سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

# درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

# دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

# نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

# دانلود نرم افزارهای ریاضیات

# و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

ریاضي ، ریاضي ، - ۱۳۹۶۰۳۱۹

**۱۲۶-جملات دنبالهٔ ۱/۲۹,۱/۲۹۹,۱/۲۹۹۹,.... به عدد ثابت و گویای A نزدیک می‌شوند. مجموع جملات دنبالهٔ تفاضل جملات دنباله از این عدد ثابت کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۱}{۹۰}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

شما پاسخ نداده اید

**۱۲۷-اگر $XA = A + ۲I$ و $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس X کدام است؟**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

**۱۲۸-اندازهٔ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC به‌ترتیب برابر $\sqrt{۳}-۱$ و $\sqrt{۳}+۱$ است. اگر مساحت مثلث $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، طول ضلع متوسط مثلث کدام است؟**

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۳}$

شما پاسخ نداده اید

**۱۲۹-با ارقام ۷و۶و۵و۴و۳و۲و۱ چند عدد سه رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که رقم وسط آن زوج باشد؟**

۱) ۷۲ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴

شما پاسخ نداده اید

**۱۳۰-در نمودار ساقه و برگ زیر، داده‌ها را به ۴ دسته (با طول مساوی) تقسیم کرده‌ایم. اختلاف زاویهٔ مرتبط با دسته‌های دوم و چهارم در نمودار دایره‌ای کدام است؟ (کلید نمودار: ۱ ۲ = ۱۲)**

| ساقه | برگ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ |
| ۲ | ۰ | ۰ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| ۳ | ۱ | ۱ | ۱ | ۶ | | |

۱) صفر
۲) $۴۰^\circ$
۳) $۶۰^\circ$
۴) $۹۰^\circ$

شما پاسخ نداده اید

**۱۳۱-اگر مجموع انحرافات داده‌های جدول داده شده از عدد ۵، صفر باشد، ضریب تغییرات این داده‌ها چه‌قدر است؟**

| حدود دسته | [۱,۳) | [۳,۵) | [۵,۷) | [۷,۹] |
|---|---|---|---|---|
| فراوانی تجمعی | ۴ | ۷ | a+۷ | a+۸ |

۱) ۰/۶ ۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۳ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲-در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ زرد وجود دارد. ۳ مهره به تصادف، پی‌درپی و بدون جای‌گـذاری از ظرف خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره‌های اول و آخر هم رنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۸}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

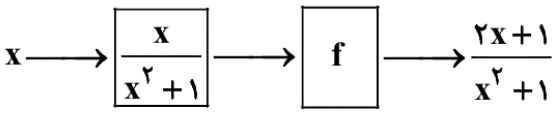
شما پاسخ نداده اید

۱۳۳-اگر $\tan(\frac{\pi}{۴}+x)=۲$، آن‌گاه حاصل $\cot ۲x$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $-۴$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴-با توجه به شکل مقابل، حاصل $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟




۱) ۱ ۲) $-\frac{۸}{۳}$

۳) صفر ۴) $\frac{۳}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵-حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}$ کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-۱$ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶-اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{ax-\sqrt{x+۳}}{x^۲+x-۲} & , x\neq ۱\\ b & , x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد، آن‌گاه $b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $-۱$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷-در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲\sin \pi x$ حاصل $\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $۲\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸-سه تاس همگن را می‌ریزیم. اگر هر سه تاس فرد آمده باشد، احتمال آن‌که حداقل دو تاس یکسان ظاهر شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۲۶}{۲۷}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹-به ازای کدام مجموعه مقادیر $a$، کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=ax^۲+۲(x+a)-۱$ در ربع سوم قرار دارد؟

