



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ، هندسه ۲ ، استدلال (هندسه ی ۲) ، استدلال در هندسه - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۳۱- مجموع زاویه های داخلی ۵ ضلعی محدبی با ۲۱ برابر اندازه ی یک زاویه ی خارجی از n ضلعی منتظمی برابر است. این n ضلعی چند قطر دارد؟

- (۱) ۷۷ (۲) ۶۵ (۳) ۹۰ (۴) ۱۰۴

شما پاسخ نداده اید

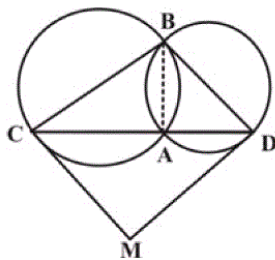
۱۳۲- در مثلث ABC ، AM میانه ی ضلع BC و O نقطه ی همرسی میانه ها است. مساحت مثلث OMC چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲ ، دایره - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۳۳- مطابق شکل، دو دایره در نقاط A و B متقاطعند. از نقطه ی A خطی رسم می کنیم تا دو دایره را در نقاط C و D قطع کند. سپس از C و D مماس هایی بر هر یک از دایره ها رسم می کنیم که این مماس ها در نقطه ی M متقاطع اند. اگر $DM > DB$ و $CB > CM$ ، چهارضلعی $BCMD$ چگونه است؟



- (۱) فقط محاطی (۲) فقط محیطی
(۳) هم محیطی و هم محاطی (۴) نه محیطی و نه محاطی

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- اگر مماس مشترک های داخلی دو دایره ی $C(O, 2)$ و $C'(O', 4)$ بر هم عمود باشند، طول خط المرکزین این دو دایره کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{2}$ (۲) ۹
(۳) $6\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲ ، تبدیل ها - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۳۵- اگر نقطه‌ی $(1, -2)$ تصویر نقطه‌ی $(2, 5)$ تحت تبدیل $T(x, y) = (x - a, 2y + 3b)$ باشد، آن گاه نقطه‌ی $(5, 2)$ تصویر کدام نقطه

تحت T است؟

- (۱) $(-5, 7)$ (۲) $(6, -7)$
 (۳) $(-5, -7)$ (۴) $(6, 7)$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- نقطه‌ی $M(k - 2, k + 3)$ روی دوران یافته‌ی خط به معادله‌ی $\sqrt{3}x - 3y = 0$ حول مبدأ، تحت زاویه‌ی 60° قرار دارد. مجموع طول

و عرض نقطه‌ی M کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۵ (۴) ۶

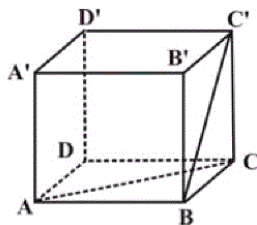
شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- تحت تجانس به مرکز $O(4a - 1, b + 1)$ ، نقطه‌ی $A(-1, 3)$ بر نقطه‌ی $B(3, 2)$ تصویر می‌شود. $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲
 (۳) -۱ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه ۲، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی ۲)، هندسه‌ی فضایی - ۱۳۹۶۰۲۰۱



۱۳۸- در مکعب شکل زیر، زاویه‌ی بین دو پاره‌خط AC و BC' کدام است؟

- (۱) 90° (۲) 60°
 (۳) 45° (۴) 30°

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

- (الف) اگر دو صفحه موازی باشند، هر صفحه‌ای که آن دو را قطع کند، فصل مشترک‌های حاصل، دو خط موازی‌اند.
 (ب) اگر دو صفحه متقاطع باشند، هر صفحه‌ای که هر دو را قطع کند، فصل مشترک‌های حاصل، دو خط موازی‌اند.
 (ج) اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه، با صفحه‌ی دیگر موازی است.

- (۱) صفر (۲) ۱
 (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در کدام حالت دو خط D و D' همواره با هم موازی اند؟

(۱) هر کدام بر یکی از دو خط موازی عمود باشد.

(۲) هر دو با صفحه‌ی معلوم P موازی باشند.

(۳) خط D فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع و D' موازی با این دو صفحه باشد.

(۴) هر کدام بر یکی از دو صفحه‌ی متقاطع عمود بر هم، عمود باشد.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۸۱- تابع با ضابطه‌ی $y = \min\{\sin x, \cos x\}$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ ، چند نقطه‌ی اکسترمم نسبی دارد؟

(۱) ۵

(۲) ۶

(۳) ۳

(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۲- حدود k کدام باشد، تا تابع $f(x) = \begin{cases} 2|x| - x^2 & ; x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، ولی ماکزیمم مطلق نداشته باشد؟

(۱) $0 \leq k \leq 1$

(۲) $k \leq 0$

(۳) $0 < k < 1$

(۴) $k < 0$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر نقطه‌ی $(-2, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{ax+1}{x^2+b}$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $-\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{9}{2}$

(۴) $\frac{7}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اگر $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 6x + 5)$ باشد، در این صورت f به ترتیب دارای ماکزیمم نسبی و است.

..... می‌نیمم نسبی است.

(۱) ۱، ۲

(۲) ۲، ۱

(۳) ۱، ۱

(۴) صفر، ۱

شما پاسخ نداده اید

۸۵- در کدام حالت تابع $y = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ فاقد اکسترمم است؟

(۱) $a > 0$

(۲) $a < 0$

(۳) $b > 0$

(۴) $b < 0$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- کدام گزینه در مورد تابع $y = x^2 e^{-x^2}$ صحیح است؟

(۱) دارای دو می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

(۲) دارای یک می‌نیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

(۳) دارای یک می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی است.

(۴) دارای دو می‌نیمم نسبی و دو ماکزیمم نسبی است.

شما پاسخ نداده اید

۸۷- کدام گزینه در مورد اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^2 \ln x$ صحیح است؟

(۱) تابع ماکزیمم نسبی به عرض $\frac{-1}{2e}$ دارد.

(۲) تابع می‌نیمم نسبی به عرض $\frac{-1}{2e}$ دارد.

(۳) تابع ماکزیمم نسبی به عرض $2e$ دارد.

(۴) تابع می‌نیمم نسبی به عرض $2e$ دارد.

شما پاسخ نداده اید

۸۸- تابع $f(x) = \Delta \cos 3x - k \cos 5x$ در $x = \pi$ می‌نیمم نسبی دارد. مقدار k کدام می‌تواند باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۹- در کدام بازه تابع $f(x) = e^{(x-3x^2)} - 1$ صعودی اکید و تقعر نمودار آن رو به پایین است؟

(۱) $(-\frac{5}{6}, +\infty)$

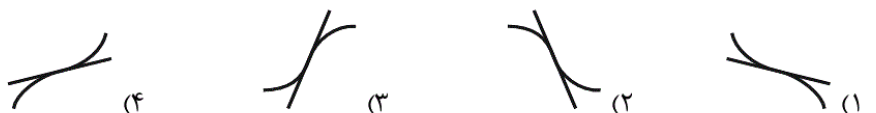
(۲) $(\frac{-1-\sqrt{6}}{6}, \frac{-1+\sqrt{6}}{6})$

(۳) $(\frac{1-\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{6})$

(۴) $(-\infty, \frac{5}{6})$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- نمودار تابع $f(x) = x^2 + 9\sqrt[3]{x}$ در اطراف $x = 1$ چگونه است؟



۹۱- کدام یک از توابع زیر، نقطه‌ی عطف دارد؟

$$y = |\tan x| \quad (۲)$$

$$y = \tan^{-1} |x| \quad (۱)$$

$$y = |\tan^{-1} x| \quad (۴)$$

$$y = \tan |x| \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر در تابع f داشته باشیم $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ، آن‌گاه منحنی این تابع چند نقطه‌ی عطف دارد؟

$$۱ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$۳ \quad (۴)$$

$$(۳) \text{ ۲}$$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- به ازای چند مقدار صحیح k ، تابع $f(x) = x^4 - kx^3 + 6x^2$ ، نقطه‌ی عطف ندارد؟

$$۸ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ ۷}$$

$$۱۰ \quad (۴)$$

$$(۳) \text{ ۹}$$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- نقطه‌ی عطف تابع $y = e^{(\tan^{-1} x)}$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

$$(۲) \text{ دوم}$$

$$(۱) \text{ اول}$$

$$(۴) \text{ چهارم}$$

$$(۳) \text{ سوم}$$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- طول نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$$(۲) \text{ عطف ندارد.}$$

$$(۱) \frac{\pi}{۲}$$

$$(۴) \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}$$

$$(۳) \pi$$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- حجم یک گلوله برفی در حال غلتیدن در هر دقیقه $9m^3$ زیاد می‌شود. در لحظه‌ای که قطر گلوله به ۶ متر می‌رسد، آهنگ افزایش

