A'' بر هم منطبق باشند، یعنی طول‌های مساوی و عرض‌های

$$\begin{cases} -y = x + 1 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

مساوی داشته باشند، $x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۱ و ۹۱ تا ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

-۱۳۲

فصل مشترک این دو صفحه با خط d موازی است و صفحه‌ی عمود بر خط d ، بر

فصل مشترک دو صفحه نیز عمود است.

(هندسه ۲ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$S = \frac{1}{2} |(2a + 3b) \times (3a - 2b)|$$

$$= \frac{1}{2} |(\cancel{6a} \times a - 4a \times b + 9b \times a - \cancel{6b} \times b)|$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 |a \times b| = \frac{13}{2} |a| \times |b| \sin 150^\circ = \frac{13}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 13$$

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۲۵ تا ۲۹)

۴

۳

۲✓

۱

(عسین فزایی)

توجه داشته باشید این دو خط با هم موازی و هر دو بر صفحه‌ی XOY عمودند.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow l : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow l' : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

(هندسه تحلیلی - معادلات خط و صفحه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴✓

۳

۲

۱

(سیرامیر ستوره)

$$A = (3, 0, 1)$$

$$B = (2, -2, 1)$$

$$C = (-2, -4, 2)$$

$$n = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j - 6k$$

$$-2x + y - 6z = -12 \Rightarrow 2x - y + 6z = 12$$

تنها نقطه‌ی $(2, 4, 2)$ در معادله‌ی صفحه صدق می‌کند.

(هندسه تحلیلی - معادلات خط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

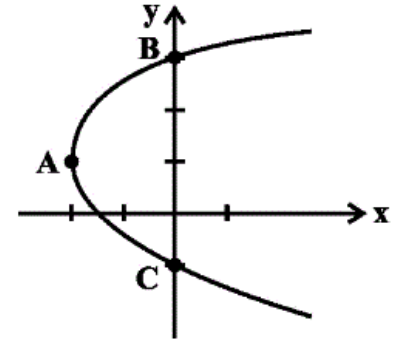
۳✓

۲

۱

طبق شکل سهمی افقی است و معادله‌ی آن به فرم $x = Ay^2 + By + C$ است.

$$\begin{cases} -2 = A + B + C & (1) \\ 0 = 9A + 3B + C & (2) \\ 0 = A - B + C & (3) \end{cases}$$



$$(1), (3) \Rightarrow A + C = -1$$

$$(3), (2) \Rightarrow 12A + 4C = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = -1 \\ 3A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, C = -\frac{3}{2}$$

$$B = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2 - y - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - y = x + \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}(y^2 - 2y + 1 - 1) = x + \frac{3}{2} \Rightarrow (y-1)^2 = 2(x+2) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

فاصله‌ی کانون تا خط هادی، برابر است با: $|2a| = 1$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدظاهر شعاعی)

- ۱۳۷

زاویه‌ی دوران با توجه به ماتریس داده شده، $\theta = 60^\circ$ است و داریم:

$$a\sqrt{3}x^2 + (4 - 2a)xy - a\sqrt{3}y^2 = 12$$

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \Rightarrow \tan 120^\circ = \frac{4 - 2a}{a\sqrt{3} + a\sqrt{3}}$$

$$-\sqrt{3} \times 2a\sqrt{3} = 4 - 2a \Rightarrow -6a = 4 - 2a \Rightarrow -4a = 4 \Rightarrow a = -1$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۱۳ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{مقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{پادمقارن}}$$

راه حل اول:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}(A - A^T) \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

راه حل دوم: دترمینان ماتریس‌های پادمقارن از مرتبه‌ی فرد همواره صفر است.

(هندسه تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۶ و ۱۰۷ و ۱۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(امیرمسین ابومصوب)

- ۱۳۹

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 x & 0 & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x + 0) - (-\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x + 0)$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

(هندسه تفلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow 1(-2) - a(-1) + 1(1) = 2 \Rightarrow a = 2 + 1 = 3$$

$$3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix}}{2} \Rightarrow 6 = 1(-2 - 2b) - 1(-1) + 1(b)$$

$$\Rightarrow -b - 1 = 6 \Rightarrow b = -7$$

$$a.b = 3(-7) = -21$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، - ۱۳۹۶۰۴۰۹

-۱۴۱

(ممبربوار مسنی)

میان عدد ۴۸ است و Q_1 ، $27/5$ و Q_3 برابر $10x + 7/5$ است؛ پس داریم:

$$23, 25, 27, \downarrow, 28, 42, 46, \underbrace{48}_{Q_2}, \overline{x1}, \overline{xy}, \overline{x6}, \downarrow, \overline{x9}, 91, 92$$

$$Q_1 = 27/5 \qquad 10x + 7/5 = Q_3$$

میانگین اعداد را حساب می‌کنیم (برای راحتی از هر عدد و میانگین ۴۰ واحد کم می‌کنیم).

$$\frac{-12 + 2 + 6 + 8 + 10x + 1 - 40 + 10x + y - 40 + 10x + 6 - 40}{7} = 11$$

$$\Rightarrow 30x + y = 186$$

چون ارقام یک عدد دو رقمی مضرب ۱۱، با هم برابرند، پس $x = y$.

$$31x = 186 \Rightarrow x = y = 6 \Rightarrow x^2 - y = 36 - 6 = 30.$$

(آمار و مدل‌سازی - نمودارها و تحلیل داده‌ها؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

شافص‌های مرکزی - صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۲۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عزیزاله علی اصغری)

انحراف معیار داده‌های X_1, X_2, \dots, X_n برابر است با $1/2 = \sqrt{1/44}$. اگر داده‌ها در عددی ثابت ضرب شوند، انحراف معیار آنها در قدرمطلق آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر مقداری ثابت به همه داده‌ها اضافه شود، انحراف معیار تغییری نمی‌کند.

$$\sigma' = \left| -\frac{1}{3} \right| \times 1/2 = \frac{1}{3} \times 1/2 = 0.1667$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی؛ صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی‌اکبر علیزاده)

$$\begin{aligned} & 1^3 - 2^3 + 3^3 - \dots + 19^3 - 20^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3 - 2(2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3) \\ &= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 - 2 \times 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 10^3) \\ &= 210^2 - 16 \times \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 = 44100 - 16 \times 55^2 \\ &= 44100 - 48400 = -4300 \end{aligned}$$

(بیر و احتمال - استرلال ریاضی؛ صفحه‌های ۵ و ۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \binom{9}{6} = 84$$

$$\text{تعداد حالت‌هایی که A و B با هم باشند} = \binom{7}{4} = 35$$

$$\text{تعداد حالت‌های مورد نظر} = 84 - 35 = 49$$

(ریاضی ۲ - ترکیبیات؛ صفحه‌های ۱۸۶ تا ۱۹۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمر حسینی فرد)

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

$$C' - A = \emptyset \Rightarrow C' \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq C \Rightarrow A' \cup C = C$$

$$(A \cap B)' \cup C = A' \cup C = C$$

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را می‌توان به سه طریق به ۳ زیر مجموعه افراز کرد:

$$1) \text{ سه مجموعه‌ی دو عضوی: } \frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = 15$$

۲) یک مجموعه‌ی سه عضوی، یک مجموعه‌ی دو عضوی و یک مجموعه‌ی یک عضوی

$$: \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 60$$

$$3) \text{ یک مجموعه‌ی چهارعضوی و دو مجموعه یک عضوی: } \frac{\binom{6}{4} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{2!} = 15$$

بنابراین تعداد کل افرازاها برابر است با: $15 + 60 + 15 = 90$

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۱ ۲ ۳ ۴

(حسین فرزایی)

چون تعداد مهره‌های سیاه در کیسه‌ی دوم، کمتر از ۳ است، پس تنها حالت ممکن آن است که از هر کیسه، ۳ مهره‌ی سفید خارج شود. داریم:

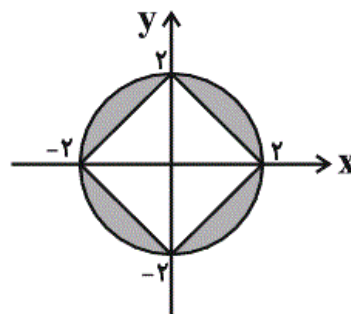
$$\frac{\binom{3}{3} \times \binom{4}{3}}{\binom{7}{3} \binom{6}{3}} = \frac{4}{35 \times \frac{2}{5}} = \frac{1}{175}$$

(ببر و احتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴

(امیرحسین ابومحبوب)

مطابق شکل داریم:



$$a(S) = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$\text{معادله‌ی } |x| + |y| = 2$$

مربعی به طول ضلع $2\sqrt{2}$ ایجاد می‌کند. که

مساحت آن برابر $8 = (2\sqrt{2})^2$ است. بنابراین

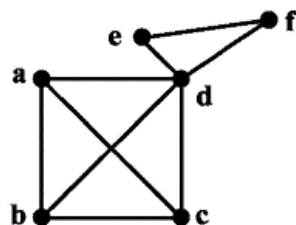
$$a(A) = 4\pi - 8$$

داریم:

$$P(A) = \frac{4\pi - 8}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

(ببر و احتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۱ ۲ ۳ ۴



اگر $a = (1, 7)$ ، $b = (2, 8)$ ، $c = (3, 6)$ ، $d = (5, 10)$ ، $e = (8, 11)$ و $f = (9, 12)$ فرض شود، آن گاه گراف مورد نظر مطابق شکل خواهد بود.
این گراف دارای ۵ دور به طول ۳ است.

abca, adca, abda, cbdc, defd

(ریاضیات گسسته - گراف و کاربردهای آن: صفحه‌های ۸ و ۱۴)

۱ ✓
 ۲
 ۳
 ۴

فرض کنیم $x = (44ab)_5$. واضح است که $(4400)_5 \leq x \leq (4444)_5$ یعنی $600 \leq x \leq 624$ تنها مضربی از ۳۱ که بین دو عدد ۶۰۰ و ۶۲۴ است، $x = 31 \times 20 = 620$ است. اما داریم:
 $620 = (4440)_5$ پس $a = 4$.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱
 ۲
 ۳
 ۴ ✓

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 4 \equiv 10 \\ a \equiv 7 \equiv 10 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 42 \Rightarrow a = 42k + 10$$

بزرگترین عدد سه رقمی مورد نظر به ازای $k = 23$ به دست می‌آید. پس داریم:
 $a = 42 \times 23 + 10$
بنابراین باقیمانده تقسیم این عدد بر ۲۳ برابر ۱۰ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۱
 ۲ ✓
 ۳
 ۴

$$\begin{aligned} 481 \overline{ababab} &= 481(\overline{ab} + 10 \cdot \overline{ab} + 100 \cdot \overline{ab}) \\ &\Rightarrow 481(\underbrace{10101}_{481 \times 3 \times 7} \overline{ab}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \min(\overline{ab}) = 21 \Rightarrow \varphi(21) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 2 \times 6 = 12$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴، ترکیبیات: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۱
 ۲ ✓
 ۳
 ۴

اگر M_7 ماتریس مجاورت متناظر با رابطه‌ی R_7 باشد، آن گاه $M_1 \ll M_7$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & \circ & 1 \\ \circ & 1 & \square \\ 1 & \square & 1 \end{bmatrix} \quad \text{است. حال برای آن که رابطه‌ی } R_7 \text{ تقارنی باشد.}$$

درایه‌هایی که با علامت \circ نشان داده شده، می‌توانند هر دو یک یا هر دو صفر باشند و به طریق مشابه، درایه‌های که با علامت \square نشان داده شده نیز هر دو صفر یا هر دو یک هستند، سایر درهلیقطعا \neq یک می‌باشند، پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{c} \circ \quad \square \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 2 \times 2 = 4 \end{array}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمر صحت‌کار)

$$\frac{P(\circ \text{ ارسال})}{P(1 \text{ ارسال})} = \frac{4}{3} \Rightarrow P(\circ \text{ ارسال}) = \frac{4}{7}, P(1 \text{ ارسال}) = \frac{3}{7}$$

$$P(\circ \text{ دریافت} | 1 \text{ ارسال}) = \frac{1}{7} \Rightarrow P(1 \text{ دریافت} | 1 \text{ ارسال}) = \frac{6}{7}$$

$$P(1 \text{ دریافت} | \circ \text{ ارسال}) = \frac{2}{7}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(1 \text{ ارسال} | 1 \text{ دریافت}) &= \frac{P(1 \text{ ارسال و دریافت})}{P(1 \text{ دریافت})} \\ &= \frac{P(1 \text{ ارسال})P(1 \text{ دریافت} | 1 \text{ ارسال})}{P(1 \text{ ارسال})P(1 \text{ دریافت} | 1 \text{ ارسال}) + P(\circ \text{ ارسال})P(1 \text{ دریافت} | \circ \text{ ارسال})} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times \frac{6}{7}}{\left(\frac{3}{7} \times \frac{6}{7}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{2}{7}\right)} = \frac{18}{18+8} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

$$\sum_{i=0}^{10} P(X=i) = 1 \Rightarrow \frac{a}{256} \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10} \right] = 1 \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{256} (2^{10}) = 1 \Rightarrow a = \frac{256}{2^{10}} = \frac{256}{1024} = \frac{1}{4}$$

$$8P(X=8) = 8 \times \left[\frac{1}{4} \binom{10}{8} \right] = \frac{90}{256} = \frac{45}{128}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

www.kanoon.ir