۱) $-۱<a<\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}<a<۱$ ۳) $۰<a<۱$ ۴) $a>۰$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۰-مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|\frac{x+8}{2x+1}\right| \leq x$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱-اگر $f(x) = \text{Ln}(\frac{2x+1}{x})$ باشند، $f^{-1}(\text{Ln}3)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $e^2 - 1$ ۴) $\text{Ln}\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲-تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت از رابطهٔ $f(t) = Ab^{kt}$ پیروی می‌کند. اگر تعداد باکتری‌ها، با گذشت هر دقیقه ۱/۵ برابر شود، در پایان دقیقهٔ چهارم، جمعیت باکتری‌ها تقریباً چند برابر جمعیت اولیهٔ آن‌ها می‌شود؟

۱) ۴ برابر ۲) ۳ برابر ۳) ۵ برابر ۴) ۶ برابر

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳-اگر $\cos(x+\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$، مجموع جواب‌های $x$ در فاصلهٔ $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۱) $\pi$ ۲) $2\pi$ ۳) $3\pi$ ۴) $4\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴-اگر $f(x) = x^2 + 3|x|$ باشد، مشتق تابع $f(\sqrt{f(x)})$ در $x = -1$ کدام است؟

۱) $\frac{25}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $-\frac{5}{4}$ ۴) $-\frac{35}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵-اگر $f(x) = \sqrt{e^{x-x^2}}$، عرض از مبدأ معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $f$ در $x = 1$ روی منحنی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

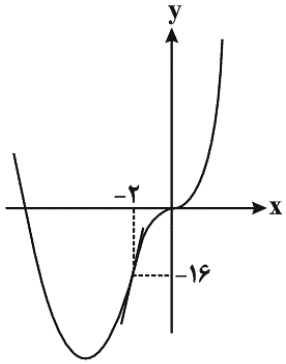
شما پاسخ نداده اید

۱۴۶-نقطهٔ بحرانی تابع $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ چگونه است؟

۱) مینیمم نسبی ۲) ماکسیمم نسبی ۳) عطف ۴) مشتق‌ناپذیر

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷-اگر شکل مقابل مربوط به تابع $f(x) = ax^4 + bx^3$ باشد، $a.b$ کدام است؟




۱) ۸

۲) ۴

۳) -۸

۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸-مکان هندسی نقطهٔ $A(\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^t - e^{-t}}{2})$ وقتی $t$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تغییر می‌کند، کدام منحنی است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹-اگر در یک بیضی نقطهٔ $A(۲,۶)$ یک رأس کانونی و نقطهٔ $O(۲,۲)$ مرکز باشد و یک کانون آن روی خط $x+y=۳$ باشد، معادلهٔ این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۵}=۱$

۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۱۵}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۶}=۱$

۳) $\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۶}=۱$

۴) $\frac{(x-۲)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۲}=۱$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰-اگر $\int \frac{(\sqrt{x}-۱)^۲}{x}dx = xf(x)+C$، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $۱+\frac{Lnx}{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}$

۲) $xLnx-۴\sqrt{x}+۱$

۳) $۱+\frac{Lnx}{x}-\frac{۴}{\sqrt{x}}$

۴) $xLnx+۴\sqrt{x}+۱$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۱-سطح محصور بین نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x|x| & ,-۲<x<۱ \\ \sin \pi x & ,۱\le x<۲ \end{cases}$ و محور $x$ها از $x=-۲$ تا $x=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{\pi}+\frac{۷}{۳}$

۲) $۳+\frac{۲}{\pi}$

۳) $۲+\frac{۳}{\pi}$

۴) $۳-\frac{۲}{\pi}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲-در یک مثلث متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها دو برابر زاویهٔ دیگر است. اگر این مثلث قائم‌الزاویه نباشد، آن‌گاه زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز وارد بر هر ساق آن چند درجه است؟