شعاع کدام است؟

$$(۴) \frac{۱}{۲\pi} \frac{m}{\text{دقیقه}}$$

$$(۳) \frac{۱}{۴\pi} \frac{m}{\text{دقیقه}}$$

$$(۲) \frac{۱}{\pi} \frac{m}{\text{دقیقه}}$$

$$(۱) \frac{۱}{۳\pi} \frac{m}{\text{دقیقه}}$$

۹۷- اگر آهنگ آنی تغییر هر یک از ابعاد یک مکعب مستطیل به ترتیب برابر $۰/۰۹$ ، $۰/۰۷$ و $۱/۲$ باشد و در همان لحظه ابعاد این مکعب

مستطیل به ترتیب برابر ۶، ۹ و b باشد، در صورتی که آهنگ آنی تغییر حجم مکعب $۷۷/۱$ باشد، b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $۰/۱$ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۰

شما پاسخ نداده اید

۹۸- یک نقطه بر روی منحنی $y = \sqrt{x}$ در حال حرکت است. در لحظه‌ای که از نقطه $(۲, ۴)$ می‌گذرد، مؤلفه‌ی x آن با سرعت $۳ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

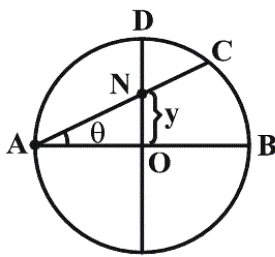
تغییر می‌کند. در این لحظه فاصله‌ی بین نقطه و مبدأ مختصات با چه آهنگی بر حسب $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ تغییر می‌کند؟

- (۱) $\frac{۲۷}{۲\sqrt{۵}}$ (۲) $\frac{۲۵}{۲\sqrt{۵}}$ (۳) $\frac{۲۷}{۴\sqrt{۵}}$ (۴) $\frac{۲۵}{۴\sqrt{۵}}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- در شکل زیر شعاع دایره ۴cm است و نقطه‌ی N به سمت D با سرعت ثابت $\frac{۱۵}{۱۰۰} (\frac{\text{cm}}{\text{s}})$ حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که

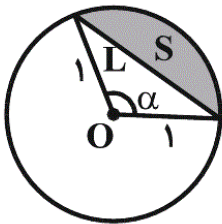
$ON = ۲\text{cm}$ باشد، طول کمان BC با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟ (O مرکز دایره است.)



- (۱) $\frac{۴۸}{۱۰۰} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (۲) $\frac{۱۲}{۱۰۰} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (۳) $\frac{۲۴}{۱۰۰} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (۴) $\frac{۳۲}{۱۰۰} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- در شکل زیر آهنگ تغییرات مساحت ناحیه هاشور خورده نسبت به L کدام است؟



- (۱) $\frac{L^3}{\sqrt{4 - (2 - L^2)^2}}$ (۲) $\frac{۲L}{\sqrt{4 - L^2}}$ (۳) $\frac{L^2}{۲\sqrt{4 - L^2}}$ (۴) $\frac{L^3}{\sqrt{4 - L^2}}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، دستگاه‌های معادلات خطی - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۱۱- اگر A ماتریس وارون پذیر، N ماتریس هم‌سازه‌ی A و A^* ترانهاده‌ی N باشد، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $N^{-1} = \frac{1}{|A|} A^t$ (۲) $AA^* = \frac{1}{|A|} I$ (۳) $|A^* N^{-1}| = 1$ (۴) $|(A^t)^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- هرگاه $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(۲) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(۳) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(۴) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است، عنصر واقع در سطر دوم و ستون سوم ماتریس الحاقی آن کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+a & 1 & -1 \\ x & 1 & x \\ -1 & 1 & x-a \end{bmatrix}$ مفروض است. حدود تغییرات a چقدر باشد تا A همواره وارون پذیر باشد؟

(۱) $a \in \mathbf{R}$

(۲) $a \geq 0$

(۳) $a \leq 0$

(۴) $a \neq 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر A ماتریس تبدیل $T(2x - y, 3x - 4y) = (x, y)$ و I ماتریس همانی باشد و α و β اعدادی حقیقی باشند به نحوی که $\alpha A^{-1} + \beta I = A$ ، مقدار β کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{2}{5}$

(۴) $\frac{4}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر $X = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P$ باشد (P ماتریس 2×2 وارون پذیر می باشد)، ماتریس X^{1389} کدام است؟

(۱) $P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P$

(۲) $(P^{-1})^{1389} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P^{1389}$

(۳) $P^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P$

(۴) $(P^{-1})^{1389} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{1389}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- اگر $|A + I| = a$ و $|A^{-1} + I| = b$ ، آن گاه $|A^t|$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟ ($a, b \neq 0$)

(۱) $a + b$

(۲) ab

(۳) $a - b$

(۴) $\frac{a}{b}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳ باشد، به گونه‌ای که $|A \cdot A^*| = 216$ ، آن گاه مقدار $|A|$ کدام است؟ (A^* ماتریس الحاقی ماتریس A است.)

- (۱) ۸
(۲) ۶
(۳) ۲۴
(۴) ۷۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر ماتریس A^t ترانزپوخته‌ی ماتریس A و $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس A^t کدام ماتریس است؟ ($|A| > 0$)

- (۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه حاصل $|ABA^{-1} - \lambda I|$ کدام است؟

- (۱) $\lambda^2 - \lambda$
(۲) $-\lambda^2 - \lambda$
(۳) λ^2
(۴) $\lambda^2 - 1$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۲۱- مکمل پیشامد « A و B رخ دهند و C رخ ندهد» کدام است؟

- (۱) $A' \cap B' \cap C'$
(۲) $(A' \cup B') \cap C'$
(۳) $(A' \cap B') \cup C'$
(۴) $A' \cup B' \cup C$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در پرتاب سه تاس سالم، احتمال آن که فقط دو تاس از سه تاس مساوی باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$
(۲) $\frac{1}{12}$
(۳) $\frac{5}{9}$
(۴) $\frac{5}{12}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- احتمال اصابت تیر به هدف برای یک تیرانداز، $\frac{1}{6}$ است. با کدام احتمال از ۳ تیر رها شده، حداقل یک تیر به هدف اصابت می کند؟

$$\frac{125}{216} \quad (1)$$

$$\frac{91}{216} \quad (2)$$

$$\frac{1}{216} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- درون یک کیسه، ده مهره با شماره‌های $1, 2, 3, \dots, 10$ وجود دارد و احتمال خارج شدن هر مهره با مکعب شماره اش متناسب است. یک

مهره به تصادف از این کیسه خارج می کنیم. احتمال آن که شماره‌ی این مهره، مضرب ۵ باشد، کدام است؟

$$\frac{143}{363} \quad (1)$$

$$\frac{45}{121} \quad (2)$$

$$\frac{823}{2541} \quad (3)$$

$$\frac{455}{1211} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- دو عدد به تصادف در بازه‌ی $[0, 2]$ انتخاب می کنیم. احتمال آن که مجموع دو عدد کوچکتر از ۳ باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{7}{8} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- از میان اعداد ۱ تا ۱۰۰۰، عددی طبیعی به تصادف بر می داریم. با کدام احتمال این عدد نه مضرب ۱۴ است و نه مضرب ۳۵؟

$$0/905 \quad (1)$$

$$0/925 \quad (2)$$

$$0/915 \quad (3)$$

$$0/935 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. اگر مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد، با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد هستند؟

$$\frac{5}{12} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- برای پیشامدهای مستقل A و B ، داریم $P(A \cap B') = 3P(A)$ و $P(A|B) = \frac{1}{5}$. مقدار $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{13}{15} \quad (3)$$

$$\frac{11}{15} \quad (4)$$

۱۲۹- در یک جمع، ۲۰ مرد و ۲۵ زن حضور دارند. در بین آن‌ها x مرد و y زن چشم‌میشی رنگ دارند. یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید A پیشامد مرد بودن و B پیشامد چشم‌میشی داشتن فرد باشد، در کدام صورت A و B همواره مستقل‌اند؟

$$3x = 2y \quad (1)$$

$$\Delta x = 4y \quad (2)$$

$$9y = 4x \quad (3)$$

$$4x = 5y \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود، $0/9$ و احتمال این‌که سفارشی به موقع برای ارسال آماده شود و به موقع به

دست مشتری برسد، $0/8$ است. اگر سفارشی به موقع آماده شود، با چه احتمالی به موقع تحویل مشتری می‌گردد؟

$$0/18 \quad (1)$$

$$0/72 \quad (2)$$

$$\frac{8}{9} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، مثلثات - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۰۴- اگر $\frac{2 \sin x + 3 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x} = -\frac{1}{2}$ باشد، در این صورت $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر $\cos 40^\circ = \frac{1-a^2}{1+a^2}$ باشد، $\cot 70^\circ$ کدام است؟ ($a > 0$)

$$a \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \quad (4)$$

$$\sqrt{a} \quad (3)$$

$$\frac{1}{a} \quad (2)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- حاصل عبارت $A = \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- در معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$ ، مجموع تمام جواب‌ها در بازه‌ی $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- انتهای کمان‌های جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 3 \sin x = 2$ روی دایره‌ی مثلثاتی، رأس‌های کدام چند ضلعی است؟

