



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، مشتق تابع، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۸۸- مشتق  $\cos \sqrt{y} = y^2 \sin x + \frac{1}{y}$  در نقطه‌ای به طول صفر روی منحنی کدام است؟ ( $0 < y < 4\pi^2$ )

(۱)  $\frac{\pi^5}{2}$  (۲)  $-\frac{\pi^5}{2}$  (۳)  $\frac{-4\pi^5}{243\sqrt{3}}$  (۴)  $\frac{-4\pi^5\sqrt{3}}{81}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- طول دو ضلع مثلث ۲ و ۵ واحد و اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی بین آن‌ها مقدار متغیر  $\alpha$  رادیان است. آهنگ تغییرات  $\alpha$  نسبت به مساحت مثلث، وقتی مساحت مثلث برابر ۴ واحد مربع می‌باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های  $y = ax^2 + bx - 9$  و  $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$  در نقطه‌ای به طول ۳، مماس مشترک دارند. دوتایی (a, b) کدام است؟

(۱) (1, -1) (۲) (-1, 1) (۳) (2, 1) (۴) (0, 1)

شما پاسخ نداده اید

۹۱- اگر  $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - x^2}$  باشد، نمودار  $f'$  در حوالی نقطه‌ای به طول صفر کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر  $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ a - 2x^3 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  در  $x=1$  پیوسته باشد، آن‌گاه  $f$  در چند نقطه مشتق پذیر خواهد بود؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۹۳- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = -2$  باشد، مشتق  $y = f(\sqrt{2} \sin x)$  در  $x = \frac{\pi}{6}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- مشتق تابع  $y = \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} x\right)$ ، به ازای  $x = 1$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  (۳)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$  (۴)  $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- اگر تابع  $f$  همواره مشتق پذیر و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = xe^x$  باشد، مشتق تابع  $f(\ln x)$  به ازای  $x = e^3$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $2$  (۴)  $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر  $f(x) = \frac{\sqrt{(x-2)^2(x+1)}}{|x^2-3|}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$  (۲)  $-2\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $2\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- تابع  $f(x) = \begin{cases} 4x & ; -2 < x \leq 0 \\ 4x^3 - 4x & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$ ، چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

- (۱)  $2$  (۲)  $3$  (۳)  $4$  (۴)  $1$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر  $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$  باشد، طول نقطه‌ی عطف تابع پیوسته  $f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $1$  (۲)  $2$  (۳)  $3$  (۴) عطف ندارد.

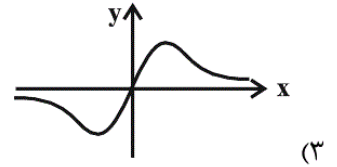
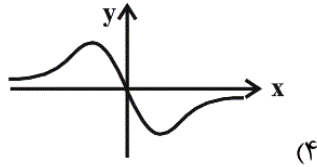
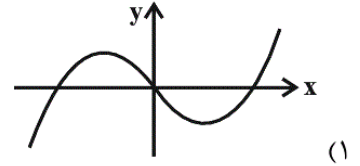
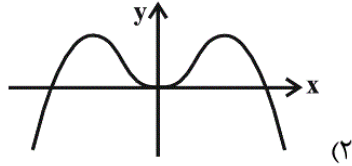
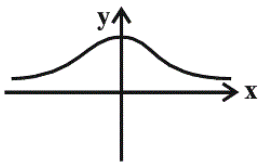
شما پاسخ نداده اید

۹۹- در تابع  $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1$  کم‌ترین مقدار شیب خط مماس بر منحنی در نقاطی به کدام طول رخ می‌دهد؟

- (۱)  $\pm 1$  (۲)  $\pm 2$  (۳)  $\pm 3$  (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر نمودار تابع  $f$  به صورت روبه‌رو باشد، آن‌گاه نمودار  $f'$  به کدام صورت خواهد بود؟



شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- قیمت فروش هر خودکار ۴۰۰ تومان است در صورتی که روزانه  $x$  خودکار فروخته شود و هزینه تولید روزانه معادل

$$4x^2 - 800x + 20000$$

- (۱) ۵۰ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۵۰ (۴) ۲۰۰

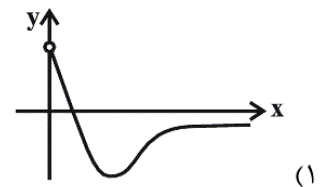
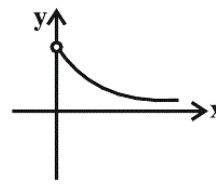
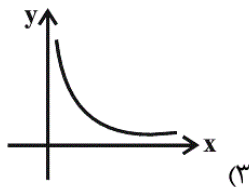
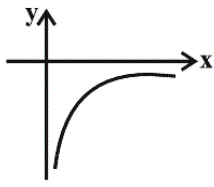
شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- نسبت تغییرات عبارت  $x^3 - 5\sqrt{x}$  به تغییرات عبارت  $x - \sqrt[3]{x}$  به ازای  $x=1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

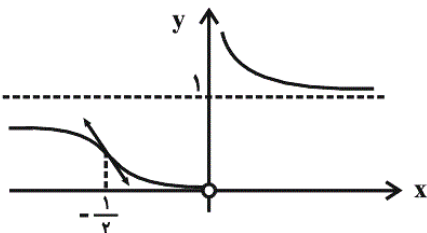
شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- نمودار تابع  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$  در بازه  $(0, +\infty)$  کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

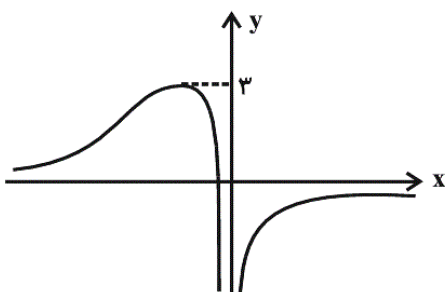
۱۰۶- نمودار تابع  $f(x) = a + \frac{b}{e^{x+c}}$  به صورت مقابل است،  $a+b+c$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

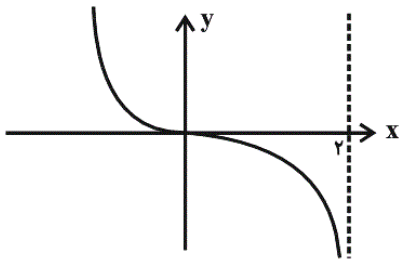
۱۰۷- شکل زیر نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 3}{x^2 - cx}$  است.  $f(1)$  کدام است؟



- (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) -۶ (۴) -۹

شما پاسخ نداده اید

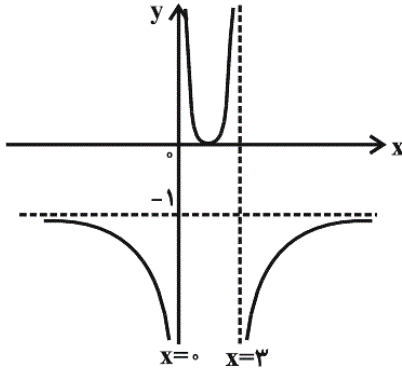
۱۰۸- قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{x^n}{x^2 - b^2x + 2b}$  به صورت زیر است. ماکزیمم مقدار  $n \times b$  کدام است؟ (  $n$  عددی طبیعی است.)



- (۱) -۳
- (۲) -۱
- (۳) ۳
- (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

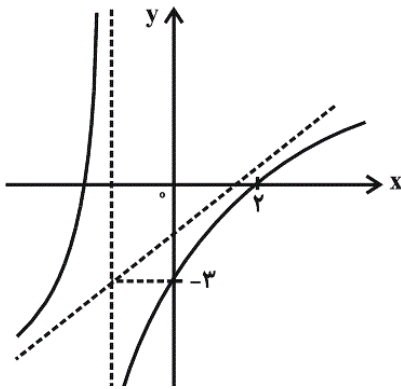
۱۰۹- نمودار تابع  $f(x) = \frac{ax^2 + bx - 4}{x^2 + cx}$  به صورت شکل زیر است.  $a + b + c$  کدام است؟



- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳)  $\frac{3}{2}$
- (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- شکل زیر مربوط به تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 2}$  است.  $a - b$  کدام است؟



- (۱) ۵
- (۲) ۷
- (۳) ۶
- (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، انتگرال - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۱۰۳- مقدار جمع  $1 + \{1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n!\}$  برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $(n+1)!$
- (۲)  $n!$
- (۳)  $(n+1)! - n!$
- (۴)  $(\frac{n!}{2})^2$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اختلاف مجموع بالا و پایین تابع  $f(x) = [\cos x]$  در بازه  $[0, 2\pi]$  به ازای  $n = 8$  کدام است؟ ( [ ] ،نماد جزء صحیح است.)

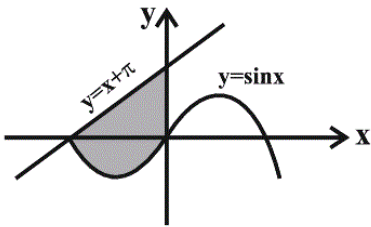
- (۱)  $\pi$
- (۲)  $2\pi$
- (۳)  $\frac{\pi}{2}$
- (۴)  $\frac{3\pi}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۱- مقدار انتگرال  $\int_{-1}^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  در کدام بازه قرار می گیرد؟

- (۱)  $[\frac{3}{2}, \frac{12}{5}]$
- (۲)  $[\frac{4}{5}, 0]$
- (۳)  $[\frac{1}{2}, \frac{4}{5}]$
- (۴)  $[0, \frac{12}{5}]$

۸۲- مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده، کدام است؟



(۲)  $2 + \frac{\pi^2}{2}$

(۱)  $2 + \frac{\pi^2}{4}$

(۴)  $\frac{\pi^2}{2} + 1$

(۳)  $\frac{\pi^2}{4} + 1$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- حاصل انتگرال  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$ ، برابر کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

شما پاسخ نداده اید

۸۴- حاصل انتگرال  $\int_0^1 |3x-1| [3x] dx$  کدام است؟ ( [ ]، نماد جزء صحیح است.)

(۴) ۲

(۳) ۱

(۲)  $\frac{7}{6}$

(۱)  $\frac{6}{7}$

شما پاسخ نداده اید

۸۵- در تابع  $f(x) = \sin^2 x$  در بازه‌ی  $[0, \pi]$ ، مقدار  $U_3$  چند برابر  $\pi$  است؟

(۴)  $\frac{4}{3}$

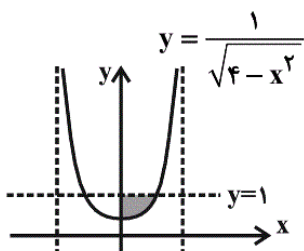
(۳)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{5}{6}$

(۱)  $\frac{6}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- در شکل زیر، مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟



(۲)  $\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

(۱)  $\frac{1}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$

(۴)  $\frac{1}{3}(\pi - \sqrt{3})$

(۳)  $3\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- اگر در تابع  $f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}$ ، رابطه‌ی  $\int_{-a}^a (f(x).f'(x) + f'(x))dx = 1$  برقرار باشد، کدام مقدار می‌تواند باشد؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- به ازای چه مقادیری از ثابت  $C$ ، نمودار معادله  $x^2 - y^2 + 6x - 2y = C$ ، یک هذلولی قائم است؟

(۲)  $C > -8$

(۱)  $C < -8$

(۴)  $C > -6$

(۳)  $C < -6$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۱۱۲- اگر  $A = [i^2 - i]_{3 \times 3}$  و  $B = [j^2 - i + 1]_{3 \times 3}$  و  $C = A + B$  باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $C$  کدام است؟

(۲) ۱۵

(۱) ۱۳

(۴) ۱۹

(۳) ۱۷

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر  $A$  ماتریس دوران حول مبدأ مختصات و به زاویه‌ی  $\frac{\pi}{4}$  باشد، آن‌گاه ماتریس  $A^{15}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(۱)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(۴)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

۱۱۴- مقدار  $x$  از معادله‌ی مقابل کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) ۳

(۳) ۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، دستگاه‌های معادلات خطی - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۱۱۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$  و  $A^{-1}BA^T = A^*$  باشد، آن‌گاه حاصل  $x + y + z + t$  کدام است؟

(۲) ۱۳

(۱) ۵

(۴) ۷

(۳) ۱۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر  $A$  یک ماتریس وارون پذیر باشد و  $|A+B|=3$ ، آنگاه حاصل  $|I+BA^{-1}|$  کدام است؟

$$\frac{3}{|A|} \quad (2) \qquad 3|A| \quad (1)$$

$$\frac{1}{9}|A| \quad (4) \qquad \frac{9}{|A|} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- در یک دستگاه معادلات خطی، ماتریس افزوده  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ -1 & b & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & c \end{array} \right]$  پس از انجام عملیات سطری مقدماتی به ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

تبدیل شده است. حاصل  $a+b+c$  کدام است؟

$$13 \quad (2) \qquad 11 \quad (1)$$

$$-11 \quad (4) \qquad 9 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

$$\begin{cases} mx + y + mz = 10 \\ 2x + my + z = 9 \\ -2x + y + mz = 6 \end{cases}$$

۱۱۸- به ازای کدام مقدار  $m$ ، فصل مشترک سه صفحه‌ی مقابل، یک نقطه می‌باشد؟

$$2 \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

$$-2 \quad (4) \qquad -1 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- سه صفحه‌ی  $2x - y - z = d$ ،  $x + by - z = 1$  و  $x + y - 2z = 3$ ، بر یک خط می‌گذرند. دوتایی  $(b, d)$  کدام است؟

$$(0, 1) \quad (2) \qquad (0, 0) \quad (1)$$

$$(1, 1) \quad (4) \qquad (1, 0) \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- دستگاه  $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$  نشان دهنده‌ی معادله‌های سه صفحه در فضا است که فصل مشترک‌های دو به دو آن‌ها با هم موازیند. اگر این دستگاه دارای جواب باشد، حاصل  $a - b$  کدام است؟

$$-5 \quad (2) \qquad -3 \quad (1)$$

$$3 \quad (4) \qquad 5 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید



۱۲۱- تعداد اعداد سه رقمی مضرب ۳ که باقیمانده‌ی تقسیم مربع آنها بر ۷ برابر ۶ است، کدام می‌باشد؟

- (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۱۴ (۳) ۱۴ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۱۲۳- رابطه‌ی  $R$  روی مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  تعریف شده است و ماتریس متناظر آن در رابطه‌ی

$$M(R) \wedge M^t(R) \ll I \ll M(R)$$

صدق می‌کند. تفاضل حداکثر و حداقل تعداد اعضای  $R$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که نه مربع کامل باشند و نه مکعب کامل؟

- (۱) ۷۰۶ (۲) ۷۴۲ (۳) ۸۳۶ (۴) ۸۷۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۲۲

۱۲۵- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم دو فرزند آخر آن‌ها دختر است. احتمال آن که این خانواده، حداقل یک پسر داشته باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{3}{16}$  (۴)  $\frac{1}{16}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- محصولات یک کارخانه توسط ۳ ماشین  $A$ ،  $B$  و  $C$  تولید می‌شوند. سهم ماشین‌های  $A$  و  $B$  به ترتیب ۶۰ و ۲۵ درصد است و تولیدات این سه ماشین به ترتیب ۹۶، ۹۴ و ۹۲ درصد سالم است. اگر یکی از محصولات این کارخانه به دلخواه انتخاب شود، چند درصد احتمال دارد که معیوب باشد؟

- (۱)  $\frac{4}{9}$  (۲) ۵ (۳)  $\frac{5}{1}$  (۴)  $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- توزیع احتمال متغیر تصادفی  $X$  با شش برآمد به صورت  $P(X=i) = \begin{cases} 2^{-i} & ; i=1,2,3 \\ a & ; i=4,5,6 \end{cases}$  است،  $P(4 \leq X \leq 6)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{1}{12}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- یک سکه‌ی سالم را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار سوم شیر بیاید. احتمال آن که دقیقاً ۷ پرتاب لازم شود، چند برابر احتمال آن است که در ۷ پرتاب، ۳ بار شیر بیاید؟

- (۱)  $\frac{1}{7}$  (۲)  $\frac{2}{7}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- چتر بازی بر روی یک زمین به شکل مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵ فرود می‌آید. احتمال این که فاصله‌ی این چتر باز از رئوس مثلث بیش از یک باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\pi}{6}$  (۲)  $\frac{\pi}{12}$  (۳)  $1 - \frac{\pi}{6}$  (۴)  $1 - \frac{\pi}{12}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- ۸ توپ مشابه را داخل ۳ جعبه قرار می‌دهیم. با کدام احتمال در جعبه‌ی اول حداقل ۲ توپ قرار می‌گیرد؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \qquad \frac{3}{5} \quad (۲) \qquad \frac{2}{15} \quad (۳) \qquad \frac{28}{45} \quad (۴)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- رابطه‌ی  $R$  روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت  $\left[\frac{4}{a}\right] = \left[\frac{4}{b}\right] \Leftrightarrow aRb$  تعریف شده است. آیا این رابطه هم‌ارزی است؟ در صورت هم‌ارزی بودن، کلاس هم‌ارزی کدام‌یک از اعضا نامتناهی است؟ ( [ ]، علامت جزء صحیح است.)

(۱) بله - ۱      (۲) بله - ۳      (۳) بله - ۵      (۴) هم‌ارزی نیست.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۲۲

-۸۸

(امیر هوشنگ فمسه)

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$f(x, y) = \cos \sqrt{y} - y^2 \sin x - \frac{1}{y}$$

$$y'_x = -\frac{-y^2 \cos x}{-\frac{1}{2\sqrt{y}} \sin \sqrt{y} - 2y \sin x}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi^2}{9}$$

$$y'_x = -\frac{-\frac{\pi^2}{81} \times 1}{-\frac{1}{\frac{2\pi}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0} = \frac{\frac{\pi^2}{81}}{-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} = -\frac{4\pi^5 \sqrt{3}}{729} = -\frac{4\pi^5}{243\sqrt{3}}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲

۱

(ایمان نفستین)

-۸۹

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times \Delta \sin \alpha \Rightarrow S = \Delta \sin \alpha \xrightarrow{S=4} 4 = \Delta \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\Delta} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{\Delta}$$

$$S = \Delta \sin \alpha \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } S} 1 = \Delta \alpha'_S \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 1 = \Delta \alpha'_S \left(\frac{3}{\Delta}\right) \Rightarrow \alpha'_S = \frac{1}{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳

۲

۱

$$\begin{cases} y_1 = ax^2 + bx - 9 \Big|_{x=3} = 9a + 3b - 9 \\ y_2 = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Big|_{x=3} = 9 - 12 = -3 \end{cases}$$

$$9a + 3b - 9 = -3 \Rightarrow 9a + 3b = 6 \Rightarrow 3a + b = 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y' = 2ax + b \Big|_{x=3} \Rightarrow y'_1 = 6a + b \\ y' = x^2 - 4 \Big|_{x=3} \Rightarrow y'_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 6a + b = 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 6a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (1, -1)$$

(مسئله - مشتق: صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آریان حیدری)

با توجه به گزینه‌ها، محاسبه مشتق چپ و راست تابع  $f$  در حوالی صفر مد نظر است.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^2(x-1)} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x^2} \sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^2} \sqrt[5]{x^3}} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f'_+(0) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow f'_-(0) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$x \in \mathbb{Q} : f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 1 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^3 - 1)}{x - 1} = 9$$

$$x \notin \mathbb{Q} : f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x^3 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1 - x^3)}{x - 1} = -6$$

بنابراین تابع مورد نظر در  $x = 1$  مشتق پذیر نیست.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به مسئله‌ی ۴ صفحه ۱۴۹ کتاب درسی دیفرانسیل

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1) = -2 \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$y = f(\sqrt{2 \sin x}) \Rightarrow y' = \frac{2 \cos x}{2\sqrt{2 \sin x}} f'(\sqrt{2 \sin x})$$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} f'(\sqrt{2 \times \frac{1}{2}}) \Rightarrow y'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} f'(1)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times -1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسابان - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۸۴ و ۱۸۱ و ۱۸۹ و دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌ی ۱۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(آریان خیری)

-۹۴

$$y = \sin^3\left(\frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} x\right)$$

$$\Rightarrow y' = 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} x\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2 \tan^{-1} x\right) \times \frac{2}{1+x^2}$$

$$\xrightarrow{x=1} y'(1) = 3 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \frac{2}{2}$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۲ و ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهم‌مهری وزیری)

-۹۵

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} xe^x$$

$$(f(\ln x))'_{(x=e^3)} = \frac{1}{x} \times f'(\ln x) \Big|_{x=e^3} = \frac{1}{e^3} f'(\ln e^3)$$

$$= \frac{1}{e^3} \times f'(3) = \frac{1}{e^3} \times \frac{1}{2} \times 3e^3 = \frac{3}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

با فرض  $-h = t$  داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(y-h) - f(y)}{h} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(y+t) - f(y)}{-t} = -f'_+(y)$$

$$x > 2 \Rightarrow f(x) = |x-2| \times \frac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3|} = \underbrace{(x-2)}_{\text{عامل صفر}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3|}$$

$$f'_+(2) = \underbrace{1}_{\text{مشتق عامل صفر}} \times \frac{\sqrt{2+1}}{\underbrace{|4-3|}_{\text{عوامل غیر صفر}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{عبارت} = -f'_+(2) = -\sqrt{3}$$

(مسئله - مشتق؛ صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۵ و دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمید علیزاده)

-۹۷

$$f(x) = \begin{cases} 4x & ; -2 < x \leq 0 \\ 4x^3 - 4x & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

تابع در بازه  $(-2, 1]$  پیوسته است.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 4 & -2 < x < 0 \Rightarrow f'_-(0) = 4 \\ 12x^2 - 4 & 0 < x < 1 \Rightarrow f'_+(0) = -4 \end{cases}$$

 $x = 0$  طول نقطه بحرانی است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{x \in (0,1)} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس تابع دو نقطه‌ی بحرانی دارد.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمید علیزاده)

-۹۸

ریشه‌های مضاعف مشتق اول، نقاط عطف تابع  $f(x)$  می‌باشند، بنابراین  $x = 2$  طول

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \quad \text{نقطه‌ی عطف تابع است.}$$

x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$
f'	+	۰	-	۰	+
f	↗	max	↘	↘	min ↗

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

کمترین مقدار شیب خط مماس زمانی رخ می‌دهد که  $y'$  کمترین مقدار باشد.

$$y' = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1$$

کمترین مقدار  $y'$  به ازای  $x^2 - 1 = 0$  حاصل می‌شود. پس  $x = \pm 1$ .

(مسابان - مشتق: صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۵ و دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

-۱۰۰

با توجه به نمودار تابع  $f$ ، اگر از چپ به راست روی نمودار حرکت کنیم خواهیم دید

که تابع دارای خطوط مماس با شیب مثبت می‌باشد. یعنی  $f' > 0$ ، نمودار  $f'$  بالای

محور  $x$  هاست و در نقطه‌ی  $x = 0$  مشتق برابر صفر است یعنی  $f'(0) = 0$  و برای

$x > 0$  تابع نزولی در نتیجه  $f' < 0$  است، یعنی نمودار  $f'$  پایین محور  $x$  هاست.

بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۹ و ۱۴۹ و ۱۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

-۱۰۱

فرض می‌کنیم، تعداد  $x$  خودکار در روز فروش رود، بنابراین:

$$\text{درآمد روزانه } R(x) = 40 \cdot x$$

$$\text{تابع سود: } P(x) = R(x) - C(x) = 40 \cdot x - (4x^2 - 80 \cdot x + 20000)$$

$$\Rightarrow P(x) = 40 \cdot x - 4x^2 + 80 \cdot x - 20000 = -4x^2 + 120 \cdot x - 20000$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} P'(x) = -8x + 120 = 0 \Rightarrow x = 150$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰ و ۱۷۳ تا ۱۷۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر  $f(x) = x^3 - 5\sqrt{x}$  و  $g(x) = x - \sqrt[3]{x}$  باشد، آن گاه داریم:

$$\text{نسبت تغییرات} \cong \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{3 - \frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{6-5}{2}}{\frac{2-1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ایمان نفسین)

-۱۰۵

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

$$\text{ریشه منفرجه: } 1 - e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x = 0$  صورت را صفر نمی کند پس مجانب قائم است.

با مشتق گیری از تابع داریم:

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

که در این بازه منفی است. بنابراین تابع نزولی بوده و گزینه‌ی «۳» صحیح است.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مجانِب قائم تابع  $x = 0$  است. پس حتماً باید  $x = 0$  ریشه‌ی  $x + c = 0$  باشد.

یعنی  $c = 0$  پس  $f(x) = a + e^{\frac{b}{x}}$ ، از طرفی مجانِب افقی تابع  $y = 1$  است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a + e^{\frac{b}{x}} = a + e^0 = a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

پس تا اینجا  $f(x) = e^{\frac{b}{x}}$

توجه کنید که تابع در  $x = -\frac{1}{2}$  عطف دارد. یعنی  $f''(-\frac{1}{2}) = 0$ .

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2} e^{\frac{b}{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{2b}{x^3} e^{\frac{b}{x}} + \frac{b^2}{x^4} e^{\frac{b}{x}} = \frac{be^{\frac{b}{x}}}{x^3} \left( 2 + \frac{b}{x} \right)$$

$$\xrightarrow{f''(-\frac{1}{2})=0}$$

ضریب پراتز به ازای  $x = -\frac{1}{2}$  صفر نمی‌شود. زیرا  $b \neq 0$  پس باید  $2 + \frac{b}{x}$  به

ازای  $x = -\frac{1}{2}$  صفر می‌شود. پس:

$$2 + \frac{b}{(-\frac{1}{2})} = 0 \Rightarrow 2 - 2b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تابع در  $x = 0$  بجانب قائم با انفصال زوج دارد. پس باید  $c = 0$  باشد. پس

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx - 3}{x^2} \text{ وقتی } x \rightarrow \pm\infty \text{ میل می کند، } y \text{ به سمت صفر}$$

می کند. یعنی باید درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر باشد، پس  $a = 0$ . یعنی

$$f(x) = \frac{bx - 3}{x^2} \text{ تابع دارای ماکزیمم نسبی برابر } 3 \text{ است.}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{bx - 3}{x^2} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{bx - 3}{x^2} = 3 \Rightarrow 3x^2 - bx + 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=0} b^2 - 36 = 0 \Rightarrow b = \pm 6$$

اما تماس در طول منفی اتفاق افتاده است. (طول ماکزیمم نسبی منفی است.)

پس باید معادله‌ی  $3x^2 - bx + 3 = 0$  ریشه‌ی مضاعف منفی داشته باشد. یعنی

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{b}{6} < 0 \text{، پس باید } b < 0 \text{ باشد. یعنی } b = -6.$$

$$f(x) = \frac{-6x - 3}{x^2} \Rightarrow f(1) = \frac{-9}{1} = -9$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ایمان نخستین)

$x = 2$  بجانب قائم و ریشه‌ی مخرج تابع است. پس:

$$4 - 2b^2 + 2b = 0 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (b - 2)(b + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

تابع در  $x = 0$  نقطه‌ی عطف افقی دارد. پس  $x = 0$  ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد صورت

کسر است. یعنی  $(n \geq 3)$  از طرفی در  $x = 0$ ،  $f(x) \sim \frac{x^n}{2b}$  و چون نمودار در

$x = 0$  نزولی است. لذا باید  $b < 0$  باشد. یعنی  $b = -1$  قابل قبول است. بنابراین:

$$\begin{cases} n \geq 3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow nb \leq -3 \Rightarrow (nb)_{\max} = -3$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

طبق شکل داده شده مجانب‌های قائم عبارتند از  $x=0$  و  $x=3$  بنابراین  $x=3$  ریشه‌ی مخرج تابع داده شده است.

$$(3)^2 + c(3) = 0 \Rightarrow c = -3$$

از طرفی مجانب افقی تابع خط  $y = -1$  است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} \Rightarrow a = -1$$

در ضمن نمودار تابع بر محور  $x$  ها مماس است پس  $ax^2 + bx - 4 = 0$  دارای ریشه مضاعف است. یعنی  $\Delta = 0$  بنابراین:

$$b^2 - 4(-1)(-4) = 0 \Rightarrow b = \pm 4$$

اگر  $b = 4$  باشد. آن گاه  $-x^2 + 4x - 4 = 0$  در نتیجه  $x = 2$  که قابل قبول است. پس:

$$a + b + c = (-1) + (4) + (-3) = 0$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عمیر علیزاده)

-۱۱۰

محل برخورد مجانب‌ها  $(-2, -3)$   $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2, -3)$

$$\begin{array}{r} x^2 + ax + b \\ -(x^2 + 2x) \\ \hline (a-2)x + b \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x+a-2 \Rightarrow y = x+a-2 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{(-2, -3)} -3 = -2 + a - 2 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + b}{x + 2} \Rightarrow f(2) = 0 \Rightarrow \frac{6 + b}{4} = 0 \Rightarrow b = -6$$

$$\Rightarrow a - b = 1 - (-6) = 7$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = \sum_{k=1}^n k \times k! = \sum_{k=1}^n ((k+1) - 1)k!$$

$$= \sum_{k=1}^n ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

$\Rightarrow$  عبارت خواسته شده سوال  $= (n+1)!$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۳ تا ۲۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیا مقرر نیاک)

-۱۰۴

$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow U_8(f) = \frac{\pi}{4}(1 + 0 + 0 + (-1) + (-1) + 0 + 0 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow L_8(f) = \frac{\pi}{4}(0 + 0 + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + 0 + 0) = -\pi$$

$$\Rightarrow U_8(f) - L_8(f) = 0 - (-\pi) = \pi$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(قاسم کتابچی)

اگر  $m$  و  $M$  به ترتیب می‌نیم و ماکزیمم مطلق تابع پیوسته‌ی  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  باشند:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in [-1, 2]$$

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(2) = \frac{4}{5}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(2) = M, \quad f(0) = m$$

$$0 \leq \int_{-1}^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx \leq \frac{4}{5}(2+1) \Rightarrow 0 \leq \int_{-1}^2 \frac{x^2}{1+x^2} dx \leq \frac{12}{5}$$

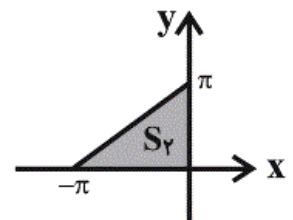
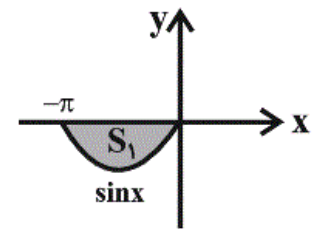
(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۵ تا ۲۳۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(قاسم کتابچی)

$$\begin{cases} S_1 = \int_{-\pi}^0 |\sin x| dx = \cos x \Big|_{-\pi}^0 = 2 \\ S_2 = \frac{\pi \times \pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$



(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

می‌دانیم  $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$  است. پس داریم:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

از طرفی می‌دانیم  $\frac{1}{\sin^2 x} = (1 + \cot^2 x)$  و  $\frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)$  پس

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x) - (1 + \tan^2 x) dx = (-\cot x - \tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{داریم:}$$

$$= \frac{-2}{\sin^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 - \left( \frac{-2}{1} \right) = 2$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 3x < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{3} \\ 1 \leq 3x < 2 \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 2 \leq 3x < 3 \Rightarrow [3x] = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 |3x-1| [3x] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x)(0) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (3x-1)(1) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 (3x-1)(2) dx$$

$$= 0 + \left( \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} + (3x^2 - 2x) \Big|_{\frac{2}{3}}^1$$

$$= \left( \left( \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \right) - \left( \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) \right) + \left( (3-2) - \left( \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \right) \right)$$

$$= \left( 0 - \left( -\frac{1}{6} \right) \right) + (1-0) = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f'(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\pi - 0}{3} = \frac{\pi}{3}$$

	$\Delta x$	$\Delta x$	$\Delta x$	
$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$

$$U_3 = \left( \frac{3}{4} + 1 + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{6} \pi$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۳۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ابتدا طول نقطه‌ی برخورد خط  $y = 1$  با تابع را به دست می‌آوریم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = 1 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3} \quad (x > 0)$$

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \left( x - \sin^{-1} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$f(x) = \frac{x}{x^f + 1} \Rightarrow f(-x) = \frac{-x}{x^f + 1} = -f(x)$$

چون تابع  $f(x)$  تابعی فرد است، پس  $f'(x)$  تابع زوج است و خواهیم داشت:

$$\int_{-a}^a \underbrace{f(x).f'(x)}_{\text{فرد}} dx + \int_{-a}^a f'(x) dx = 1 \Rightarrow 0 + 2 \int_0^a f'(x) dx = 1$$

$$2f(x) \Big|_0^a = 1 \Rightarrow f(a) - f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{a^f + 1} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$a^f + 1 = 2a \Rightarrow a = 1$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۳۹ تا ۲۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۶۰۲۲۲

(سیدامیر ستوده)

-۱۱۱

$$x^2 - y^2 + 6x - 2y = C$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6x + 9) - 9 - (y^2 + 2y + 1) + 1 = C$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 - (y+1)^2 = C+8$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 - (x+3)^2 = -C-8$$

برای این که هذلولی قائم باشد، لازم است عبارت طرف دوم مثبت گردد، پس

داریم:

$$-C-8 > 0 \Rightarrow C < -8$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۶۰۲۲۲

(رضا عباسی اصل)

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} &= [i^2 - i + j^2 - i + 1]_{3 \times 3} = [i^2 - 2i + 1 + j^2]_{3 \times 3} \\ &= [(i-1)^2 + j^2]_{3 \times 3} \end{aligned}$$

$$C_{11} = (1-1)^2 + 1 = 1, C_{22} = (2-1)^2 + 2^2 = 5$$

$$C_{33} = (3-1)^2 + 3^2 = 13$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $\mathbf{C}$ ، برابر ۱۹ است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۹)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(معمربواد نوری)

- ۱۱۳

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \mathbf{A}^{15} = (\mathbf{R}_{\frac{\pi}{4}})^{15} = \mathbf{R}_{\frac{15\pi}{4}}$$

$$\mathbf{R}_{\frac{15\pi}{4}} = \mathbf{R}_{(-\frac{\pi}{4})} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \quad \text{اما } \frac{15\pi}{4} = 4\pi - \frac{\pi}{4} \text{ پس:}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

 ۴

 ۳ ✓

 ۲

 ۱

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} x & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right| = \underbrace{\left| \begin{array}{ccc|ccc} x & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc|ccc} x & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right|}$$

سطرهای دوم و سوم یکسان است.

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} x & 3 & 5 & x & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|ccc} x & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = -5x + 12$$

ستون‌های اول و دوم یکسان است.

$$-5x + 12 = 2 \Rightarrow x = 2$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، دستگاه‌های معادلات خطی - ۱۳۹۶۰۲۲۲

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^*$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{|\mathbf{A}|\mathbf{I}} \mathbf{A}^* \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})}_{\mathbf{I}} \mathbf{B}\mathbf{A}^T = |\mathbf{A}|\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{A}^T = |\mathbf{A}|\mathbf{I} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^T)^{-1}}_{\mathbf{I}} = |\mathbf{A}|\mathbf{I} \underbrace{(\mathbf{A}^T)^{-1}}_{(\mathbf{A}^{-1})^T}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = |\mathbf{A}|(\mathbf{A}^{-1})^T \Rightarrow \mathbf{B} = |\mathbf{A}| \left( \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* \right)^T$$

$$= |\mathbf{A}| \times \frac{1}{|\mathbf{A}|} (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^*)^T$$

ماتریس  $\mathbf{A}^*$ ، ماتریس ترانهادی ماتریس همسازه‌های  $\mathbf{A}$  است پس  $(\mathbf{A}^*)^T$  همان

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ماتریس همسازه‌های } \mathbf{A} \text{ است و خواهیم داشت:}$$

$$\Rightarrow x + y + z + t = 7 + (-1) + (-3) + 2 = 5$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی ایمانی)

-۱۱۶

$$|\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}| = |(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}|$$

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| |\mathbf{A}^{-1}| = 3 |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{3}{|\mathbf{A}|}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نصیر مصبی نژاد)

$$\begin{cases} -x = 2 \Rightarrow x = -2 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -x + by - 2z = -2 \\ y + 3z = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + 4 - 3 = a \Rightarrow a = -1 \\ 2 + 2b - 6 = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b + c = 11 \\ 2 + 9 = c \Rightarrow c = 11 \end{cases}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۴۶ تا ۱۴۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(امیرحسین ابومحبوب)

شرط اشتراک سه صفحه در یک نقطه، آن است که  $|A| \neq 0$ ، پس:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 2 & m & 1 \\ -2 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (m^3 + 2m - 2) - (-2m^2 + 2m + m) = m^3 + 2m^2 - m - 2$$

$$|A| = (m - 1)(m + 1)(m + 2) \neq 0 \Rightarrow m \neq 1, -1, -2$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

چون هر سه صفحه بر یک خط می‌گذرند، پس دترمینان ضرایب مجهولات برابر

صفر است. داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & b & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3b = 0 \Rightarrow b = 0$$

و یک نقطه مشترک سه صفحه، به صورت  $(-1, 1, 0)$  است، پس  $d = 0$

(هنر سه تملیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر فصل مشترک‌های سه صفحه در فضا، دو به دو با هم موازی باشند، آنگاه دستگاه نظیر معادلات این سه صفحه یا جواب ندارد (در حالتی که فصل مشترک‌ها نامنتطبق باشند) یا دارای بی‌شمار جواب است (در حالتی که فصل مشترک‌ها منتطبق‌اند). وقتی دستگاه بی‌شمار جواب دارد، یکی از معادله‌ها از افزودن مضربی از یک معادله به معادله‌ی دیگر به دست می‌آید. در این جا چون دستگاه جواب دارد، پس در واقع دارای بی‌شمار جواب است. اگر به دستگاه

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

خوب دقت کنید، معادله‌ی سوم، از کم کردن

معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم به دست می‌آید، یعنی باید داشته باشیم:

$$x + y + 3z - 3 - (2x - y - z - 1) = -x + 2y + 4z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -x + 2y + 4z = 2 \Rightarrow a = -1, b = 4$$

$$\Rightarrow a - b = -1 - 4 = -5$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، همنهشتی، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۶۰۲۲۲

اگر چنین عددی  $x$  فرض شود، داریم:

$$x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 0, 1, 4, 2 \pmod{7}$$

بنابراین معادله  $x^2 \equiv 6 \pmod{7}$ ، هیچ‌گاه جواب ندارد و در نتیجه هیچ عدد سه رقمی

(مضرب ۳ یا غیرمضرب ۳) با این مشخصات موجود نیست.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

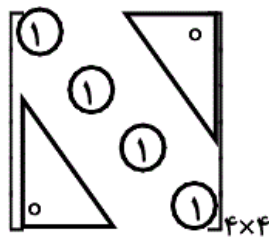
۲

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، ترکیبیات - ۱۳۹۶۰۲۲۲



می‌دانیم  $I \ll M$ ، یعنی  $R$  بازتابی است و  $M \wedge M^t \ll I$ ، یعنی  $R$  پادتقارنی است. از طرفی می‌دانیم شرط بازتابی بودن آن است که درایه‌های روی قطر اصلی همواره ۱ باشد و برای پادتقارنی بودن هر زوج درایه می‌تواند سه حالت  $(0,0)$ ،  $(1,0)$  و  $(0,1)$  را داشته باشد. حال برای به دست آوردن حداقل تعداد اعضای  $R$  فقط کفایت تمام درایه‌های قطر اصلی ۱ و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشد. یعنی:  $n(R)_{\min} = 4$



و حداکثر تعداد اعضای  $R$  زمانی است که زوج درایه‌ها یکی از ۲ حالت  $(0,1)$  و  $(1,0)$  را داشته باشند. یا به عبارتی نصف درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ۱ باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \Rightarrow n(R)_{\max} = 4 + 6 = 10$$

$$n(R)_{\max} - n(R)_{\min} = 10 - 4 = 6 \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اعداد مکعب کامل ۳ رقمی  $B =$  و اعداد مربع کامل ۳ رقمی  $A =$

$$100 \leq k^2 \leq 999 \Rightarrow 10 \leq k \leq 31 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A| = 22$$

$$100 \leq k^3 \leq 999 \Rightarrow 5 \leq k \leq 9 \xrightarrow{\text{تعداد}} |B| = 5$$

$$100 \leq k^6 \leq 999 \Rightarrow k = 3 \xrightarrow{\text{تعداد}} |A \cap B| = 1$$

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$= 90 - (22 + 5 - 1) = 874$$

↓  
کل اعداد ۳ رقمی

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۲۲

دو فرزند آخر دختر است. فضای نمونه‌ای مربوط به دو فرزند اول به صورت زیر است.

$$S = \{(پ و پ), (د و پ), (پ و د), (د و د)\}$$

حالت مطلوب آن است که حداقل یکی از فرزندان پسر باشد. پس داریم:

$$A = \{(پ و پ), (د و پ), (پ و د)\}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱

$$\text{محصول} \begin{cases} \frac{60}{100} & A \Rightarrow \frac{4}{100} & \text{معیوب} \\ \frac{25}{100} & B \Rightarrow \frac{6}{100} & \text{معیوب} \\ \frac{15}{100} & C \Rightarrow \frac{8}{100} & \text{معیوب} \end{cases}$$

$$P(\text{معیوب}) = \frac{60 \times 4 + 25 \times 6 + 15 \times 8}{10000} = \frac{240 + 150 + 120}{10000}$$

$$= \frac{510}{10000} = 5.1\%$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معدی زاهدی)

-۱۲۷

می‌دانیم در توزیع احتمال متغیر تصادفی  $X$ ،  $\sum_{i=1}^6 P(X=i) = 1$  می‌باشد.

$i$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X=i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$a$	$a$	$a$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + a + a + a = 1 \Rightarrow \frac{7}{8} + 3a = 1 \Rightarrow 3a = 1 - \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 3a = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{24}$$

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سعید زوارقی)

در حالت اول که دقیقاً ۷ بار باید پرتاب شود، حتماً در ۶ بار اول، ۲ بار شیر آمده و در پرتاب هفتم سومین شیر آمده است. احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{128}$$

احتمال این که در ۷ پرتاب، ۳ بار شیر بیاید برابر است با:

$$\frac{\binom{7}{3}}{2^7} = \frac{35}{128}$$

پس نسبت احتمالها برابر  $\frac{15}{35}$  یعنی  $\frac{3}{7}$  است.

(ریاضیات گسسته - توزیع‌های گسسته احتمال: صفحه‌های ۹۱ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

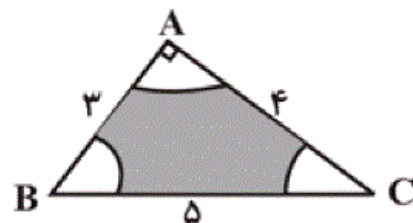
 ۲

 ۱

(مهمربواد نوری)

$$P(A) = \frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{\text{مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث}}{\text{مساحت مثلث}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 3 \times 4 - \frac{\pi(1)^2}{2}}{\frac{1}{2} \times 3 \times 4} = 1 - \frac{\pi}{12}$$



(پیرواحتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس؛ مشابه مثال ۵ صفحه‌ی ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون توپ‌ها مشابه‌اند از معادله‌ی خطی استفاده می‌کنیم:  $(X_1, X_2, X_3)$  تعداد توپ‌های

جعبه I ام است)

$$X_1 + X_2 + X_3 = 8$$

$$\Rightarrow n(S) = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

چون  $X_1 \geq 2$ ، پس  $X_1 = X'_1 + 2$  و داریم:

$$X'_1 + X_2 + X_3 = 6 \Rightarrow n(A) = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{45}$$

پس:

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷ - احتمال: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱

$$\forall a \in \mathbb{N}; \left[\frac{4}{a}\right] = \left[\frac{4}{a}\right] \Rightarrow aRa \quad \mathbf{R} \text{ بازتابی است.}$$

$$aRb \Rightarrow \left[\frac{4}{a}\right] = \left[\frac{4}{b}\right] \Rightarrow \left[\frac{4}{b}\right] = \left[\frac{4}{a}\right] \Rightarrow bRa \quad \mathbf{R} \text{ متقارن است.}$$

$$aRb \text{ و } bRc \Rightarrow \left[\frac{4}{a}\right] = \left[\frac{4}{b}\right] \text{ و } \left[\frac{4}{b}\right] = \left[\frac{4}{c}\right] \Rightarrow \left[\frac{4}{a}\right] = \left[\frac{4}{c}\right]$$

$$\Rightarrow aRc \quad \mathbf{R} \text{ تراییبی است.}$$

بنابراین  $\mathbf{R}$  رابطه‌ای هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه عبارتند از:

$$[1] = \{x \in \mathbb{N} : \left[\frac{4}{1}\right] = \left[\frac{4}{x}\right]\} = \{1\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{N} : \left[\frac{4}{2}\right] = \left[\frac{4}{x}\right]\} = \{2\}$$

$$[3] = \{x \in \mathbb{N} : \left[\frac{4}{3}\right] = \left[\frac{4}{x}\right]\} = \{3, 4\}$$

$$[5] = \{x \in \mathbb{N} : \left[\frac{4}{5}\right] = \left[\frac{4}{x}\right]\} = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

کلاس هم‌ارزی  $[5]$  نامتناهی است.

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

www.kanoon.ir