۱) ۱۵

۲) ۱۸

۳) ۳۰

۴) ۳۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳-با رسم ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه، وتر به دو پاره‌خط به‌طول‌های ۳ و ۶ واحد تقسیم شده است. فاصلهٔ پای این ارتفاع از ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- $AM$، $BN$ و $CP$ میانه‌های مثلث $ABC$ هستند. نقطهٔ برخورد $CP$ و $MN$ را $O$ می‌نامیم. مساحت مثلث $OMC$، چه کسری از مساحت مثلث $MNP$ است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵-مساحت جانبی و مساحت کل یک هرم منتظم پنج وجهی با اعداد $\sqrt{۵}$ و $(۱+\sqrt{۵})$ متناسب است. نسبت طول ارتفاع وجه این هرم به‌طول ارتفاع هرم کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۲۶** *(بهرام طالبی)*

جملات دنبالهٔ داده شده به عدد ۱/۳ نزدیک می‌شوند. بنابراین:

دنبالهٔ تفاضل: $۰/۰۱, ۰/۰۰۱, \ldots$

دنباله فوق، یک دنباله هندسی نامتناهی با جملهٔ اول ۰/۰۱ و قدرنسبت ۰/۱ است. بنابراین مجموع جملات دنباله برابر است با:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{۰/۰۱}{۱-۰/۱} = \frac{۰/۰۱}{۰/۹} = \frac{۱}{۹۰}$$

*(الگو و دنباله) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۶) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

**-۱۲۷** *(عباس امیدوار)*

طرفین معادله را از سمت راست در $A^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{معادله: } X\underbrace{AA^{-1}}_{I} = \underbrace{AA^{-1}}_{I} + ۲IA^{-1}$$

$$\Rightarrow X = I + ۲A^{-1} \quad (*)$$

از آن‌جا که $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ بنابراین:

$$A^{-1} = \frac{۱}{۲(۱)-(۰)(-۱)}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(*)} X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + ۲\left(\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

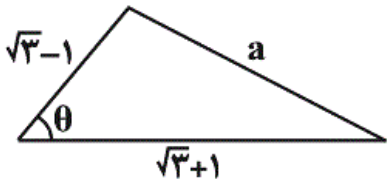
$\Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= ۶$

*(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴ تا ۱۷۴)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

**-۱۲۸** (میثم حمزه‌لویی)

ابتدا شکلی از مسأله رسم می‌کنیم:




باید مقدار **a** را محاسبه کنیم. از آن‌جا که مساحت مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

بنابراین:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{\theta\ \text{حاده}}\theta=\frac{\pi}{۳}$$

حال با کمک قضیه کسینوس‌ها مقدار **a** را می‌یابیم:

$$a^۲=(\sqrt{۳}-۱)^۲+(\sqrt{۳}+۱)^۲-۲(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)\cos\frac{\pi}{۳}$$

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**-۱۲۹** (بهرام طالبی)

چون تعداد ارقام زوج ۳ تاست. بنابراین:

تعداد کل حالات مطلوب: $\frac{۶}{\text{زوج}}\times\frac{۳}{}\times\frac{۵}{}=۹۰$

(ترکیبیات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۶)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۳۰** *(مهدی ملارمضانی)*

با توجه به نمودار، دامنه تغییرات برابر است با: $۳۶-۱۲=۲۴$

اگر داده‌ها را به چهار دسته با طول مساوی تقسیم کنیم، طول هر دسته برابر است با: $\frac{۲۴}{۴}=۶$

دستهٔ دوم و چهارم به‌ترتیب به صورت $(۱۸,۲۴]$ و $[۳۰,۳۶]$ است که زاویهٔ مرتبط با هر کدام از آن‌ها در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\text{زاویهٔ مرتبط با دستهٔ دوم} = \frac{۴}{۱۶}\times ۳۶۰^\circ = ۹۰^\circ$$

$$\text{زاویهٔ مرتبط با دستهٔ چهارم} = \frac{۴}{۱۶}\times ۳۶۰^\circ = ۹۰^\circ$$

بنابراین اختلاف زاویهٔ مرتبط با دستهٔ دوم و چهارم در نمودار دایره‌ای برابر صفر است.