- (۱) مثلث متساوی‌الاضلاع (۲) مثلث قائم‌الزاویه
(۳) مثلث متساوی‌الساقین (۴) مربع

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- برد تابع $f(x) = 2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) $(-\pi, \pi)$ (۲) $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
(۳) $(-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ (۴) $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\cos(2 \sin^{-1} x) = 2 - 3x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

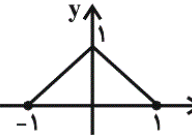
شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، تابع حسابان - ۱۳۹۶۰۲۰۱

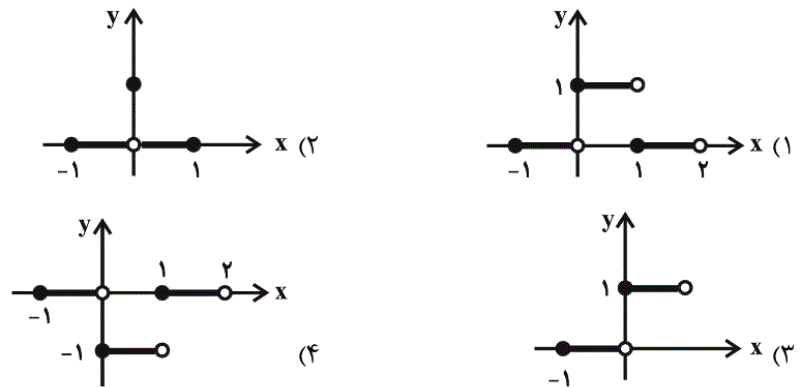
۱۰۱- هرگاه $[\frac{x}{3-2x}] = 1$ باشد، حاصل $[5x]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۵ (۴) -۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت  باشد، نمودار تابع $y = f(|x|)$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح

(است.)



شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر جواب معادله $y = 3|x| + 2|-x| = 6$ به صورت بازه $(a, b) \cup \{c\}$ باشد، $a + b - c$ کدام است؟ ([])، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲ - گواه ، استدلال (هندسه‌ی ۲) ، استدلال در هندسه - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۴۱- مثلث ABC مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث مفروض، می‌توان مثلثی متشابه با مثلث مفروض ساخت؟

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۴
(۳) ۲۵
(۴) ۲۷

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- در مثلثی به اضلاع ۶، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی آن، امتداد بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{9}{4}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲ - گواه ، دایره - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۴۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقطه‌ی O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه‌ی B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟

- (۱) متساوی‌الساقین
(۲) قائم‌الزاویه
(۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین
(۴) غیرمشخص

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایره‌ی محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است، نقطه‌ی تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$
(۲) $\frac{1}{6}$
(۳) $\frac{1}{5}$
(۴) $\frac{2}{9}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- بازتاب خط $x - 2y = 4$ نسبت به نقطه $(2, a)$ ، خط $x - 2y + 6 = 0$ است. a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- خط به معادله $2y + x = 2$ را تحت تجانس $D(x, y) = (2x, 2y)$ تبدیل و سپس نمودار حاصل را تحت بازتاب نسبت به خط

$y = -x$ تصویر می‌کنیم، معادله تصویر کدام است؟

- (۱) $2x + y + 4 = 0$ (۲) $2x - y - 4 = 0$ (۳) $2y - x - 4 = 0$ (۴) $2x + y + 1 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- نقطه A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هر

یک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) تجانس (۴) دوران

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- دو خط متناظر d و d' و نقطه دلخواه A ، خارج از آن‌ها مفروض‌اند. صفحه‌ی شامل خط d و نقطه A را P می‌نامیم. وضع خط d' با

صفحه P ، کدام است؟

(۱) خط d' هیچ‌گاه صفحه P را قطع نمی‌کند.

(۲) خط d' با صفحه P متقاطع است.

(۳) خط d' به تمامی در صفحه P قرار دارد یا با آن متقاطع است.

(۴) خط d' با صفحه P متقاطع است و یا آن را قطع نمی‌کند.

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- دو صفحه موازی P و P' و نقطه A خارج این دو صفحه مفروض است. چند خط می‌توان از نقطه A گذراند که با هر دو

صفحه P و P' موازی باشد؟

- (۱) یکی (۲) بی‌شمار (۳) دوتا (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- صفحه P و خط d و نقطه A مفروض هستند. اگر صفحه Q گذرا بر نقطه A و خط d را Q بنامیم، در کدام حالت، رسم خط گذرا

از نقطه A و متقاطع با خط d و موازی صفحه P ، غیرممکن است؟

(۱) $Q \cap P \neq \emptyset, d \parallel P$ (۲) $Q \cap P = \emptyset, d \parallel P$

(۳) $Q \cap P \neq \emptyset, d \not\parallel P$ (۴) $Q \cap P = \emptyset, d \not\parallel P$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲ ، استدلال (هندسه‌ی ۲) ، استدلال در هندسه - ۱۳۹۶۰۲۰۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۳۱

$$54^\circ = 21 \times \frac{36^\circ}{n} \Rightarrow n = 14$$

$$\text{تعداد قطرهای ۱۴ ضلعی محدب} = \frac{14 \times (14 - 3)}{2} = 77$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌های ۹ و ۱۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهدی ابراهیم کیتی زاده)

-۱۳۲

O نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC ، هر میانه را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم

می‌کند، یعنی $\frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$. اگر AH ارتفاع مثلث ABC و OH' ارتفاع

مثلث OMC باشد.

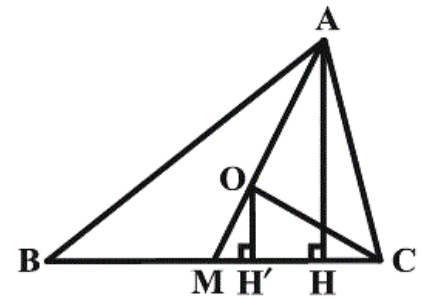
$$OH' \parallel AH \Rightarrow \frac{OH'}{AH} = \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow OH' = \frac{1}{3}AH, \quad MC = \frac{1}{2}BC$$

$$S_{\Delta OMC} = \frac{1}{2}MC \cdot OH'$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}AH \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}BC \cdot AH \right) = \frac{1}{6} (S_{\Delta ABC})$$

(هندسه ۲ - استدلال در هندسه: صفحه‌ی ۳۶)



۴ ✓

۳

۲

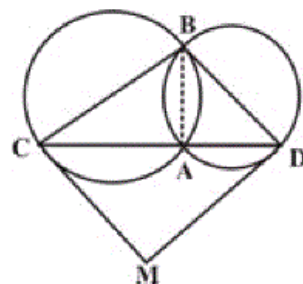
۱

ریاضی ، هندسه ۲ ، دایره - ۱۳۹۶۰۲۰۱

(نویس مپیری)

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{DCM} \text{ زاویه ی ظلی} \\ \widehat{ABC} \text{ زاویه ی محاطی} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{DCM} = \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{CDM} \text{ زاویه ی ظلی} \\ \widehat{ABD} \text{ زاویه ی محاطی} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{CDM} = \widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$



$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{CBA} = \widehat{MDC} + \widehat{MCD} \quad (1)$$

$$\triangle MCD : \widehat{MCD} + \widehat{MDC} + \widehat{CMD} = 180^\circ \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \widehat{DBC} = 180^\circ - \widehat{CMD}$$

پس این دو زاویه ی رو به رو، در چهارضلعی BCMD مکمل یکدیگرند، در نتیجه

دو زاویه ی دیگر هم مکمل اند که نشان می دهد BCMD چهارضلعی محاطی

است.

با توجه به نامساوی های داده شده، $CB + DM > CM + DB$ است و

چهارضلعی قطعاً محیطی نیست.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه های ۵۲، ۵۳ و ۵۶ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

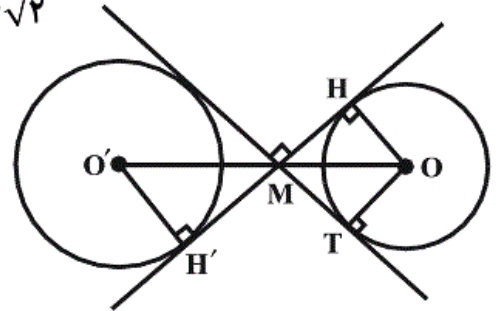
 ۲

 ۱

با توجه به همنهشتی دو مثلث OMH و OMT و عمود بودن MH بر MT ، $\widehat{OMH} = 45^\circ$ است و چون زاویه‌ی $O'MH'$ با این زاویه متقابل به رأس است، پس $\widehat{O'MH'} = 45^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین، طول وتر $\sqrt{2}$ برابر طول اضلاع قائمه است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta OMH : OH = R = 2 \Rightarrow OM = 2\sqrt{2} \\ \Delta O'MH' : O'H' = R' = 4 \Rightarrow O'M = 4\sqrt{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow OO' = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$



(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه ۲، تبدیل‌ها - ۱۳۹۶۰۲۰۱

(نوید میبیری)

$$T(x, y) = (x - a, 2y + 3b)$$

$$T(2, 5) = (1, -2) \Rightarrow (2 - a, 10 + 3b) = (1, -2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - a = 1 \\ 10 + 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow T(x, y) = (x - 1, 2y - 12)$$

پس اگر $T(x, y) = (5, 2)$ باشد، آن‌گاه:

$$(x - 1, 2y - 12) = (5, 2) \Rightarrow x = 6, y = 7$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\sqrt{3}x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

این خط با جهت مثبت محور X ها زاویه‌ی 30° می‌سازد و از مبدأ هم می‌گذرد.