دقت کنید چون در هرکدام از آن‌ها ۴ داده موجود است. پس زاویهٔ مرکزی هر دو برابر می‌شود و اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

*(نمودارها و تحلیل داده‌ها) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶، ۹۲ تا ۱۰۱)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$\Rightarrow \begin{array}{|c|cccc|} \hline x_i-\bar{x} & -۳ & -۱ & ۱ & ۳ \\ \hline \text{فراوانی مطلق} & ۴ & ۳ & ۱۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۴(-۳)^۲ + ۳(-۱)^۲ + ۱۲(۱)^۲ + ۱(۳)^۲}{۴+۳+۱۲+۱}$$

$$= \frac{۳۶+۳+۱۲+۹}{۲۰} = ۳ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۳}$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۳}}{۵}$$

*(شاخص‌های پراکندگی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۷، ۱۳۰ تا ۱۳۴ و ۱۴۸ تا ۱۵۹)*

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۳۲** *(امیرحسین ابومحبوب)*

احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌های اول و آخر را محاسبه می‌کنیم: (چون رنـگ مهرهٔ دوم بی‌اهمیت است، در محاسبات وارد نمی‌شود.)

زرد زرد سیاه سیاه سفید سفید

$$P\ (\text{همرنگ بودن}) = \frac{۳}{۹} \times \frac{۲}{۸} + \frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸} + \frac{۲}{۹} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۲۰}{۷۲} = \frac{۵}{۱۸}$$

بنابراین:

$$P\ (\text{همرنگ نبودن}) = ۱ - \frac{۵}{۱۸} = \frac{۱۳}{۱۸}$$

*(پدیده‌های تصادفی و احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۷ و ۱۳ تا ۱۹)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**-۱۳۳** *(فرهاد حامی)*

راه حل اول: اگر $\alpha = \frac{\pi}{۴} + x$ باشد، آن‌گاه:

$$\cot ۲x = -\tan(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = -\tan(۲ \times (\frac{\pi}{۴} + x)) = -\tan ۲\alpha$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha} = \frac{۲ \times ۲}{۱ - ۴} = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \cot ۲x = \frac{۴}{۳}$$

راه حل دوم:

ابتدا باید مقدار $\tan x$ و سپس $\tan ۲x$ را بیابیم:

$$\tan(\frac{\pi}{۴} + x) = ۲ \Rightarrow \frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x} = ۲$$

$$\Rightarrow ۱ + \tan x = ۲ - ۲\tan x \Rightarrow ۳\tan x = ۱ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{۳}$$

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = \frac{۲(\frac{۱}{۳})}{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۸}{۹}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cot ۲x = \frac{۴}{۳}$$

*(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۳۴** (میثم حمزه‌لویی)

با توجه به شکل داریم:

$$f(\frac{x}{x^۲+۱})=\frac{۲x+۱}{x^۲+۱}\ (*)$$

برای محاسبه $f(\frac{۱}{۲})$ باید ابتدا معادلهٔ $\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲}$ را حل کنیم:

$$\frac{x}{x^۲+۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x^۲+۱=۲x\Rightarrow x^۲-۲x+۱=۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲=۰\Rightarrow x=۱$$

بنابراین با جایگذاری $x=۱$ در تساوی $(*)$ خواهیم داشت:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۲}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۱ ۲ ۳ ۴✓

**-۱۳۵** (فرهاد حامی)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{(-۱)^{۰}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sin x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{(-۱)^{-۱}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۱}{\sin x}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(-۱)^{[x]}}{\sin x}=+\infty$$

(ترکیبی) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۹ تا ۳۲) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۳۶** *(میثم حمزه‌لویی)*

برای این‌که تابع در $x=۱$ پیوسته باشد، باید:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱) \Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{ax-\sqrt{x+۳}}{x^۲+x-۲} = b$$

چون در طرف چپ تساوی حد مخرج برابر صفر است، پس باید حد صورت نیز صفر باشد (تا حاصل حد، بی‌نهایت نشود.)

$$\lim_{x\to ۱}(ax-\sqrt{x+۳}) = ۰ \Rightarrow a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{۲x-\sqrt{x+۳}}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰}$$

صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{۴x^۲-x-۳}{(x^۲+x-۲)(۲x+\sqrt{x+۳})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(۴x+۳)}{(x-۱)(x+۲)(۲x+\sqrt{x+۳})} = \frac{۷}{۱۲}$$

*(حد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۱ تا ۹۴ و ۱۱۵ تا ۱۲۱)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

**-۱۳۷** *(علی ساوجی)*

نکته: اگر در تابع $y=f(x)\times g(x)$ مقدار $f(x)$ در $x=a$ صفر شود (عامل صفر شونده)، آن‌گاه:

$$y'(a) = f'(a)\times g(a)$$

می‌دانیم که $\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = f'(۱)$ و عبارت $\sin \pi x$ در $x=۱$ صفر می‌شود. در نتیجه:

$$f'(۱) = x^۲ \times (\sin \pi x)' = x^۲ \pi \cos \pi x \xrightarrow{x=۱} ۱\times \pi \times \cos \pi = -\pi$$

*(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۳)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**۱۳۸-** *(محمدمهدی ناظمی)*

$$n(S) = ۳^۳ = ۲۷$$

$P($ حداقل ۲ تاس یکسان باشد به شرطی‌که عدد تاس‌ها فرد باشد $)$

$= ۱ - P($ عدد هر سه متمایز باشند، به شرطی‌که عدد تاس‌ها فرد باشد $)$

$$= ۱ - \frac{۳ \times ۲ \times ۱}{۳^۳} = ۱ - \frac{۲}{۹} = \frac{۷}{۹}$$

*(احتمال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸ تا ۱۱)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**۱۳۹-** *(حسن نصرتی‌ناهوک)*

$$y = ax^۲ + ۲x + ۲a - ۱$$

چون تابع دارای مینیمم است، پس $a > ۰$. از طرفی کم‌ترین مقدار در ربع سوم قرار دارد، پس $y = ۰$ دارای دو ریشه است، پس $\Delta > ۰$.

$$۴ - ۴a(۲a - ۱) > ۰ \Rightarrow ۸a^۲ - ۴a - ۴ < ۰ \Rightarrow ۲a^۲ - a - ۱ < ۰$$

$$\Rightarrow (۲a + ۱)(a - ۱) < ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < a < ۱ \xrightarrow{a>۰} ۰ < a < ۱$$

به‌ازای $۰ < a < ۱$ بدیهی است. $-\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲a} < ۰$

*(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۰ تا ۲۵)*

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

**۱۴۰-** *(علی ساوجی)*

چون قدرمطلق هر عبارت عددی نامنفی است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\left|\frac{x + ۸}{۲x + ۱}\right| \geq ۰ \Rightarrow x \geq \left|\frac{x + ۸}{۲x + ۱}\right| \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۰$$

بنابراین به دلیل نامنفی بودن $x$، عبارت $\frac{x + ۸}{۲x + ۱}$ نیز نامنفی است و لذا:

$$\left|\frac{x + ۸}{۲x + ۱}\right| = \frac{x + ۸}{۲x + ۱} \leq x \xrightarrow{\times(۲x+۱)} x + ۸ \leq x(۲x + ۱)$$

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۴۱** *(امیرحسین افشار)*

اگر $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \in f$ آن‌گاه $\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix} \in f^{-1}$ است. بنابراین برای به‌دست آوردن $f^{-1}(\text{Ln}۳)$، $f(x)$ را برابر $\text{Ln}۳$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \text{Ln}\left(\frac{۲x+۱}{x}\right) = \text{Ln}۳ \Rightarrow \frac{۲x+۱}{x} = ۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow f^{-۱}(\text{Ln}۳) = ۱$$