چنانچه این خط حول مبدأ 60° دوران کند بر محور Y ها منطبق می‌شود، پس

$$M(k-2, k+3) \Rightarrow k-2=0, \quad k=2$$

$$M(0, 5) \Rightarrow x_M + y_M = 5$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

خط AB از O می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$m_{AB} = \frac{2-3}{3-(-1)} = -\frac{1}{4}$$

$$AB \text{ معادله‌ی } y-2 = -\frac{1}{4}(x-3) \xrightarrow{\times 4} 4y-8 = -x+3$$

$$\Rightarrow 4y+x=11$$

O(4a-1, b+1) در معادله‌ی AB صدق می‌کند، پس:

$$4(b+1) + 4a - 1 = 11 \Rightarrow 4(a+b) = 8 \Rightarrow a+b = 2$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

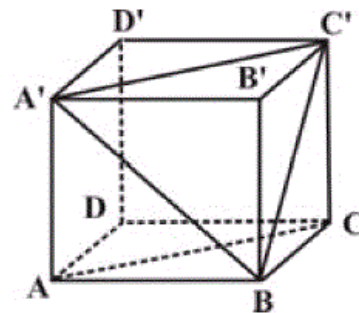
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

دو پاره خط AC و BC' متناظرند. می دانیم اگر از هر نقطه روی یکی از دو خط متناظر، خطی موازی دیگری رسم شود، آنگاه زاویه‌ی حاده یا قائمه‌ی بین این دو خط متقاطع، زاویه‌ی بین آن دو خط متناظر نامیده می‌شود. بنابراین کافی است پاره خط $A'C'$ را که موازی AC می‌باشد، رسم کنیم. مثلث $A'C'B$ ، متساوی‌الاضلاع است. پس زاویه‌ی بین دو پاره خط $A'C'$ و $C'B$ برابر 60° می‌باشد. در نتیجه زاویه‌ی بین AC و BC' نیز برابر 60° است.



(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی؛ صفحه‌ی ۱۴۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(داریوش ناظمی)

-۱۳۹

طبق مسأله‌ی ۵ صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب درسی، اگر سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، فصل مشترک‌های آن‌ها، سه خط دو به دو موازی یا سه خط هم‌مرس است.

(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدراطهر ابراهیم کیتی زاده)

-۱۴۰

طبق نتیجه‌ی ۲ صفحه‌ی ۱۴۱ کتاب درسی، خطی که با دو صفحه‌ی متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است.

(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی؛ صفحه‌ی ۱۴۱)

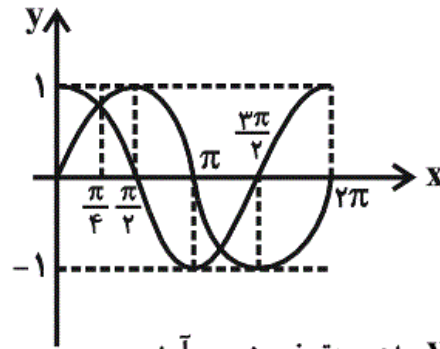
 ۴

 ۳

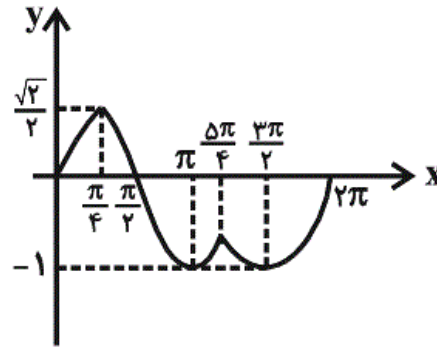
 ۲

 ۱

ابتدا نمودارهای $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع $y = \min\{\sin x, \cos x\}$ به صورت زیر در می‌آید:



تابع در بازه $(0, 2\pi)$ در نقاطی به طول‌های $\frac{\pi}{4}$ و π و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$ اکسترمم

نسبی دارد.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲

۱

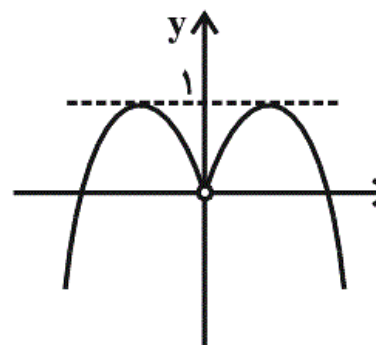
(کاظم اجلالی)

-۸۲

نمودار تابع $y = 2|x| - x^2$ و $x \neq 0$ به شکل زیر است. واضح است که اگر

$k = f(0)$ در بازه $(0, 1)$ باشد، تابع در $x = 0$ دارای ماکزیمم نسبی است

ولی ماکزیمم مطلق ندارد.



توجه کنید که اگر $k \geq 1$ باشد، آن‌گاه تابع

در $x = 0$ هم ماکزیمم نسبی و هم ماکزیمم x

مطلق دارد و اگر $k \leq 0$ باشد، تابع در

$x = 0$ دارای می‌نیمم نسبی است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow 3 + 2b - 3b - 2b^2 = 2 \Rightarrow 2b^2 + b - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ولی $b = -1$ غیر قابل قبول است، زیرا در این صورت نقطه $x_0 = 1$ در دامنه تابع نمی باشد.

$$b = \frac{1}{2}, a = -3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -4$$

$$\Rightarrow a - b = -4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فریدون ساعتی)

-۸۴

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 6x + 5)$$

$$= (x+1) \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} \underbrace{(x^2 - 3x + 4)}_{\Delta < 0} (x-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \quad \text{همواره مثبت}$$

x	-1	1	5
$(x-1)^2(x^2-3x+4)$	+	+	+
$(x+1)(x-5)$	+	-	+
P	+	-	+

↗
↘
↘
↗

نسبی Max
نسبی Min

مشتق تابع در نقاطی به طول -1 و 5 تغییر علامت می دهد، پس f در این نقاط اکسترمم نسبی دارد ولی f' در $x = 1$ تغییر علامت نمی دهد، پس f در $x = 1$ اکسترمم نسبی ندارد.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۹۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

-۸۵

$$y' = \frac{b - x^2}{(x^2 + ax + b)^2} \quad \text{مشتق تابع را حساب کرده و آن را ساده می کنیم؛}$$

برای این که تابع داده شده فاقد اکسترمم باشد، لازم است مشتق فاقد ریشه باشد و برای این کار باید $b < 0$ باشد.

دقت کنید که در حالت‌های دیگری نیز ممکن است تابع فاقد اکسترمم باشد ولی با توجه به گزینه‌ها $b < 0$ جواب است.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۹۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مقدمه‌مطبی ابراهیمی)

$$y' = 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) = 2xe^{-x^2}(1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$$

مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. می‌دانیم e^{-x^2} عبارتی همواره مثبت است، پس:

x	-1	0	1
x	-	0	+
1-x ²	-	+	-
y'	+	-	+
	↗ max	↘ min	↗ max

تابع در نقاطی به طول $x = \pm 1$ دارای ماکزیمم نسبی و در نقطه‌ای به طول $x = 0$ دارای می‌نیمم نسبی است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲✓

۱

(ممید علیزاده)

-۸۷

$$f(x) = x^2 \ln x, \quad D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2x \ln x + \frac{1}{x}(x^2) = 2x \ln x + x = 0$$

$$\Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

تقریر رو به بالاست. $f''(x) = 2 \ln(x) + 2\left(\frac{1}{x}\right) \times x + 1 > 0 \Rightarrow$ آزمون مشتق دوم

$$\Rightarrow \text{min نسبی است. } x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= -\frac{1}{2e}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

۴

۳

۲✓

۱

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = -15 \sin 3x + 5k \sin 5x \Rightarrow f'(\pi) = 0$$

مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f''(x) = -45 \cos 3x + 25k \cos 5x \Rightarrow f''(\pi) = 45 - 25k$$

اگر $f''(\pi) > 0$ باشد، آن‌گاه طبق آزمون مشتق دوم، f در $x = \pi$ مینیمم

$$45 - 25k > 0 \Rightarrow k < \frac{9}{5}$$

نسبی خواهد داشت. یعنی:

بنابراین به ازای $k = 1$ ، تابع در $x = \pi$ دارای مینیمم نسبی است.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۴ تا ۱۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(میلاد منصوری)

برای این‌که تابع صعودی اکید باشد، باید:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow (1 - 6x) e^{x-3x^2} > 0 \Rightarrow 1 - 6x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{6} \quad (1)$$

همواره مثبت است.