*(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)*

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**-۱۴۲** *(علی ساوجی)*

فرض کنید جمعیت اولیهٔ باکتری‌ها $A$ باشد. آن‌گاه جمعیت آن‌ها در پایان دقیقهٔ $t$ام برابر است با: $f(t) = Ab^{kt}$

طبق فرض:

$$f(t) = A\left(\frac{۳}{۲}\right)^t \Rightarrow f(۰) = A$$

$$f(۴) = A\left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ \Rightarrow \frac{f(۴)}{f(۰)} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ = \frac{۸۱}{۱۶} \simeq ۵$$

*(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۸)*

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

**-۱۴۳** *(سروش موئینی)*

$$\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha) = \cos^۲ x - \sin^۲ \alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}} \cos^۲ x - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

پس جواب‌های بین صفر تا $۲\pi$ عبارتند از: $\frac{\pi}{۶}, \pi \pm \frac{\pi}{۶}, ۲\pi - \frac{\pi}{۶}$ که جمع آن‌ها $۴\pi$ است.

*(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)*

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

با توجه به ضابطه‌ی $f$، $f(-1)=1+3=4$، بنابراین:

$$y'(-1)=\frac{f'(-1)}{2\sqrt{4}}f'(\sqrt{4})=\frac{f'(-1)}{4}f'(2) \quad (*)$$

باید مشتق $f$ را در $x=2$ و $x=-1$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=-1 \text{ در حوالی }: f(x)=x^2-3x \\ x=2 \text{ در حوالی }: f(x)=x^2+3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x)=2x-3 \Rightarrow f'(-1)=-5 \\ f'(x)=2x+3 \Rightarrow f'(2)=7 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} y'(-1)=\frac{-5}{4}\times 7=-\frac{35}{4}$$

*(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۴)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۴۵-** *(بابک سادات)*

$$x=1: f(1)=\sqrt{e^0}=1 \Rightarrow A(1,1)$$

$$f'(x)=\frac{(1-2x)e^{x-x^2}}{2\sqrt{e^{x-x^2}}}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{-e^0}{2\sqrt{e^0}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب خط قائم}=2$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط قائم}: y-1=2(x-1)$$

$$\xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ}: y-1=-2 \Rightarrow y=-1$$

*(مشتق توابع) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۷۵ تا ۷۹)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**-۱۴۶** (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{x^۲}{۲}$$

$$f'(x)=\frac{-۱}{x^۲}+x=\frac{x^۳-۱}{x^۲}$$

حالا مشتق را تعیین علامت می‌کنیم:

| $x$ | | $۰$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x^۳-۱)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $x^۲$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f'$ | $-$ | | $-$ | $۰$ | $+$ |
| $f$ | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| | | تعریف‌نشده | | $\min$ | |

توجه کنید که $x=۰$ در دامنه تابع نیست، پس نمی‌تواند بحرانی باشد. تنها نقطه بحرانی تابع $x=۱$ است که با توجه به جدول تعیین علامت این نقطه مینیمم نسبی تابع است.

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

**-۱۴۷** (حمید علیزاده)

$$f(x)=ax^۴+bx^۳ \xrightarrow{(-۲,-۱۶)}$$

$$-۱۶=۱۶a-۸b \Rightarrow -۲a+b=۲$$

$$f'(x)=۴ax^۳+۳bx^۲ \Rightarrow f''(x)=۱۲ax^۲+۶bx$$

$$\xrightarrow{f''(-۲)=۰} f''(-۲)=۴۸a-۱۲b=۰ \Rightarrow ۴a-b=۰$$

$$\begin{cases}-۲a+b=۲\\ ۴a-b=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۱\\ b=۴\end{cases} \Rightarrow a\times b=۴$$

(کاربردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۴)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**۱۴۸-** *(تبدیل به تست: محمدرضا میرجلیلی)*

$t$ را بایستی حذف کنیم:

$$x^۲ - y^۲ = (\frac{e^t + e^{-t}}{۲})^۲ - (\frac{e^t - e^{-t}}{۲})^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ - y^۲ = ۱$$

بنابراین مکان هندسی مورد نظر، مربوط به یک هذلولی می‌باشد.

*(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، تمرین ۷، صفحه ۱۴۸)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۴۹-** *(رسول محسنی‌منش)*

بیضی قائم، $a = ۶ - ۲ = ۴$ و طول نقطهٔ کانونی برابر ۲ است. مختصات کانون را می‌یابیم:

$$۲ + y = ۳ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow c = ۱$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۱۶ = b^۲ + ۱ \Rightarrow b^۲ = ۱۵$$

بیضی قائم: $\frac{(x-۲)^۲}{۱۵} + \frac{(y-۲)^۲}{۱۶} = ۱$

*(هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه دوم) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

**۱۵۰-** *(مهدی ملارمضانی)*

$$\int \frac{(\sqrt{x}-۱)^۲}{x} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^۲ + ۱^۲ - ۲(\sqrt{x})}{x} dx$$

$$= \int (\frac{x}{x} + \frac{۱}{x} - \frac{۲}{\sqrt{x}}) dx = \int (۱ + \frac{۱}{x} - ۲x^{-\frac{۱}{۲}}) dx$$

$$= \int ۱ dx + \int \frac{۱}{x} dx - ۲\int x^{-\frac{۱}{۲}} dx$$

$$= x + Lnx - ۴\sqrt{x} + C = x(۱ + \frac{Lnx}{x} - \frac{۴}{\sqrt{x}}) + C$$

$$\Rightarrow f(x) = ۱ + \frac{Lnx}{x} - \frac{۴}{\sqrt{x}}$$

*(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۲)*

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**۱۵۱-** *(حسین اسفینی)*

برای محاسبهٔ سطح محصور باید با توجه به نقاط شکستگی دامنه و ریشهٔ داخل قدرمطلق، انتگرال‌ها را جداگانه حساب کرد:

$$\text{سطح محصور: } \left|\int_{-۲}^{۰} x|x|dx\right| + \left|\int_{۰}^{۱} x|x|dx\right| + \left|\int_{۱}^{۲} \sin \pi x dx\right|$$

$$= \left|\int_{-۲}^{۰} -x^۲ dx\right| + \left|\int_{۰}^{۱} x^۲ dx\right| + \left|-\frac{۱}{\pi}\cos \pi x\right]_{۱}^{۲}\right|$$

$$= \left|-\frac{x^۳}{۳}\right]_{-۲}^{۰}\right| + \left|\frac{x^۳}{۳}\right]_{۰}^{۱}\right| + \left|-\frac{۱}{\pi}(\cos ۲\pi - \cos \pi)\right|$$

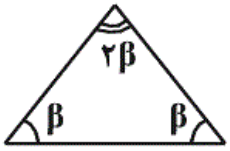
$$= \frac{۸}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{\pi} = \frac{۹}{۳} + \frac{۲}{\pi} = ۳ + \frac{۲}{\pi}$$

*(انتگرال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۹ و ۱۶۵ تا ۱۷۲)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

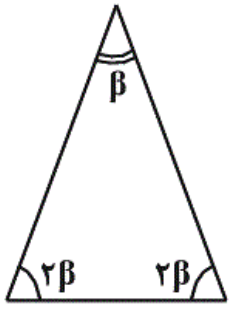
**۱۵۲-** *(حسین حاجیلو)*

دو حالت امکان‌پذیر است.




$۲\beta + \beta + \beta = ۱۸۰^\circ$

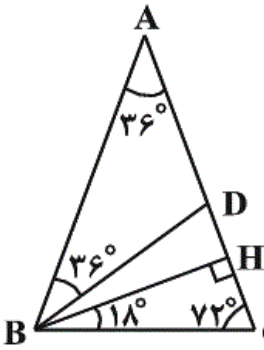
$\Rightarrow \beta = ۴۵^\circ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه است.