برای این‌که تقعر نمودار رو به پایین باشد، باید:

$$f''(x) < 0 \Rightarrow -6e^{x-3x^2} + (1-6x)^2 e^{x-3x^2} < 0$$

$$\Rightarrow (-6 + (1-6x)^2) e^{x-3x^2} < 0 \Rightarrow 36x^2 - 12x - 5 < 0$$

همواره مثبت است.

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{6}}{6} < x < \frac{1+\sqrt{6}}{6} \quad (2)$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

پس در بازه $(\frac{1-\sqrt{6}}{6}, \frac{1}{6})$ تابع صعودی اکید و دارای تقعر به سمت پایین است.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مشتق اول و دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad f''(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$$

علامت $f'(x)$ و $f''(x)$ در همسایگی $x = 1$ به صورت زیر است:

x	1	
$f'(x)$	+	+
$f''(x)$	-	+

بنابراین در اطراف $x = 1$ تابع صعودی است و در همسایگی چپ آن دارای تقعر

به سمت پایین و در همسایگی راست آن دارای تقعر به سمت بالاست.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

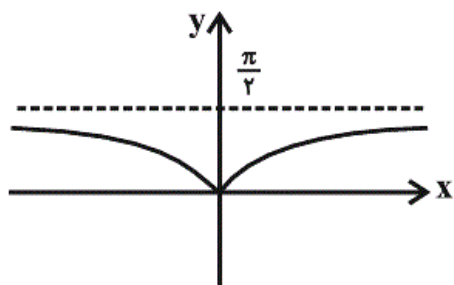
۴

۳

۲

۱

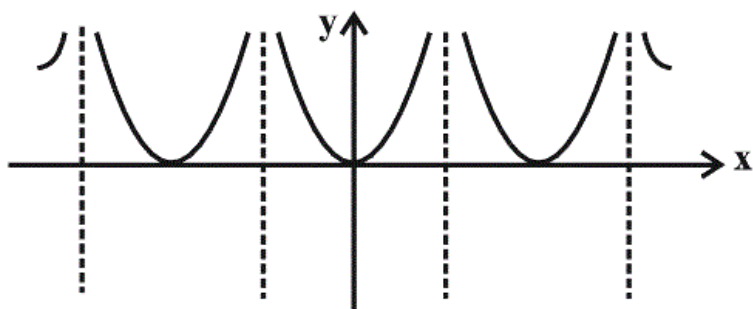
نمودار تابع $y = \tan^{-1} |x|$ و



$y = |\tan^{-1} x|$ به شکل مقابل است و

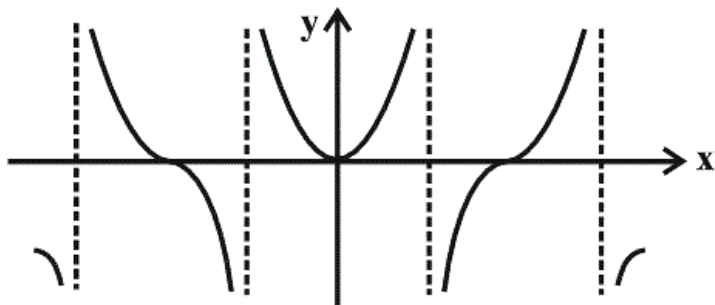
واضح است که نقطه‌ی عطف ندارند.

نمودار تابع $y = |\tan x|$ به شکل زیر است بنابراین این تابع نیز عطف ندارد.



نمودار تابع $y = \tan |x|$ به شکل زیر است و واضح است که در تمام نقاطی

که نمودار محور طول‌ها را قطع می‌کند (غیر از $x = 0$) تابع دارای عطف است.



(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

۴

۳

۲

۱

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(2x)(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0$$

$\Rightarrow x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ نقاط عطف

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$+\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+	0	-
f	↓	∴	↑	∴	↑

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

مشتق دوم تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 4x^3 - 3kx^2 + 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6kx + 12 = 6(2x^2 - kx + 2)$$

برای این که این تابع عطف نداشته باشد، کافی است مشتق دوم تغییر علامت ندهد،

پس باید در عبارت $2x^2 - kx + 2$ داشته باشیم $\Delta \leq 0$ یعنی:

$$k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

بنابراین به ازای ۹ مقدار صحیح k ، تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد رضا شوکتی بیرق)

-۹۴

$$y' = \frac{1}{1+x^2} e^{\tan^{-1} x}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \times e^{\tan^{-1} x} + \frac{1}{(1+x^2)^2} \times e^{\tan^{-1} x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{(\tan^{-1} x)}}{(1+x^2)^2} \times (1-2x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = e^{\tan^{-1}(\frac{1}{2})} > 0$$

بنابراین $x > 0$ و $y > 0$ و نقطه‌ی مورد نظر در ناحیه‌ی اول قرار دارد.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2}} = \cot \frac{x}{2}$$

تابع $y = \cot u$ در $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ دارای عطف است، بنابراین:

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

در بازه $(0, 2\pi)$ تنها $x = \pi$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ابراهیم عطالهی)

-۹۶

$$\text{حجم کره: } V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dR} = 4\pi R^2$$

قطر گلوله برابر با ۶ متر باشد. شعاع آن ۳ متر است.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \times \frac{dR}{dt} \Rightarrow 9 = 4\pi \times (3)^2 \times \frac{dR}{dt}$$

$$1 = 4\pi \times \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\text{m}}{\text{دقیقه}} \right)$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\text{حجم مکعب} \Rightarrow V = x.y.z \Rightarrow V' = x'yz + xy'z + xyz'$$

$$\Rightarrow ۷۷/۱ = (۰/۰۹)(۹)(b) + (۶)(۰/۰۷)(b) + (۶)(۹)(۱/۲)$$

$$\Rightarrow ۷۷/۱ = ۰/۸۱b + ۰/۴۲b + ۶۴/۸$$

$$\Rightarrow ۷۷/۱ = ۱/۲۳b + ۶۴/۸ \Rightarrow b = ۱۰$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

اگر D را فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی (x, y) فرض کنیم، در این صورت

$$D = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{داریم:}$$

چون نقطه‌ی (x, y) بر روی منحنی $y = \sqrt{x}$ واقع است. بنابراین در معادله‌ی

این منحنی صدق می‌کند، پس:

$$D = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + x}$$

از D نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. داریم:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{dx}{dt} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) \xrightarrow{x=4} \frac{dD}{dt} = \frac{9}{2\sqrt{20}} \times 3 = \frac{27}{4\sqrt{5}} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

آهنگ تغییر فاصله بر حسب زمان برابر $\frac{27}{4\sqrt{5}} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ است.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$OB = OA = ۴ \text{ cm} , ON = y \Rightarrow \tan \theta = \frac{ON}{OA} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{۴} \xrightarrow[\text{t مشتق می‌گیریم}]{\text{از طرفین نسبت به}} \theta'(1 + \tan^2 \theta) = \frac{1}{۴} y'$$

$$\Rightarrow \theta'(1 + \frac{1}{۴}) = \frac{1}{۴} (\frac{۱۵}{۱۰۰}) \Rightarrow \frac{۵}{۴} \theta' = \frac{۳}{۸۰} \Rightarrow \theta' = \frac{۳}{۱۰۰}$$

از طرفی θ زاویه محاطی است، پس کمان BC برابر با ۲θ است و داریم:

$$\text{BC کمان } \ell = R(۲\theta) \xrightarrow{R=۴} \ell = ۸\theta$$

$$\Rightarrow \ell' = ۸\theta' \Rightarrow \ell' = ۸(\frac{۳}{۱۰۰}) = \frac{۲۴}{۱۰۰} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$L^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos\alpha \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2-L^2}{2}\right)$$

$$S = \text{مساحت مثلث} - \text{مساحت قطاع} = \pi r^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}(1)(1)\sin\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{dS}{dL} = \frac{dS}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dL} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2}\right) \left(\frac{\frac{2L}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2-L^2}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{2}\right) \frac{2L}{\sqrt{4 - (2-L^2)^2}} = \frac{L^3}{2\sqrt{4L^2 - L^4}} = \frac{L^2}{2\sqrt{4-L^2}}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۹۲ تا ۱۹۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، دستگاه‌های معادلات خطی - ۱۳۹۶۰۲۰۱

$$۱) (A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A, N = (A^*)^t \Rightarrow N^{-1} = \left(\frac{1}{|A|} A\right)^t = \frac{1}{|A|} A^t$$

$$۲) AA^* = A^*A = |A| I = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

چون $|A^*| = |N| = |A|^{n-1}$ که n مرتبه‌ی ماتریس است، داریم:

$$۳) |A^* N^{-1}| = |A^*| |N^{-1}| = |A|^{n-1} \times \frac{1}{|A|^{n-1}} = 1$$

$$۴) |A^t| = |A|, |(A^t)^{-1}| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(همایون شریک)

- ۱۱۲

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی: صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$(\mathbf{a}_{23})^* = \Delta_{32} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرمسین ابومصوب)

-۱۱۴

روش ساروس:

$$|A| = [(x+a)(x-a) - x - x] - [1 + x(x-a) + x(x+a)]$$

$$\Rightarrow |A| = -x^2 - 2x - a^2 - 1$$

$$\Delta = 4 - 4a^2 - 4 = -4a^2$$

برای این‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد لازم است که معادله‌ی $|A| = 0$

جواب نداشته باشد. یعنی $\Delta = -4a^2 < 0$ در نتیجه $a \neq 0$.

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۱ و ۱۳۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر A ماتریس تبدیل $T(2x - y, 3x - 4y) = (x, y)$ باشد، آنگاه

وارون A ، یعنی A^{-1} ، ماتریس تبدیل $R(x, y) = (2x - y, 3x - 4y)$

$$. A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ لذا خواهد بود.}$$

بنابراین $A = (A^{-1})^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ لذا معادله‌ی مسئله تبدیل می‌شود به:

$$\alpha A^{-1} + \beta I = A \Rightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & -4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = \frac{4}{5} \\ -\alpha = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{2}{5}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

$$X = P^{-1}AP \Rightarrow X^n = P^{-1}A^nP$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{array}{r|l} 1389 & 4 \\ -1388 & 347 \\ \hline & 1 \end{array} \Rightarrow A^{1389} = A^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ مشابه تمرین ۶، صفحه‌ی ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی اصغر فرضی)

-۱۱۷

داریم: $B(A^{-1} + B^{-1})A = A + B$ حال اگر از طرفین دترمینان بگیریم

$$|B(A^{-1} + B^{-1})A| = |B + A| = |A + B| \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{|A + B|}{|A^{-1} + B^{-1}|} \Rightarrow |AI| = \frac{|A + I|}{|A^{-1} + I^{-1}|}$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{|A + I|}{|A^{-1} + I|}$$

$$\xrightarrow{|A|=|A^t|} |A^t| = \frac{|A + I|}{|A^{-1} + I|} \Rightarrow |A^t| = \frac{a}{b}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات خطی؛ صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$|A \cdot A^*| = 216 \Rightarrow |A^*| \cdot |A| = 216$$

$$\Rightarrow |A^*| = \frac{216}{|A|}$$

$$\begin{cases} |A^*| = |A|^2 \\ |A^*| = \frac{216}{|A|} \end{cases} \Rightarrow |A|^2 = \frac{216}{|A|} \Rightarrow |A|^3 = 216 = 6^3 \Rightarrow |A| = 6$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

-۱۱۹

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \left(\frac{1}{|A|} A^*\right)^t = \frac{1}{|A|} (A^*)^t$$

$$|A^*| = |A|^2 \Rightarrow 12 - 8 = |A|^2 \Rightarrow |A| = 2$$

$$(A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات قطبی: صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

$$ABA^{-1} - \lambda I = (AB - \lambda A)A^{-1} = A(B - \lambda I)A^{-1}$$

$$\Rightarrow |ABA^{-1} - \lambda I| = |A| |B - \lambda I| |A^{-1}| \left. \begin{array}{l} \\ |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow |ABA^{-1} - \lambda I| = |B - \lambda I|$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |B - \lambda I| = -\lambda + \lambda^2$$

(هندسه تحلیلی - دستگاه‌های معادلات فخطی: صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی، ریاضیات گسسته، احتمال - ۱۳۹۶۰۲۰۱

-۱۲۱

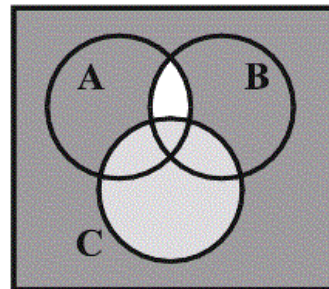
(سروش موثینی)

A و B رخ دهند یعنی $A \cap B$ و C رخ ندهد یعنی C' . پس پیشامد

صورت سؤال $(A \cap B) \cap C'$ است که مکمل آن در سؤال، خواسته شده است.

$$((A \cap B) \cap C')' \text{ دمرگان } (A \cap B)' \cup C$$

$$= (A' \cup B') \cup C$$



(بیر و احتمال - احتمال و پدیده‌های تصادفی: صفحه‌های ۲۹ و ۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(آزنگ نوید)

$$n(S) = 6^3$$

$$n(A) = \binom{3}{2} \times 6 \times 5$$

انتخاب
تاس‌های
تاسی که متفاوت

۲ تاس از
شبه هم ۶ حالت
است ۵ حالت

۳ تاس
دارد.
دارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3 \times 6 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{12}$$

(چیر و احتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(رضا پورحسینی)

اگر پیشامد A را اصابت حداقل یک تیر به هدف در نظر بگیریم، آن‌گاه پیشامد A' آن است که هیچ تیری به هدف برخورد نکند. داریم:

$$P(A') = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

مطابق فرض، احتمال رو شدن عدد ۱ با $۱^۳$ و احتمال رو شدن عدد ۲ با $۲^۳$

و ... احتمال رو شدن عدد ۱۰ با $۱۰^۳$ متناسبند و از طرفی مضارب ۵ در این

مجموعه عبارتند از ۱۰ و ۵ که احتمال آن بنابه فرض برابر است با:

$$P(A) = \frac{۱۰^۳ + ۵^۳}{۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + ۱۰^۳} = \frac{۱۱۲۵}{۳۰۲۵} = \frac{۴۵}{۱۲۱}$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳ = \left(\frac{n(n+1)}{۲}\right)^۲ \quad \text{تذکر:}$$

(چیر و احتمال - احتمال، اندازه گیری شانس؛ صفحه های ۹۵ تا ۱۰۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر دو عدد را X و Y در نظر بگیریم، باید $X + Y < ۳$ باشد.

فضای نمونه‌ای، مساحت مربعی به ضلع ۲

است.

$$a(S) = ۲ \times ۲ = ۴$$

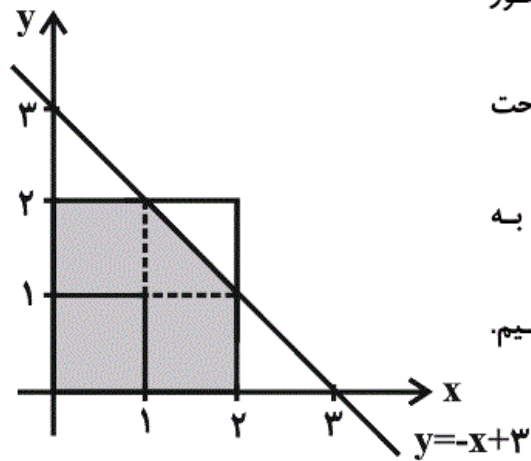
پس:

پیشامد تصادفی هم قسمت هاشور

خورده است که کافی است مساحت

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به

ضلع ۱ را از فضای نمونه‌ای کم کنیم.



پس داریم:

$$a(A) = ۲ \times ۲ - \frac{1}{۲} \times ۱ \times ۱ = \frac{۷}{۲}$$

پس داریم:

$$P(A) = \frac{a(A)}{a(S)} = \frac{\frac{۷}{۲}}{۴} = \frac{۷}{۸}$$

(بهر و احتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۹)

۴

۳

۲

۱

$$P(A) = \frac{\binom{1000}{14}}{1000} = \frac{71}{1000}$$

$$P(B) = \frac{\binom{1000}{35}}{1000} = \frac{28}{1000}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{1000}{70}}{1000} = \frac{14}{1000} \quad (\text{ک.م.م } 14 \text{ و } 35 \text{ برابر } 70 \text{ است.})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{71 + 28 - 14}{1000} = \frac{85}{1000}$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - \frac{85}{1000} = 0.915$$

(ببر و احتمال - احتمال، اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$S = \{(1,2), (2,1), (2,4), (4,2), (3,3), (1,5), (5,1)\}$$

$$\{(3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$$

حالت‌های $A = \{(3,3), (1,5), (5,1)\}$ قابل قبول می‌باشند.

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا پورحسینی)

-۱۲۸

با توجه به مستقل بودن پیشامدهای A و B ، دو پیشامد A و B' نیز مستقل

هستند و داریم:

$$P(A) = 3P(A \cap B') \Rightarrow P(A) = 3P(A)P(B')$$

$$\Rightarrow P(B') = \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{5} \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل اند}} P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{15} = \frac{3+10-2}{15} = \frac{11}{15}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۵)

$$P(A) = \frac{۲۰}{۴۵} = \frac{۴}{۹} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{x+y}{۴۵}$$

چون A و B مستقل‌اند، پس داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{x}{۴۵} \Rightarrow \frac{۴}{۹} \times \frac{x+y}{۴۵} = \frac{x}{۴۵} \Rightarrow \Delta x = ۴y$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمور رضا اسلامی)

-۱۳۰

پیشامد A را آماده شدن به موقع بسته برای ارسال و پیشامد B را به موقع به

دست مشتری رسیدن بسته در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B | A) = \frac{۰/۸}{۰/۹} = \frac{۸}{۹}$$

(ریاضیات گسسته - مشابه مثال ۴ - صفحه‌ی ۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\frac{2 \sin x + 3 \cos x}{2 \sin x - 3 \cos x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos x (2 \frac{\sin x}{\cos x} + 3)}{\cos x (2 \frac{\sin x}{\cos x} - 3)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \tan x + 3}{2 \tan x - 3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4 \tan x + 6 = -2 \tan x + 3$$

$$\Rightarrow 6 \tan x = -3 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(گرویش شاه‌نصیریان)

-۱۰۵

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha=2^\circ} \cos 4^\circ = \frac{1 - \tan^2 2^\circ}{1 + \tan^2 2^\circ}$$

$$= \frac{1 - \cot^2 7^\circ}{1 + \cot^2 7^\circ} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \Rightarrow \cot 7^\circ = a$$

(مسایان - مثلثات: صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فریدون ساعتی)

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{1} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{2 \cos \frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5}}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5})}{2 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10}} \right) = \frac{1}{4}$$

(مسائل - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

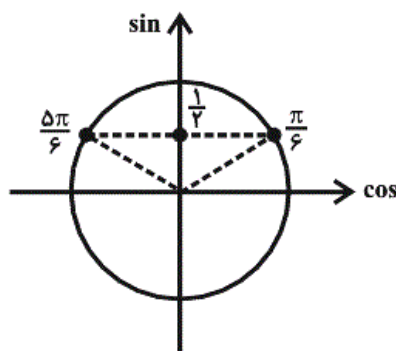
$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\sin 2x = 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin 2x = 1 - \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

توجه کنید معادله‌ی $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ در یک دور از دایره‌ی مثلثاتی دو جواب



را دارد. $\alpha = \frac{\pi}{6}$ و $\alpha = \frac{5\pi}{6}$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

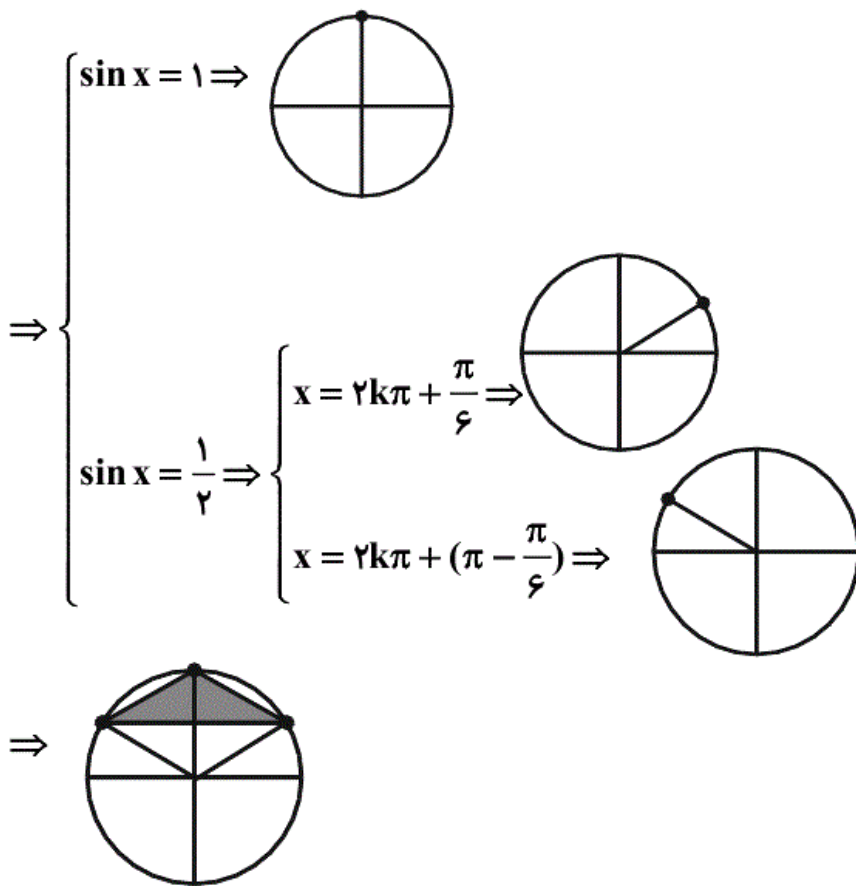
۳

۲ ✓

۱

$$\cos 2x + 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$



(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

می‌دانیم اگر $x > 0$ باشد، آن‌گاه، $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

و اگر $x < 0$ باشد، آن‌گاه، $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

بنابراین اگر $x > 0$ باشد، باید برد تابع $f(x) = \tan^{-1} x + \frac{\pi}{2}$ را حساب

کنیم که چون $0 < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ است، بنابراین $\frac{\pi}{2} < f(x) < \pi$

و اگر $x < 0$ باشد، باید برد تابع $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{2}$ را حساب کنیم که

چون $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < 0$ است، بنابراین $-\pi < f(x) < -\frac{\pi}{2}$.

پس برد تابع به شکل زیر است:

$$R_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

اگر فرض کنیم $\sin^{-1} x = \alpha$ ، آن‌گاه $\sin \alpha = x$ و در نتیجه:

$$\cos(2 \sin^{-1} x) = \cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2x^2$$

بنابراین باید معادله $1 - 2x^2 = 2 - 3x$ با شرط $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ را حل کنیم.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.

(حسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضی پایه، تابع حسابان - ۱۳۹۶۰۲۰۱

-۱۰۱

(عمید علیزاده)

$$\left[\frac{x}{3-2x} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3-2x} < 2 \Rightarrow 1 \geq \frac{3-2x}{x} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{3}{x} - 2 > \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \geq \frac{3}{x} > \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} < \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\times 15} 5 \leq 5x < 6 \Rightarrow [5x] = 5$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

چون $D_f = [-1, 1]$ پس $-1 \leq [x] \leq 1$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} [x] = -1 \\ \text{یا} \\ [x] = 0 \Rightarrow y = f([x]) = \begin{cases} 0 & ; -1 \leq x < 0 \\ 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; 1 \leq x < 2 \end{cases} \\ \text{یا} \\ [x] = 1 \end{cases}$$

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مبید رفعتی)

-۱۰۳

$$\text{اگر } x \text{ صحیح باشد. } 3x - 2x = 6 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{اگر } x \text{ غیر صحیح باشد. } 3[x] + 2(-[x] - 1) = 6 \Rightarrow [x] = 8$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 8 < x < 9$$

پس در کل جواب معادله $\{6\} \cup (8, 9)$ می‌باشد:

$$\Rightarrow a = 8, b = 9, c = 6$$

$$\Rightarrow a + b - c = 11$$

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با کمی دقت در شکل‌های بالا، می‌توان به این نتیجه رسید که در مرحله‌ی i ام، تعداد مثلث‌های کوچک برابر i^2 است، پس می‌توان گفت در مرحله‌ی پنجم، ۲۵ مثلث برابر با مثلث مرحله‌ی اول کنار هم قرار گرفته‌اند و تشکیل مثلثی متشابه با آن داده‌اند.

(هندسه ۲ - استرلال در هندسه؛ صفحه‌ی ۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

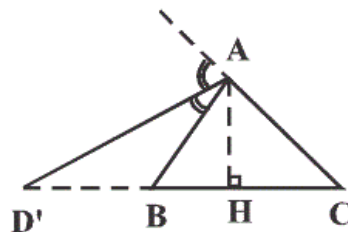
(سراسری ریاضی - ۹۱)

-۱۴۲

مطابق شکل و با توجه به متن درس، از آن‌جا که AD' نیمساز خارجی زاویه‌ی A است، داریم:

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC}$$

می‌دانیم که کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی یک مثلث، متناظر با بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است. در شکل زیر فرض کنید $BC = 6$ ، $AC = 5$ و $AB = 3$.



از آن‌جا که دو مثلث $AD'B$ و $AD'C$ دارای ارتفاع مشترک AH هستند، نسبت مساحت‌های آن‌ها، برابر با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع مشترک است:

$$\frac{S(\triangle AD'B)}{S(\triangle AD'C)} = \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{S(\triangle AD'B)}{S(\triangle AD'C)} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{S(\triangle AD'B)}{S(\triangle AD'C) - S(\triangle AD'B)} = \frac{3}{5-3} \Rightarrow \frac{S(\triangle AD'B)}{S(\triangle ABC)} = \frac{3}{2}$$

(هندسه ۲ - استرلال در هندسه؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

 ۴

 ۳

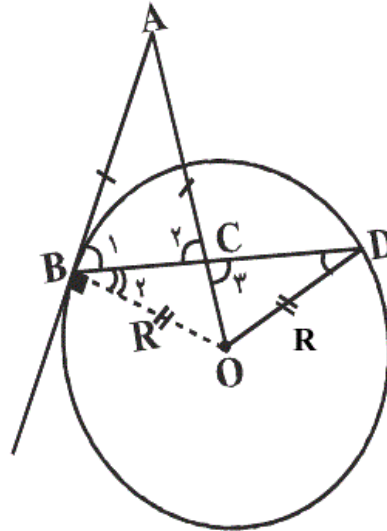
 ۲

 ۱

از متساوی الساقین بودن مثلث ABC نتیجه می‌شود: $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_\gamma$ و از متقابل به رأس بودن \widehat{C}_γ و \widehat{C}_β داریم، $\widehat{C}_\gamma = \widehat{B}_1$ از طرفی در مثلث متساوی الساقین

OBD داریم $(OB = OD = R)$ پس اگر از مرکز دایره به نقطه B وصل کنیم، با توجه به این که، B نقطه‌ی تماس خط AB با دایره است،

داریم:



$$\widehat{B}_1 + \widehat{B}_\gamma = 90^\circ \xrightarrow{(*), (**)} \widehat{C}_\gamma + \widehat{D} = 90^\circ$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{COD} = 180^\circ - (\widehat{C}_\gamma + \widehat{D}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

یعنی مثلث COD قائم‌الزاویه است.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

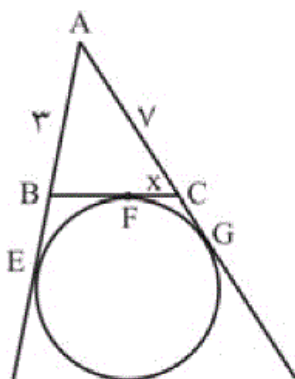
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر طول $CF = x$ باشد، آنگاه $BF = 5 - x$ خواهد بود و چون $BF = BE$ پس $BE = 5 - x$ از طرفی با توجه به اینکه از A دو مماس بر دایره رسم شده، طول دو مماس برابرند.



$$AE = AG \Rightarrow 3 + (5 - x) = 7 + x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$BF = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{9}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

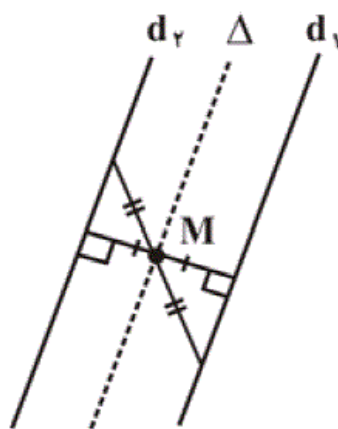
۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی، هندسه ۲ - گواه، تبدیل‌ها - ۱۳۹۶۰۲۰۱



با توجه به فرض سؤال، خط $d_1: x - 2y + 6 = 0$ تصویر خط $d_2: x - 2y - 4 = 0$ تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی $M(2, a)$ است، پس M روی محور تقارن دو خط موازی d_1 و d_2 ، یعنی خط به معادله‌ی $\Delta: x - 2y + \frac{6-4}{2} = 0$ قرار دارد، در نتیجه مختصات آن در معادله‌ی خط Δ صدق می‌کند:

$$2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها: صفحه‌های ۱۰۱ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

دو نقطه از خط $2y + x = 2$ را انتخاب می‌کنیم. به عنوان مثال نقاط $(0, 1)$ و $(2, 0)$ را انتخاب کردیم، تصویر این نقاط تحت تجانس D به صورت زیر

$$(0, 1) \xrightarrow{D} (0, 2) \quad \text{خواهند بود.}$$

$$(2, 0) \xrightarrow{D} (4, 0)$$

از طرفی چون $y = -x$ نیم‌ساز ربع دوم و چهارم است، قرینه‌ی نقطه‌ی (a, b) نسبت به این خط برابر است با $(-b, -a)$. یعنی:

$$(0, 2) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y = -x]{} (-2, 0)$$

$$(4, 0) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y = -x]{} (0, -4)$$

حال معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(0, -4)$ و $(-2, 0)$ را می‌نویسیم:

$$y + 4 = \frac{-4 - 0}{0 + 2}(x - 0) \Rightarrow y + 2x + 4 = 0$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳ و ۱۱۲ تا ۱۲۲)

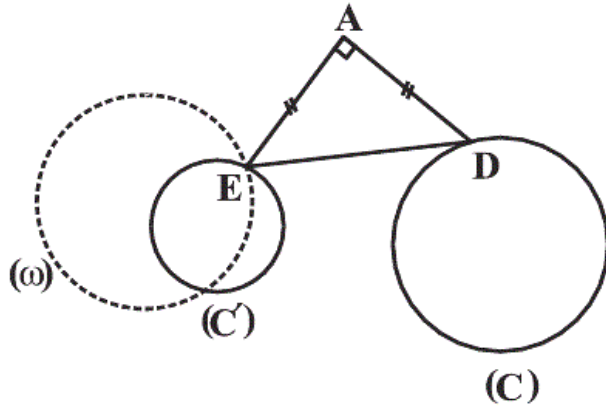
۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا مسأله را حل شده در نظر گرفته و فرض کنید دو نقطه D و E به ترتیب روی دو دایره C و C' طوری موجود هستند که مثلث ADE قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. با توجه به شکل می‌توان گفت که در واقع D و E دوران یافته‌ی هم به زاویه‌ی 90° حول نقطه‌ی A هستند. با این توضیحات کافیست که نحوه‌ی پیدا کردن نقاط D و E را مشخص کنیم: دایره‌ی C را حول A به اندازه‌ی 90° دوران می‌دهیم تا دایره‌ی ω به دست آید، نقطه‌ی برخورد C' با ω را E می‌نامیم. دوران یافته‌ی E حول A و به زاویه‌ی 90° ، قطعاً نقطه‌ی D واقع بر دایره‌ی C است که با استفاده از تعریف دوران:



$$\begin{cases} AE = AD \\ \hat{EAD} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ADE \text{ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.}$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها؛ صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۴

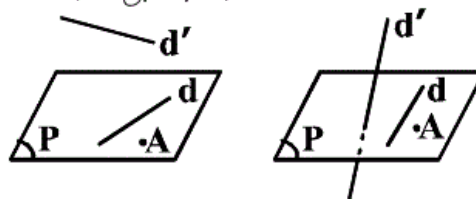
۳

۲

۱

ریاضی، هندسه ۲ - گواه، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی ۲)، هندسه‌ی فضایی - ۱۳۹۶۰۲۰۱

(کتاب آبی هندسه ۲ - سوال ۳۹۹)



خط d' هیچ‌گاه به تمامی در صفحه‌ی P قرار نمی‌گیرد؛ زیرا d و d' متناظرند. پس d' صفحه‌ی P را قطع نمی‌کند و یا با آن متقاطع است.

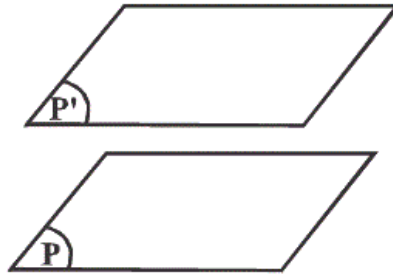
(هندسه ۲ - هندسه‌ی فضایی؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲

۱



از نقطه‌ی A می‌توان دقیقاً یک صفحه مانند Q به موازات P و P' رسم کرد. هر خطی واقع در صفحه‌ی Q که از نقطه‌ی A بگذرد با هر دو صفحه‌ی P و P' موازی است، پس مسأله، بی‌شمار جواب دارد.

(هنر سه ۲ - هنر سه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اگر خط d درون صفحه‌ی Q و $d \parallel P$ باشد، آن‌گاه در صورتی که دو صفحه‌ی P و Q، متقاطع باشند، فصل مشترک آن‌ها یعنی خط L قطعاً موازی d می‌باشد. خط L متعلق به صفحه‌ی Q است، پس اگر خط گذرنده از نقطه‌ی A در این صفحه، خط d را قطع کند، قطعاً خط L را نیز قطع خواهد کرد یعنی خط گذرنده از نقطه‌ی A و متقاطع با خط d و صفحه‌ی Q متقاطع می‌شوند.

(هنر سه ۲ - هنر سه‌ی فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