$\beta + ۲\beta + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow \beta = ۳۶^\circ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه نیست.

که در این حالت با توجه به شکل زیر داریم:



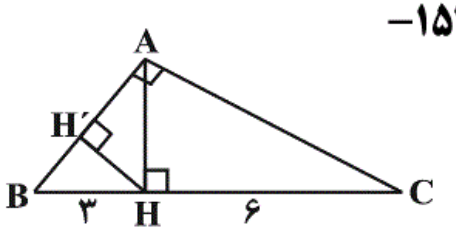

$\hat{HBD} = ۷۲^\circ - (۳۶^\circ + ۱۸^\circ) = ۱۸^\circ$

*(هندسه و استدلال) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۱ و ۲۱ تا ۲۷)*

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

**۱۵۳-** *(حسین حاجیلو)*




$$\begin{cases} AH^{۲} = BH \times CH \Rightarrow AH = ۳\sqrt{۲} \\ AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow AB = ۳\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$HH' \times AB = AH \times BH \Rightarrow HH' = \frac{۳\sqrt{۲} \times ۳}{۳\sqrt{۳}} = \sqrt{۶}$$

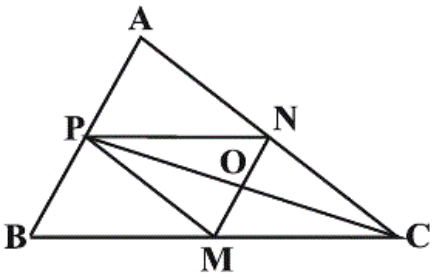
*(مساحت و قضیه فیثاغورس) (هندسه ۱، صفحه‌های ۵۳ تا ۶۷)*

۱ ۲ ۳ ۴✓

**۱۵۴-** *(حسین حاجیلو)*

طبق قضیهٔ تالس:

$$PN \parallel BC, PM \parallel AC$$




یعنی چهارضلعی $CMPN$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی می‌دانیم که با رسم قطرهای یک متوازی‌الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت ایجاد می‌شود، که $\overset{\Delta}{OMC}$ یکی از این مثلث‌ها و $\overset{\Delta}{MNP}$ متشکل از دوتا از این چهار مثلث است، پس:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{OMC})}{S(\overset{\Delta}{MNP})} = \frac{۱}{۲}$$

*(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)*

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

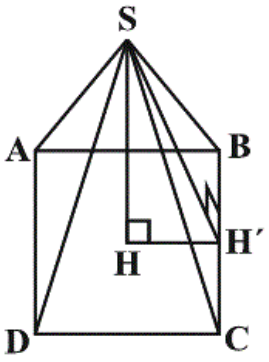
**۱۵۵-** (حسین حاجیلو)

طول ضلع قاعده، ارتفاع هرم و ارتفاع وجه هرم را به‌ترتیب $a$، $h$ و $h'$ درنظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\frac{a^2+4(\frac{1}{2}ah')}{4(\frac{1}{2}ah')}=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{a}{h'})+1=1+\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{h'}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}h'$$

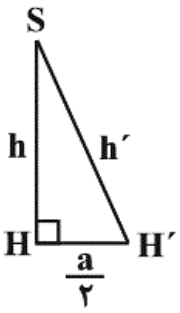



مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویهٔ $SHH'$، داریم:

$$h'^2=h^2+(\frac{a}{2})^2 \Rightarrow h'^2=h^2+(\frac{1}{\sqrt{5}}h')^2$$

$$\Rightarrow h'^2=h^2+\frac{1}{5}h'^2 \Rightarrow \frac{4}{5}h'^2=h^2$$

$$\Rightarrow \frac{h'^2}{h^2}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{h'}{h}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$




(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

www.kanoon.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا