



[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir) **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

۸۱- اگر تابع  $f(x)$  در نقاط  $x=1$  و  $x=2$  حد داشته باشد،  $b-a$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & ; x < 1 \text{ یا } x > 2 \\ 2x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$\frac{2}{3}$  (۴)

$-\frac{2}{3}$  (۳)

$-\frac{4}{3}$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{3\pi x}{4} & ; |x| < 1 \\ \sqrt{2}[x] & ; |x| > 1 \end{cases}$  باشد، آن گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

$3\sqrt{2}$  (۴)

$-\sqrt{2}$  (۳)

$-3\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر اشتراک دو همسایگی متقارن یکی به مرکز ۱ و شعاع ۱ و دیگری به مرکز ۲ و شعاع  $\frac{1}{4}$  یک همسایگی متقارن به مرکز  $a$  و شعاع  $r$  باشد،  $a-r$  کدام است؟

$2/25$  (۴)

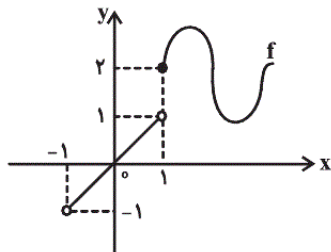
$1/75$  (۳)

$1/5$  (۲)

$1/25$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۴- با توجه به نمودار تابع  $f$  که در زیر رسم شده است، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)}$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)



است.

صفر (۱)

۱ (۲)

-۱ (۳)

۲ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۸۵- حاصل حد تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x-|x|}$  در  $x=0$  کدام است؟

تابع حد ندارد. (۴)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۲)

صفر (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر به ازای هر  $x$  داشته باشیم:  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ، حد تابع  $f(x) = \frac{x-1}{g(x)}$  در  $x=0$  کدام است؟

۲ (۴)

$-\frac{1}{2}$  (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2-1|}{|x| - [-x]}$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

$-\frac{3}{2}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۸۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4} = -\frac{1}{16}$  باشد،  $a-2b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{9}{2}$  (۴)  $-\frac{7}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- حاصل حد عبارت  $\frac{9^x-1}{9^x+3^x-2}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  می‌رود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- کدام گزینه در مورد پیوستگی تابع زیر در  $x=0$  صحیح است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

- (۱) حد دارد، پیوسته نیست. (۲) حد ندارد، پیوسته نیست.  
(۳) حد دارد، پیوسته است. (۴) حد چپ و راست برابر نیست، پیوسته است.

شما پاسخ نداده اید

۹۱- به‌ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}-1 & ; 0 < x < a \\ 1-\frac{x}{2} & ; x \geq a \end{cases}$  در  $x=a$  پیوسته است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار  $a$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- تابع  $f(x) = [\sin 2x]$  در چند نقطه از بازه  $(0, \pi)$  ناپیوسته است؟ ( [ ] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۹۳- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^{-1}(x^2-2x^2+2x)}{[-x]}$  کدام است؟ ( [ ] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱)  $-\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۳)  $-\frac{\pi}{4}$  (۴) موجود نیست.

شما پاسخ نداده اید

۹۴- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲)  $-4\sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴)  $4\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{6x - \pi}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- تابع  $y = ||x+2|-1|$  در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

$$97- \text{اگر تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{9ax+3b}{x^3-27} & ; [x] \leq 2 \\ \frac{3}{x} & ; [x] > 2 \end{cases} \text{ روی } R \text{ پیوسته باشد، حاصل } a-b \text{ کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)}$$

- (۱) ۳۰      (۲) ۲۴      (۳) ۲۷      (۴) -۲۴

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر  $f$  تابعی مشتق پذیر باشد، حاصل حد  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta h) - f(a)}{\Delta h}$  کدام است؟

- (۱)  $\Delta f'(a)$       (۲)  $\frac{1}{\Delta} f'(a)$       (۳)  $\frac{\Delta}{2} f'(a)$       (۴)  $\frac{\Delta}{2} f'(a)$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- خط مماس بر نمودار تابع  $y = \sqrt{x} + 4$  در نقطه‌ای به طول  $a$  با محورهای مختصات در ناحیه دوم یک مثلث متساوی الساقین می‌سازد. در این صورت مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\frac{289}{8}$       (۲)  $\frac{289}{16}$       (۳)  $\frac{289}{32}$       (۴)  $\frac{17}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- حاصل ضرب شیب خطوط مماس بر نمودار تابع  $y = x^2 + 1$  که از مبدأ مختصات عبور می‌کنند، کدام است؟

- (۱) -۱۶      (۲) -۱      (۳) -۲      (۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ی ۲ ، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۲۱- معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی  $x + y = 2$ ، تحت تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت دو، کدام است؟

- (۱)  $x + y = 4$       (۲)  $x + y = 1$       (۳)  $x + y = 8$       (۴)  $x + y = \frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- قطرهای مربع ABCD به طول ضلع دو واحد، در نقطه‌ی O متقاطعند. اگر مساحت محصور بین این مربع و تصویر آن تحت تجانس به مرکز O و نسبت k برابر ۱۴۰ واحد مربع باشد، آن گاه k کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{2}$       (۲) ۵      (۳)  $\frac{11}{2}$       (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- تحت تجانس به مرکز  $(a-1, b+1)$ ، نقطه‌ی  $(-1, 3)$  بر نقطه‌ی  $(3, 2)$  تصویر می‌شود.  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) ۱      (۳) -۱      (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- تبدیل یافته‌ی نیمساز ربع اول و سوم تحت انتقال با ضابطه‌ی  $T(x,y) = (x-1, y+1)$ ، نیمساز ربع دوم و چهارم را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

- (۱)  $(2, -2)$  (۲)  $(-2, 2)$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $(1, -1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- خط به معادله‌ی  $2x + 3y = 0$  تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی  $2x - 3y = m$  تحت بازتاب نسبت به خط به معادله‌ی  $x = 3$  است.  $m$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- نقطه‌ی  $A(k-2, k+3)$  روی دوران یافته‌ی خط به معادله‌ی  $\sqrt{3}x - 3y = 0$  حول مبدأ، تحت زاویه‌ی  $120^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار

دارد. مجموع طول و عرض نقطه‌ی  $A$  کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- روی دو ضلع  $AB$  و  $AC$  از مثلث دلخواه  $ABC$ ، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع  $AMB$  و  $ACN$  را در بیرون آن می‌سازیم. نسبت  $\frac{CM}{BN}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{AB}{AC}$  (۲)  $\frac{AC}{AB}$   
(۳) ۱ (۴)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در کدام حالت دو خط در فضا با هم موازی‌اند؟

(۱) هر کدام در یکی از دو صفحه‌ی متمایز موازی واقع باشند.

(۲) هر دو با یک صفحه‌ی معلوم موازی باشند.

(۳) یکی فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع و دیگری موازی با این دو صفحه باشد.

(۴) هر دو با یک خط معلوم، زاویه‌ی برابر بسازند.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

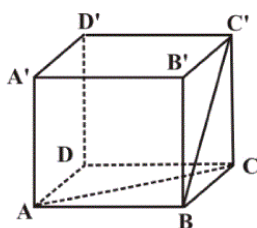
(الف) اگر دو صفحه موازی باشند و صفحه‌ای آن دو را قطع کند، فصل مشترک‌های حاصل، دو خط موازی‌اند.

(ب) اگر دو صفحه متقاطع باشند و صفحه‌ای هر دوی آنها را قطع کند، فصل مشترک‌های حاصل، دو خط موازی‌اند.

(ج) اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه، با صفحه‌ی دیگر موازی است.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید



۱۳۰- در مکعب شکل روبه‌رو، زاویه‌ی بین  $AC$  و  $BC'$  کدام است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $90^\circ$  (۳)  $45^\circ$  (۴)  $30^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۱- ظرفی دارای ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی است. دو مهره با هم از ظرف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که مهره‌ها هم‌رنگ

باشند، کدام است؟

$$\frac{11}{21} \text{ (۴)} \quad \frac{10}{21} \text{ (۳)} \quad \frac{4}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{7} \text{ (۱)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۲- چهار رقم ۰، ۱، ۲ و ۳ را به تصادف به‌گونه‌ای در کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود. با کدام احتمال، یک عدد چهار رقمی مضرب ۶ حاصل می‌شود؟

$$\frac{1}{3} \text{ (۱)} \quad \frac{5}{12} \text{ (۲)} \quad \frac{4}{9} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{9} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۳- بر روی یک تاس اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ نوشته شده است، احتمال این‌که در دو بار پرتاب این تاس، قدرمطلق تفاضل دو عدد روشده، یک عدد اول باشد، کدام است؟

$$\frac{5}{18} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{9} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{12} \text{ (۳)} \quad \frac{7}{36} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۴- در یک نمایشگاه اتومبیل، چهار اتومبیل تولید داخل و سه اتومبیل تولید خارج در یک ردیف کنار هم قرار گرفته‌اند. احتمال آن‌که هیچ دو اتومبیل تولید خارجی کنار هم قرار نگیرند، چقدر است؟

$$\frac{2}{21} \text{ (۱)} \quad \frac{2}{7} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{7} \text{ (۳)} \quad \frac{5}{21} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۵- ۴ زوج به تصادف دور یک میز گرد می‌نشینند. احتمال این‌که هر زوج (زن و شوهر) کنار هم نشسته باشند، چقدر است؟

$$\frac{2}{105} \text{ (۱)} \quad \frac{4}{35} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{105} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{35} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۶- تاس سالمی را ۷ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداقل ۵ بار عددی اول رو شود، چقدر است؟

$$\frac{99}{27} \text{ (۱)} \quad \frac{29}{27} \text{ (۲)} \quad \frac{64}{27} \text{ (۳)} \quad \frac{8}{27} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۷- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره آبی و ۲ مهره قرمز وجود دارد. یک مهره از این ظرف بیرون آورده و پس از دیدن رنگ آن، مهره را به ظرف برمی‌گردانیم. اگر ۴ مهره به این طریق خارج شود، با کدام احتمال فقط دو مهره سفید بیرون می‌آید؟

$$\frac{3}{8} \text{ (۱)} \quad \frac{1}{2} \text{ (۲)} \quad \frac{5}{8} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۸- احتمال آمدن برف در یک محوطه‌ی اسکی در هر یک از روزهای ماه بهمن برابر  $\frac{1}{4}$  است. برای چهار روز متوالی در ماه بهمن، کدام یک از پیشامدهای

زیر محتمل‌تر است؟

- (۱) اصلاً برف نیارد.  
 (۲) دقیقاً یک روز برف بیارد.  
 (۳) دقیقاً دو روز برف بیارد.  
 (۴) دست کم ۳ روز برف بیارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۶۹- اگر  $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد، کدام یک از تخصیص‌های زیر مقبول است؟

$$P(e_1) = \frac{1}{8}, P(e_2) = -\frac{1}{8}, P(e_3) = \frac{1}{2}, P(e_4) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$P(e_1) = \frac{1}{6}, P(e_2) = \frac{1}{3}, P(e_3) = \frac{1}{4}, P(e_4) = \frac{1}{12} \quad (2)$$

$$P(e_1) = \frac{1}{5}, P(e_2) = \frac{3}{10}, P(e_3) = \frac{1}{3}, P(e_4) = \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$P(e_1) = \frac{1}{10}, P(e_2) = \frac{1}{5}, P(e_3) = \frac{5}{4}, P(e_4) = \frac{1}{5} \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۷۰- احتمال روشن شدن هر وجه یک تاس متناسب با عدد آن وجه است. احتمال آن که عدد روشده بزرگ‌تر از ۵ باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{21} \quad (4)$$

$$\frac{5}{21} \quad (3)$$

$$\frac{11}{21} \quad (2)$$

$$\frac{6}{21} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، حسابان-سوال‌های موزی، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۰۱- اگر تابع  $f(x)$  در نقاط  $x=1$  و  $x=2$  حد داشته باشد،  $b-a$  کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & ; x < 1 \text{ یا } x > 2 \\ 2x & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر  $f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{3\pi x}{4} & ; |x| < 1 \\ \sqrt{2}|x| & ; |x| > 1 \end{cases}$  باشد، آن‌گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)

$$3\sqrt{2} \quad (4)$$

$$-\sqrt{2} \quad (3)$$

$$-3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر اشتراک دو همسایگی متقارن یکی به مرکز ۱ و شعاع ۱ و دیگری به مرکز ۲ و شعاع  $\frac{1}{4}$  یک همسایگی متقارن به مرکز  $a$  و شعاع  $r$  باشد،  $a-r$  کدام است؟

$$2/25 \quad (4)$$

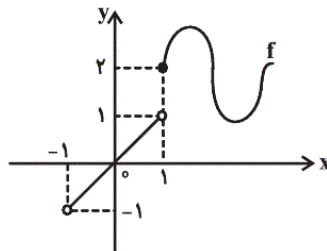
$$1/75 \quad (3)$$

$$1/5 \quad (2)$$

$$1/25 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- با توجه به نمودار تابع  $f$  که در زیر رسم شده است، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)}$  کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)



است.

$$1 \quad (2)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

$$0 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- حاصل حد تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x-|x|}$  در  $x=0$  کدام است؟

$$\text{تابع حد ندارد.} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر به ازای هر  $x$  داشته باشیم:  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ ، حد تابع  $f(x) = \frac{x-1}{g(x)}$  در  $x=0$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳)  $-\frac{1}{2}$  (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2-1|}{|x| - [-x]}$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است).

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4} = -\frac{1}{16}$  باشد،  $a-2b$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{9}{2}$  (۴)  $-\frac{7}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- حاصل حد عبارت  $\frac{9^x-1}{9^x+3^x-2}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  می‌رود، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- کدام گزینه در مورد پیوستگی تابع زیر در  $x=0$  صحیح است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

- (۱) حد دارد، پیوسته نیست. (۲) حد ندارد، پیوسته نیست.  
(۳) حد دارد، پیوسته است. (۴) حد چپ و راست برابر نیست، پیوسته است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}-1 & ; 0 < x < a \\ 1-\frac{x}{2} & ; x \geq a \end{cases}$  پیوسته است؟

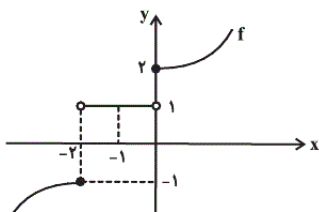
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار  $a$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- تابع  $f(x) = [\sin 2x]$  در چند نقطه از بازه  $(0, \pi)$  ناپیوسته است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است).

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید



۱۱۳- با توجه به نمودار تابع  $f$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2-x)$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- کدام گزینه در مورد حد تابع  $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$  در  $x=0$  صحیح است؟

- (۱) حد تابع در  $x=0$  برابر صفر است. (۲) در  $x=0$ ، تابع فقط حد چپ دارد.  
(۳) در  $x=0$ ، تابع فقط حد راست دارد. (۴) نمی‌توان درباره‌ی حد آن در  $x=0$  صحبت کرد.

شما پاسخ نداده اید



۱۱۵- حاصل حد عبارت  $\frac{|x-3|}{|x|-3}$  وقتی  $x \rightarrow 3^-$  ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) حد ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- حاصل ضرب حد چپ و راست تابع  $f(x) = \frac{x^2 - [2x] - \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{\pi[x]}{2}}{x-2}$  در  $x=2$  کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲) ۲۱ (۳) ۷ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \log_4^x - \log_4^{x^2}}{4-x^2}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{8}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $-\frac{1}{4}$

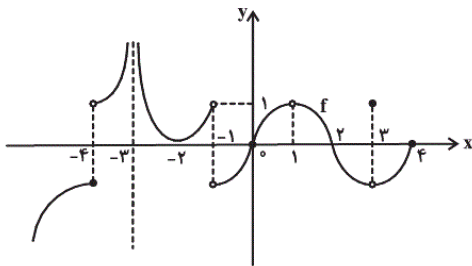
شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- حاصل حد عبارت  $\frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin x \tan x}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- با توجه به نمودار مقابل، تابع  $y = f(x)$  در چند نقطه از دامنه‌ی تعریفش ناپیوسته است؟



- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲- سوالات موازی ، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۴۱- در بازتاب محوری نسبت به خط به معادله  $2x + 3y - 5 = 0$ ، نقطه‌ی ثابت خط به معادله  $2x - 3y - 1 = 0$  کدام است؟

- (۱) (۳, ۲) (۲)  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$   
(۳)  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  (۴) (۳, -۲)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی  $x + y = 2$ ، تحت تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت دو، کدام است؟

(۲)  $x + y = 1$

(۱)  $x + y = 4$

(۴)  $x + y = \frac{1}{2}$

(۳)  $x + y = 8$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- قطرهای مربع ABCD به طول ضلع دو واحد، در نقطه‌ی O متقاطعند. اگر مساحت محصور بین این مربع و تصویر آن تحت تجانس به مرکز O و نسبت k برابر

۱۴۰ واحد مربع باشد، آن گاه k کدام است؟

(۲) ۵

(۱)  $\frac{9}{2}$

(۴) ۶

(۳)  $\frac{11}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- تحت تجانس به مرکز  $(fa - 1, b + 1)$ ، نقطه‌ی  $(-1, 3)$  بر نقطه‌ی  $(3, 2)$  تصویر می‌شود.  $a + b$  کدام است؟

(۲) ۱

(۱) ۲

(۴) -۲

(۳) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- تبدیل یافته‌ی نیمساز ربع اول و سوم تحت انتقال با ضابطه‌ی  $T(x, y) = (x - 1, y + 1)$ ، نیمساز ربع دوم و چهارم را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

(۲)  $(-2, 2)$

(۱)  $(2, -2)$

(۴)  $(1, -1)$

(۳)  $(-1, 1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- خط به معادله‌ی  $2x + 3y = 0$  تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی  $2x - 3y = m$  تحت بازتاب نسبت به خط به معادله‌ی  $x = 3$  است. m کدام است؟

(۲) ۴

(۱) صفر

(۴) ۱۲

(۳) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی  $x + 2y = a$  تحت دوران  $90^\circ$  به مرکز نقطه‌ی  $(a, 0)$ ، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض چهار قطع می‌کند. a کدام است؟

(۲) -۲

(۱) صفر

(۴) ۵

(۳) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- نقطه‌ی  $A(k - 2, k + 3)$  روی دوران یافته‌ی خط به معادله‌ی  $\sqrt{3}x - 3y = 0$  حول مبدأ تحت زاویه‌ی  $120^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارد.

مجموع طول و عرض نقطه‌ی A کدام است؟

(۲) ۴

(۱) -۵

(۴) -۴

(۳) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- روی دو ضلع AB و AC از مثلث دلخواه ABC، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع AMB و ACN را در بیرون آن می‌سازیم. نسبت  $\frac{CM}{BN}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{AB}{AC}$   
 (۲)  $\frac{AC}{AB}$   
 (۳) ۱  
 (۴)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

(الف) از هر دو خط متمایز، لزوماً یک صفحه می‌گذرد.

(ب) اگر دو صفحه متقاطع باشند و صفحه‌ای هر دوی آن‌ها را قطع کند، فصل مشترک‌های حاصل، دو خط موازی‌اند.

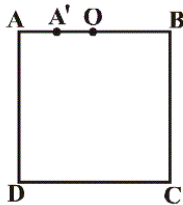
(ج) از هر سه نقطه‌ی متمایز همواره یک و فقط یک صفحه می‌گذرد.

- (۱) صفر  
 (۲) ۱  
 (۳) ۲  
 (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی ۲ - گواه، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۳۱- در شکل زیر، طول ضلع مربع  $\sqrt{5}$  است و  $OA' = AA' = \frac{AB}{4}$ . اگر نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A در تجانس به مرکز O باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی



C از تصویر خود در این تجانس برابر با کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$   
 (۲)  $\frac{5}{3}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$   
 (۴)  $\frac{5}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- بازتاب خط  $x - 2y = 4$  نسبت به نقطه‌ی  $(2, a)$ ، خط  $x - 2y + 6 = 0$  است. a کدام است؟

- (۱) ۱  
 (۲)  $\frac{3}{2}$   
 (۳) ۲  
 (۴)  $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- معادله‌ی تصویر خط  $y + 2x = 3$  تحت تجانس به مرکز  $(1, 4)$  و نسبت ۲ به صورت  $y + ax = b$  است، b کدام است؟

- (۱) -۱  
 (۲) صفر  
 (۳) ۱  
 (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- نقطه‌ی A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هر یک از این دایره‌ها باشد، کدام

تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب  
 (۲) انتقال  
 (۳) تجانس  
 (۴) دوران

۱۳۵- در صفحه‌ای خط  $d$  و دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط  $d$  که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$

کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب
- (۲) تجانس
- (۳) دوران
- (۴) انتقال

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- دو خط متناظر  $d$  و  $d'$  و نقطه‌ی دلخواه  $A$ ، خارج از آن‌ها مفروض‌اند. صفحه‌ی شامل خط  $d$  و نقطه‌ی  $A$  را  $P$  می‌نامیم. وضع خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$ ، کدام است؟

- (۱) خط  $d'$  به تمامی در صفحه‌ی  $P$  قرار دارد یا با آن متقاطع است.
- (۲) خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع است و یا با آن نقطه‌ی مشترک ندارد.
- (۳) خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع است.
- (۴) خط  $d'$  هیچ‌گاه صفحه‌ی  $P$  را قطع نمی‌کند.

شما پاسخ نداده اید

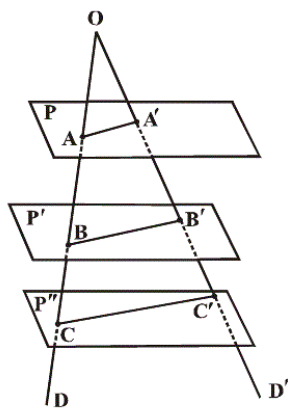
۱۳۷- دو خط متناظر  $D$  و  $\Delta$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع هستند. چند خط یافت می‌شود که این دو خط را قطع کند و با صفحه‌ی  $P$  موازی باشد؟

- (۱) هیچ
- (۲) یک
- (۳) دو
- (۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- دو خط متقاطع  $D$  و  $D'$  و سه صفحه‌ی  $P$ ،  $P'$  و  $P''$  به طوری که  $P'' \parallel P'$  مفروض‌اند. اگر خط  $D$  سه صفحه را در نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  و خط

$D'$  آن‌ها را در سه نقطه‌ی  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  قطع کند به طوری که  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ ، در این صورت، کدام گزینه لزوماً درست است؟



- (۱) صفحه‌ی  $P''$  با دو صفحه‌ی دیگر موازی است.
- (۲) پاره‌خط‌های  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  با هم موازی‌اند.
- (۳)  $AA'$  و  $BB'$  با هم موازی هستند و  $CC'$  با آن دو متقاطع است.
- (۴) صفحه‌ی  $P''$  با دو صفحه‌ی دیگر متقاطع است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- دو صفحه‌ی موازی  $P$  و  $P'$  و نقطه‌ی  $A$  خارج این دو صفحه مفروض است. چند خط می‌توان از نقطه‌ی  $A$  گذراند که با هر دو صفحه‌ی  $P$  و  $P'$  موازی باشد؟

- (۱) یکی
- (۲) بی‌شمار
- (۳) دو تا
- (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- صفحه‌ی P، خط d و نقطه‌ی A مفروض هستند. اگر صفحه‌ی گذرا بر نقطه‌ی A و خط d را Q بنامیم، در کدام حالت، رسم خط گذرا از نقطه‌ی A و متقاطع با

خط d و موازی صفحه‌ی P، غیرممکن است؟

$$Q \cap P = \phi, d \parallel P \quad (۲)$$

$$Q \cap P \neq \phi, d \parallel P \quad (۱)$$

$$Q \cap P = \phi, d \not\parallel P \quad (۴)$$

$$Q \cap P \neq \phi, d \not\parallel P \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه ۲- گواه-سوالات موازی، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

۱۵۱- فرض کنید  $M_1$  تصویر نقطه‌ی دلخواه M تحت بازتاب نسبت به خط  $y = x$  و  $M_2$  تصویر نقطه‌ی  $M_1$  تحت بازتاب نسبت به مبدأ مختصات باشد.

ضابطه‌ی تبدیلی که نقطه‌ی M را بر نقطه‌ی  $M_2$  تصویر می‌کند، کدام است؟

(۱) دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی  $-90^\circ$

(۲) دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی  $+90^\circ$

(۳) بازتاب نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم

(۴) بازتاب نسبت به مبدأ مختصات

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- مثلث  $ACB'$  بازتاب مثلث  $ABC$  نسبت به خط گذرا از دو نقطه A و C و مثلث  $AB'C'$  بازتاب مثلث  $ACB'$  نسبت به خط گذرا از نقاط A و  $B'$  است. مثلث

$AB'C'$  تصویر مثلث  $ABC$  تحت کدام تبدیل زیر است؟

(۱) دوران حول نقطه‌ی A با اندازه‌ی زاویه‌ی  $\hat{B}AC$

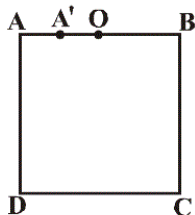
(۲) دوران حول نقطه‌ی A با اندازه‌ی زاویه‌ی  $2\hat{B}AC$

(۳) بازتاب نسبت به نقطه‌ی A

(۴) تجانس به مرکز A

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- در شکل زیر، طول ضلع مربع  $\sqrt{5}$  است و  $OA' = AA' = \frac{AB}{4}$ . اگر نقطه‌ی  $A'$  تصویر نقطه‌ی A در تجانسی به مرکز O باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی



C از تصویر خود در این تجانس برابر با کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- بازتاب خط  $x - 2y = 4$  نسبت به نقطه  $(2, a)$ ، خط  $x - 2y + 6 = 0$  است.  $a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$   
(۲)  $\frac{5}{2}$   
(۳)  $\frac{3}{2}$   
(۴)  $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- معادله‌ی تصویر خط  $y + 2x = 3$  تحت تجانس به مرکز  $(1, 4)$  و نسبت ۲ به صورت  $y + ax = b$  است،  $b$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) صفر  
(۳) ۱  
(۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۵۶- نقطه‌ی  $A$  و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس  $A$  که دو سر قاعده بر روی هر یک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب  
(۲) انتقال  
(۳) تجانس  
(۴) دوران

شما پاسخ نداده اید

۱۵۷- در صفحه‌ای خط  $d$  و دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط  $d$  که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

- (۱) بازتاب  
(۲) تجانس  
(۳) دوران  
(۴) انتقال

شما پاسخ نداده اید

۱۵۸- دو خط متنافر  $d$  و  $d'$  و نقطه‌ی دلخواه  $A$ ، خارج از آن‌ها مفروض‌اند. صفحه‌ی شامل خط  $d$  و نقطه‌ی  $A$  را  $P$  می‌نامیم. وضع خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$ ، کدام است؟

- (۱) خط  $d'$  به تمامی در صفحه‌ی  $P$  قرار دارد یا با آن متقاطع است.  
(۲) خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع است و یا با آن نقطه‌ی مشترک ندارد.  
(۳) خط  $d'$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع است.  
(۴) خط  $d'$  هیچ‌گاه صفحه‌ی  $P$  را قطع نمی‌کند.

شما پاسخ نداده اید

۱۵۹- دو خط متنافر  $L$  و  $L'$  و نقطه‌ی  $A$  خارج آن دو، مفروض است. چند خط مانند  $\Delta$  می‌توان رسم کرد، به طوری که از نقطه‌ی  $A$  بگذرد و هر دو خط  $L$  و  $L'$  را قطع کند؟

- (۱) صفر  
(۲) حداکثر یک  
(۳) حداقل یک  
(۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۶۰- نقاط  $A, B, C$  و  $D$  چهار نقطه‌ی متمایز در فضا هستند، کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) از این چهار نقطه همواره یک صفحه عبور می‌کند.  
(۲) این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند، فقط در صورتی که دو خط  $AB$  و  $CD$  موازی باشند.  
(۳) این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند، فقط در صورتی که دو خط  $AB$  و  $CD$  متقاطع باشند.  
(۴) این چهار نقطه در یک صفحه قرار دارند، اگر و تنها اگر دو خط  $AB$  و  $CD$ ، موازی یا متقاطع باشند.

شما پاسخ نداده اید

-۸۱

(عمید علیزاده)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \Rightarrow a + b = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + b) = 4a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4 \Rightarrow 4a + b = 4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{2}{3}$$

(حسابان- عدد و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

۴

۳

۲

۱

-۸۲

(مهمر فندان)

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{3\pi x}{4} & -1 < x < 1 \\ \sqrt{2}[x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  باید از ضابطه‌ی بالایی استفاده

کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \cos \frac{3\pi}{4} x = 2 \cos \frac{3\pi}{4} = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  باید از ضابطه‌ی پایینی استفاده

کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{2}[x] \\ &= \sqrt{2}[(-1)^-] = \sqrt{2}(-2) = -2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(حسابان- عدد و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

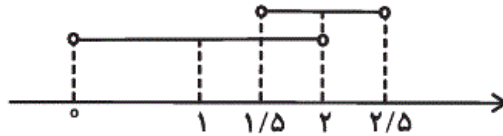
۴

۳

۲

۱

برای سرعت بخشیدن به درک و حل تست به نمودار توجه کنید:



ملاحظه می‌شود اشتراک دو همسایگی، بازه  $(1/5, 2)$  است. این بازه همسایگی متقارن به مرکز  $a = 1/75$  و شعاع  $r = 0/25$  است، پس  $a - r = 1/5$  می‌شود.

(مسابان- مر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-f(x)}{f(x)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = 2 - 1 - 1 = 0$$

(مسابان- مر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمترصطفی ابراهیمی)

اول دامنه این تابع را تعیین می‌کنیم. مخرج کسر نباید صفر باشد، یعنی  $x - |x| \neq 0$  پس  $|x| \neq x$  در نتیجه باید  $x < 0$  باشد. می‌دانیم برای محاسبه‌ی حد یک تابع در یک نقطه باید به آن نقطه از نقاط داخل دامنه نزدیک شویم.

پس برای به‌دست آوردن حد تابع  $y = f(x)$  در  $x = 0$  باید مقدار حد چپ آن را در این نقطه به‌دست آوریم چون مقادیر حد راست آن اصلاً در دامنه نیست.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - (-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(مسابان- مر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} \quad (*)$$

حال با توجه به نامساوی  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$  حد تابع  $g$  را در  $x = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = -\frac{1}{2} \quad \text{بنابراین با توجه به (*) داریم:}$$

(مسابان- هر و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

می‌دانیم وقتی  $x \rightarrow (-1)^-$  می‌رود  $(-x)$  به  $(1^+)$  میل می‌کند از طرفی  $|x|$  در  $(-1)^-$  با علامت منفی از داخل قدرمطلق بیرون می‌آید همچنین عبارت داخل قدرمطلق  $|x^2 - 1|$  نیز مقداری مثبت می‌شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{-x - [1^+]} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{-x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)} = \frac{-1-1}{-1} = 2 \end{aligned}$$

(مسابان- هر و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمه مصطفی ابراهیمی)

مخرج کسر به ازای  $x=2$  صفر است. پس صورت کسر هم باید صفر باشد تا حد به صورت مبهم  $\frac{0}{0}$  شود و با رفع ابهام به مقدار عددی  $-\frac{1}{16}$  برسیم.

$$\sqrt{ax+b}-1=0 \xrightarrow{x=2} \sqrt{2a+b}=1 \Rightarrow 2a+b=1 \quad (*)$$

پس  $b-1=-2a$  است:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4} &\times \frac{\sqrt{ax+b}+1}{\sqrt{ax+b}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b-1}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \end{aligned}$$

به جای  $b-1$  در صورت کسر  $-2a$  را جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} = \frac{a}{4(\sqrt{2a+b}+1)} \end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{a}{4(1+1)} = \frac{a}{8} = -\frac{1}{16} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم  $2a+b=1$  است، پس  $b=2$  به دست می‌آید.

$$a-2b = -\frac{1}{2} - 2(2) = -\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}$$

(مسئله - عدد و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیر هوشنگ قمسه)

می‌دانیم  $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$  است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x)^2 - 1}{(3^x)^2 + 3^x - 2} &\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{(3^x - 1)(3^x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x + 1}{3^x + 2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(مسئله - عدد و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

$$f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

پس تابع در  $x = 0$  حد ندارد و پیوسته نیست.

(مسابان- هر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{a}{2}$$

مقادیر به دست آمده را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$\frac{2}{a} - 1 = 1 - \frac{a}{2} \xrightarrow{\times 2a} 4 - 2a = 2a - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

(مسابان- هر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۹ و ۱۵۴ تا ۱۵۸)

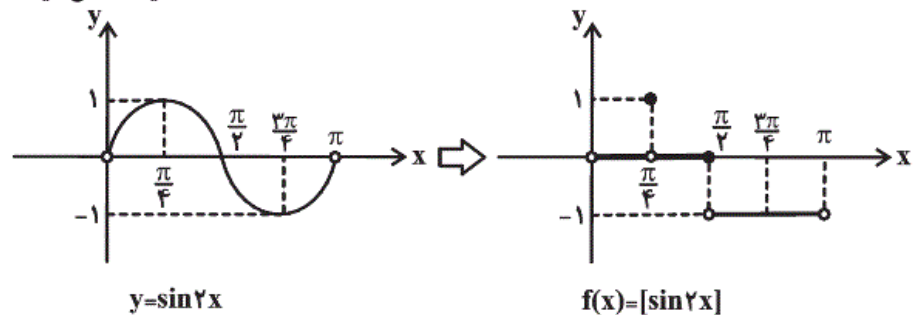
۴

۳

۲

۱

(کیا مقدس نیاک)



با توجه به شکل تابع در بازه‌ی  $(0, \pi)$  ملاحظه می‌شود که در دو نقطه‌ی

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ و } x = \frac{\pi}{4}$$

تابع ناپیوسته است.

(مسابان- هر و پیوستگی توابع - صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱

(معمرد رضا توچه)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^{-1}((x-1)^3 + 1)}{[-x]}$$

چون تابع  $\sin^{-1} \alpha$  در همسایگی چپ  $\alpha = 1$  تعریف شده است به اجبار  $x$  فقط می‌تواند از سمت چپ به  $x = 1$  میل کند.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^{-1}((x-1)^3 + 1)}{[-x]} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^{-1}((x-1)^3 + 1)}{-1} = -\frac{\pi}{2}$$

(حسابان- هر و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(معمرد امین نبافته)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \end{aligned}$$

(حسابان- هر و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x)}{6x - \pi}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6(x - \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{6} = t} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{3} (1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(حسابان- هر و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

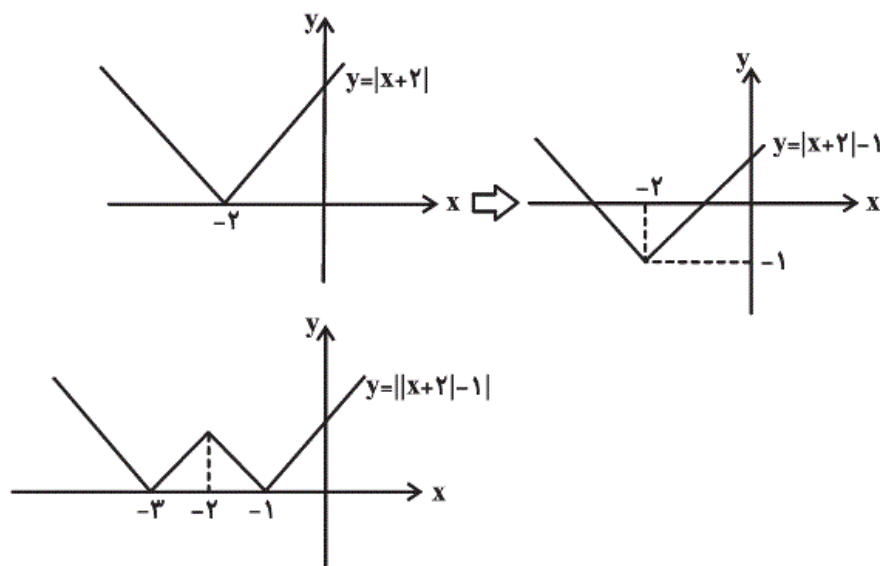
۴

۳

۲

۱ ✓

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



نقاط با طول‌های  $x = -3$  و  $x = -2$ ،  $x = -1$  نقاط زاویه‌دار هستند و تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

(مسابان- مشتق توابع- صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(هییب شفیعی)

ابتدا تابع را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9ax + 3b}{x^3 - 27} & x < 3 \\ \frac{3}{x} & x \geq 3 \end{cases}$$

حال پیوستگی تابع را در  $x = 3$  بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9ax + 3b}{x^3 - 27}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9a(x + \frac{b}{3a})}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

برای این‌که حاصل حد چپ برابر ۱ شود چون به‌ازای  $x = 3$  مخرج صفر می‌شود حتماً باید صورت هم صفر شود.

$$3 + \frac{b}{3a} = 0 \Rightarrow b = -9a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9a(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}$$

$$= \frac{9a}{27} = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = 1$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = -27 \Rightarrow a - b = 30$$

(مسابان- حد و پیوستگی توابع- صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(معمدمصطفی ابراهیمی)

$$\Delta h = t \Rightarrow h = \frac{t}{\Delta} \quad (h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta h) - f(a)}{\Delta h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{\frac{t}{\Delta}}$$

$$= \frac{\Delta}{\Delta} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = \frac{\Delta}{\Delta} f'(a)$$

(مسابان- مشتق توابع - صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)

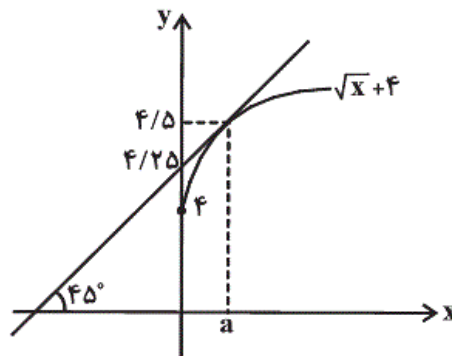
۴ ✓

۳

۲

۱

(معمرامین نبافته)



مطابق فرض و شکل سؤال، تابع در نقطه‌ای به طول  $a$  دارای شیب ۱ است. پس مشتق در آن نقطه برابر ۱ است:

$$y = \sqrt{x} + 4 \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \sqrt{x} + 4 = 4/5$$

معادله خط مماس:

$$y - 4/5 = 1(x - 0/25) \Rightarrow y = x + 4/25$$

$$\frac{4/25 \times 4/25}{2} = \frac{17}{4} \times \frac{17}{4} = \frac{289}{32}$$

پس مساحت مثلث:

توجه: اگر  $f(x) = \sqrt{x} + 4$  باشد، آنگاه  $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$  خواهد بود.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} + 4) - (\sqrt{a} + 4)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

(مسابان- مشتق توابع - صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معمرا مین نیافته)

$$AB \text{ شیب خط} = \frac{a^2 + 1 - 0}{a - 0} = \frac{a^2 + 1}{a}$$

$$AB \text{ شیب خط} = f'(a) = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} = 2a \Rightarrow 2a^2 = a^2 + 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

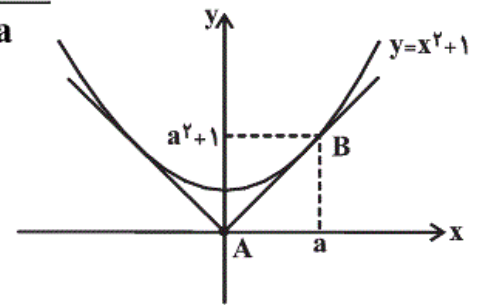
پس شیب خطوط مماس ۲ و -۲ است و حاصل ضرب آنها (-۴) است.

توجه: اگر  $f(x) = x^2 + 1$  باشد، آن گاه  $f'(a) = 2a$  است، زیرا:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + 1) - (a^2 + 1)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a + a) = 2a$$

(مسابن - مشتق توابع - صفحه‌های ۱۶۰ تا ۱۷۰)


 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه ۲، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

-۱۲۱

(مسین فایلو)

ضابطه‌ی تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت دو، به صورت

پس:  $D(x, y) = (2x, 2y)$  است،

$$\begin{cases} X = 2x \Rightarrow x = \frac{X}{2} \\ Y = 2y \Rightarrow y = \frac{Y}{2} \end{cases}$$

$$x + y = 2 \Rightarrow \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} = 2 \Rightarrow X + Y = 4$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

مساحت مربع ABCD را با S و مساحت مجانس آن را با S' نشان می‌دهیم، داریم:

$$a = 2 \Rightarrow S = 2^2 = 4$$

از طرفی:

$$S' - S = 140 \Rightarrow S' - 4 = 140 \Rightarrow S' = 144$$

و در نتیجه:

$$k^2 = \frac{S'}{S} = \frac{144}{4} \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = 6$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

با توجه به فرض مسأله، با در نظر گرفتن  $O(4a-1, b+1)$ ،  $A(-1, 3)$  و  $B(3, 2)$  می‌توان گفت امتداد پاره‌خط AB از O می‌گذرد، بنابراین داریم:

$$m_{AB} = \frac{3-2}{-1-3} = -\frac{1}{4}$$

$$AB \text{ معادله‌ی } y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \xrightarrow{\times 4} 4y - 8 = -x + 3$$

$$\Rightarrow 4y + x = 11$$

O(4a-1, b+1) در معادله‌ی AB صدق می‌کند، پس:

$$4(b+1) + 4a - 1 = 11 \Rightarrow 4(a+b) = 8 \Rightarrow a+b = 2$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مفتاح منصور)

ابتدا تبدیل یافته‌ی خط  $L: y = x$  را تحت تبدیل T به دست می‌آوریم.

$$T(x, y) = (x-1, y+1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$$

$$T(L) = L' \Rightarrow (y'-1) - (x'+1) = 0$$

$$\Rightarrow y' - x' - 2 = 0 \Rightarrow L': y - x - 2 = 0$$

حال نقطه‌ی تقاطع L' را با خط  $y = -x$  می‌یابیم:

۴

۳ ✓

۲

۱



## راه حل اول:

اگر  $L': 2x + 3y = 0$  تصویر  $L: 2x - 3y = m$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  باشد، آن گاه  $L$  نیز تصویر  $L'$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  است. پس کافی است تصویر  $L'$  را تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  به دست آورده و با  $L$  مقایسه کنیم.

$$T(x, y) = (2 \times 3 - x, y) = (6 - x, y)$$

$$(6 - x, y) = (X, Y) \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - X \\ y = Y \end{cases}$$

$$L': 2x + 3y = 0 \xrightarrow{x=6-X, y=Y} L: 2(6 - X) + 3Y = 0$$

$$\Rightarrow L: 2X - 3Y = 12 \Rightarrow m = 12$$

## راه حل دوم:

خط به معادله  $2x + 3y = 0$  خط  $x = 3$  را در نقطه  $(3, -2)$  قطع می‌کند. پس مختصات نقطه  $(3, -2)$  در معادله تبدیل یافته نیز باید صدق کند:

$$2 \times 3 - 3 \times -2 = m \Rightarrow m = 12$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمور مموری)

$$\sqrt{3}x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

این خط با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $30^\circ$  می‌سازد و از مبدأ هم می‌گذرد. چنانچه این خط حول مبدأ  $120^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران کند بر محور  $y$  منطبق می‌شود، پس  $A$  باید روی محور  $y$  ها باشد.

$$A(k - 2, k + 2) \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

$$A(0, 5) \Rightarrow x_A + y_A = 5$$

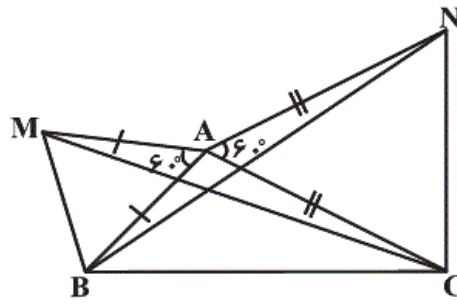
(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به برابری‌های  $AB = AM$  ،  $AN = AC$  و  $\hat{BAM} = \hat{NAC} = 6^\circ$  می‌توان نتیجه گرفت که نقاط  $B$  و  $N$  به ترتیب دوران یافته‌ی  $M$  و  $C$  تحت دوران به مرکز  $A$  و زاویه‌ی  $6^\circ$  هستند.

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهمربراهیم کیتی زاده)

۱۲۸-

طبق نتیجه‌ی ۲ صفحه‌ی ۱۴۱ کتاب درسی، خطی که با دو صفحه‌ی متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن‌ها موازی است.

(هندسه‌ی ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌ی ۱۴۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(داریوش ناظمی)

۱۲۹-

طبق مسأله‌ی ۵ صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب درسی، اگر سه صفحه دو به دو متقاطع باشند، فصل مشترک‌های آن‌ها، سه خط دو به دو موازی یا سه خط هم‌مس است، بنابراین گزاره‌ی «ب» در حالت کلی نادرست است.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۸، ۱۴۲ و ۱۴۳)

۴

۳ ✓

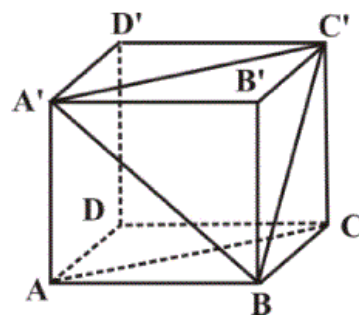
۲

۱

(مهمربطاهر شعاعی)

۱۳۰-

$AC$  و  $BC'$  متناظرند. می‌دانیم اگر از هر نقطه روی یکی از دو خط متناظر، خطی موازی دیگری رسم شود، آنگاه زاویه‌ی حاده یا قائمه‌ی بین این دو خط متقاطع، زاویه‌ی بین آن دو خط متناظر نامیده می‌شود.



بنابراین کافی است خط  $A'C'$  را که موازی  $AC$  است، رسم کنیم. مثلث  $A'C'B$ ، متساوی‌الاضلاع است، پس زاویه‌ی بین دو خط  $A'C'$  و  $C'B$  برابر  $6^\circ$  است، در نتیجه زاویه‌ی بین  $AC$  و  $BC'$  نیز برابر  $6^\circ$  است.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌ی ۱۴۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۶۱

(سامان اسپهر)

اگر پیشامد مورد نظر را با A نمایش دهیم، آن گاه:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3+6}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

(پیرواحتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۶۲

(شروین سیاح‌نیا)

با کنار هم قرار دادن این اعداد، در مجموع ۱۸ عدد چهار رقمی داریم:

$$n(S) = \frac{3}{\text{غیر صفر}} \times \frac{3}{\text{غیر صفر}} \times 2 \times 1 = 18$$

جمع ارقام این عددها همیشه  $6 = 3 + 2 + 1 + 0$  است، پس حتماً مضرب ۳ هستند و برای این که مضرب ۶ بشوند، کافی است زوج باشند.

$$\begin{cases} \frac{2}{3 \text{ یا } 1} \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2 \text{ فقط}} = 4 \\ 3 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{0 \text{ فقط}} = 6 \end{cases} \quad \rightarrow n(A) = 4 + 6 = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

پس داریم:

(پیرواحتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس - صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۶۳

(مهمربوار مهنی)

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

چون تمامی اعداد روی وجوه تاس، اعداد فرد هستند، پس حاصل تفاضل هر دو عدد از میان آن‌ها، عدد زوج است.

با توجه به این که تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است، پس حالت‌های

(۳، ۵)، (۵، ۳)، (۵، ۷)، (۷، ۵)، (۷، ۹)، (۹، ۷)، (۹، ۱۱)، (۱۱، ۹)

، (۱، ۳)، (۳، ۱) قابل قبول هستند. پس داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(پیرواحتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس - صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(همید گروسی)

تعداد حالت های قرار گرفتن ۷ اتومبیل در کنار یکدیگر برابر ۷! است. می دانیم چهار اتومبیل تولید داخل به ۴! حالت می توانند کنار هم قرار گیرند. حال اگر اتومبیل های تولید داخل را با O نمایش دهیم، مطابق شکل زیر، ۵ محلی که با علامت X مشخص شده می تواند، محل قرارگیری اتومبیل های تولید خارج باشد.  $\times O \times O \times O \times O \times$  بنابراین تعداد حالت های پیشامد تصادفی مورد نظر برابر است با:

$$n(A) = 4! \times \binom{5}{3} \times 3! = 4! \times 10 \times 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4! \times 10 \times 6}{7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{2}{7}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه گیری شانس؛ صفحه های ۸۲ تا ۸۷)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times (2!)^4}{7!}$$

پس داریم:

$$= \frac{3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{2}{7 \times 5 \times 3} = \frac{2}{105}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه گیری شانس - صفحه های ۸۲ تا ۸۷)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

(سید وهید زوالفقاری)

$$\text{احتمال روشن شدن عدد اول در پرتاب یک تاس} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(5) + P(6) + P(7) = \text{احتمال روشن شدن حداقل ۵ بار عدد اول در ۷ پرتاب}$$

$$= \frac{\binom{7}{5}}{2^7} + \frac{\binom{7}{6}}{2^7} + \frac{\binom{7}{7}}{2^7} = \frac{21 + 7 + 1}{2^7} = \frac{29}{2^7}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه گیری شانس؛ صفحه های ۸۷ تا ۹۰)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

(سروش موثینی)

$$\text{احتمال بیرون آمدن مهره سفید} = \frac{5}{3+2+5} = \frac{1}{2} \quad P \text{ است و داریم:}$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(جبر و احتمال - احتمال: اندازه گیری شانس - صفحه های ۸۷ تا ۹۰)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

احتمال مورد نظر هر یک از پدیده‌ها عبارتند از:

$$\text{گزینه‌ی «۱» : } P(A) = \frac{\binom{4}{0}}{2^4} = \frac{1}{16}$$

$$\text{گزینه‌ی «۲» : } P(B) = \frac{\binom{4}{1}}{2^4} = \frac{4}{16}$$

$$\text{گزینه‌ی «۳» : } P(C) = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16}$$

$$\text{گزینه‌ی «۴» : } P(D) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{5}{16}$$

(ببروا احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس - مشابه تمرین ۱۲ صفحه‌ی ۹۳)

(سیدوحید زوالفقاری)

-۱۶۹

گزینه‌ی «۱» نادرست است، زیرا  $P(e_1) < 0$ .  
گزینه‌ی «۲» نادرست است، زیرا:

$$P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + P(e_4)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{10}{12} \neq 1 = P(S)$$

گزینه‌ی «۳» درست است زیرا همه‌ی پیشامدها، احتمالی بین صفر و یک دارند و مجموع احتمالات برابر ۱ است. گزینه‌ی «۴» نادرست است زیرا

$$P(e_3) = \frac{5}{4} > 1$$

(ببروا احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس - صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

(سامان اسپهر)

-۱۷۰

$$P(1) = x, P(2) = 2x, \dots, P(6) = 6x$$

$$\Rightarrow x + 2x + \dots + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow P(x > 5) = P(x = 6) = 6x = \frac{6}{21}$$

(ببروا احتمال - احتمال: اندازه‌گیری شانس - صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \Rightarrow a + b = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 + b) = 4a + b, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x = 4 \Rightarrow 4a + b = 4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{2}{3}$$

(مسائل - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{3\pi x}{4} & -1 < x < 1 \\ \sqrt{2}[x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  باید از ضابطه‌ی بالایی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \cos \frac{3\pi}{4} x = 2 \cos \frac{3\pi}{4} = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2}$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$  باید از ضابطه‌ی پایینی استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{2}[x] \\ &= \sqrt{2}[(-1)^-] = \sqrt{2}(-2) = -2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

(مسائل - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

۴

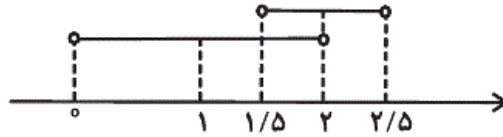
۳

۲ ✓

۱

(معمدرضا تویه)

برای سرعت بخشیدن به درک و حل تست به نمودار توجه کنید:



ملاحظه می‌شود اشتراک دو همسایگی، بازه‌ی  $(1/5, 2)$  است. این بازه همسایگی متقارن به مرکز  $a = 1/25$  و شعاع  $r = 0/25$  است، پس  $a - r = 1/5$  می‌شود.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-f(x)}{f(x)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = 2 - 1 - 1 = 0$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(معمرمصطفی ابراهیمی)

اول دامنه این تابع را تعیین می‌کنیم. مخرج کسر نباید صفر باشد، یعنی  $x - |x| \neq 0$  پس  $|x| \neq x$  در نتیجه باید  $x < 0$  باشد.

می‌دانیم برای محاسبه‌ی حد یک تابع در یک نقطه باید به آن نقطه از نقاط داخل دامنه نزدیک شویم.

پس برای به‌دست آوردن حد تابع  $y = f(x)$  در  $x = 0$  باید مقدار حد چپ آن را در این نقطه به‌دست آوریم چون مقادیر حد راست آن اصلاً در دامنه نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x - (-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} \quad (*)$$

حال با توجه به نامساوی  $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$  حد تابع  $g$  را در  $x = 0$  محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (2 - x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه‌ی فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)} = -\frac{1}{2} \quad \text{بنابراین با توجه به (*) داریم:}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیر هوشنگ فمسه)

می‌دانیم وقتی  $x \rightarrow (-1)^-$  می‌رود  $(-x)$  به  $(1^+)$  میل می‌کند از طرفی  $|x|$  در  $(-1)^-$  با علامت منفی از داخل قدرمطلق بیرون می‌آید همچنین عبارت داخل قدرمطلق  $|x^2 - 1|$  نیز مقداری مثبت می‌شود.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{-x - [1^+]} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 1}{-x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x+1)} = \frac{-1-1}{-1} = 2 \end{aligned}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓



مخرج کسر به ازای  $x=2$  صفر است. پس صورت کسر هم باید صفر باشد تا حد به صورت مبهم  $\frac{0}{0}$  شود و با رفع ابهام به مقدار عددی  $-\frac{1}{16}$  برسیم.

$$\sqrt{ax+b}-1=0 \xrightarrow{x=2} \sqrt{2a+b}=1 \Rightarrow 2a+b=1 \quad (*)$$

پس  $b-1=-2a$  است:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x^2-4} &\times \frac{\sqrt{ax+b}+1}{\sqrt{ax+b}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b-1}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \end{aligned}$$

به جای  $b-1$  در صورت کسر  $-2a$  را جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{(x+2)(\sqrt{ax+b}+1)} = \frac{a}{4(\sqrt{2a+b}+1)} \end{aligned}$$

$$(*) \quad \frac{a}{4(1+1)} = \frac{a}{8} = -\frac{1}{16} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم  $2a+b=1$  است، پس  $b=2$  به دست می‌آید.

$$a-2b = -\frac{1}{2} - 2(2) = -\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}$$

(مسئله - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

می‌دانیم  $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$  است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x)^2 - 1}{(3^x)^2 + 3^x - 2} \xrightarrow[\text{اتحاد جمله مشترک}]{\text{اتحاد مزدوج}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{(3^x - 1)(3^x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x + 1}{3^x + 2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

$$f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

پس تابع در  $x = 0$  حد ندارد و پیوسته نیست.

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمدمصطفی ابراهیمی)

-۱۱۱

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \left( \frac{2}{x} - 1 \right) = \frac{2}{a} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left( 1 - \frac{x}{2} \right) = 1 - \frac{a}{2}$$

مقادیر به دست آمده را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$\frac{2}{a} - 1 = 1 - \frac{a}{2} \xrightarrow{\times 2a} 4 - 2a = 2a - a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۹ و ۱۵۴ تا ۱۵۸)

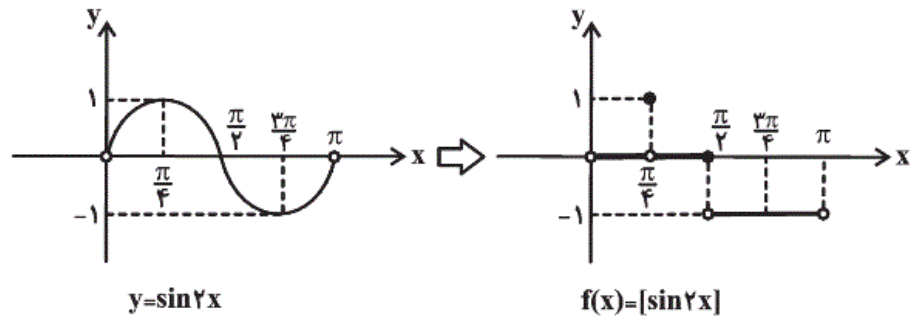
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیا مقدس نیاک)



با توجه به شکل تابع در بازه  $(0, \pi)$  ملاحظه می‌شود که در دو نقطه‌ی

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ و } x = \frac{\pi}{4} \text{ تابع ناپیوسته است.}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مسئله فایلو)

-۱۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2-x) \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow -x \rightarrow 0^- \Rightarrow -2-x \rightarrow (-2)^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2-x) = 1 - (-1) = 2$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۳۲ تا ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$y = \sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)} \Rightarrow D_y = x^2(x-1) \geq 0$$

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 0 \\ - \\ 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{array} \right. \Rightarrow D_y = [1, +\infty) \cup \{0\}$$



این تابع در همسایگی  $x=0$  تعریف نشده است، پس نمی‌توان درباره‌ی حد تابع در آن نقطه صحبت کرد.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۴۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کیامقدس نیاک)

-۱۱۵

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow \begin{cases} x-3 \rightarrow 0^- \xrightarrow{0^- < 0} |x-3| = -(x-3) \\ |x| = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{|x|-3} = \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهدامین نبافته)

-۱۱۶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - [2x] - \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{\pi[x]}{2}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - [2x] - \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{\pi[x]}{2}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3 - \frac{1}{2}x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x + \frac{3}{2})}{x-2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

۴ ✓       ۳       ۲       ۱

(امیر هوشنگ قمسه)

می دانیم  $\log_a x^n = n \log_a x$  است، پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \log_4^x - 2 \log_4^x}{(2-x)(2+x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \log_4^x}{-(x-2)(2+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_4^x}{-(2+x)} = \frac{\log_4^2}{-4} = \frac{\frac{1}{2}}{-4} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۴۰ تا ۱۵۳)

۴       ۳       ۲       ۱ ✓

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \frac{x}{\tan x} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x, \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیہ فی بندگی}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

(صبا بان - صفحہ های ۱۴۵ تا ۱۵۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سیدوید ذوالفقاری)

-۱۲۰

اول این که حواستان باشد نقاط  $x = -3$  و  $x = -1$  و  $x = 1$  اصلاً در دامنه نیستند، پس پیوستگی تابع را در این نقاط اصلاً بررسی نمی‌کنیم.

در  $x = -4$  مقدار حد چپ و راست تابع برابر نیست و تابع در این نقطه ناپیوسته است.

در  $x = 3$  هم تابع ناپیوسته است اگر چه در این نقطه، حد موجود است ولی مقدار حد با مقدار تابع برابر نیست.

در  $x = 4$  تابع پیوسته است. زیرا مقدار حد آن با حد چپ آن برابر است که برابر صفر می‌باشد و مقدار تابع هم در این نقطه برابر صفر است.

(صبا بان - صفحہ های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

نقطه‌ی ثابت یک خط در یک تبدیل، نقطه‌ای است که بر تصویر خود منطبق باشد. بازتاب محوری، هر نقطه‌ی محور را روی خودش تصویر می‌کند. بنابراین، کافی است نقطه‌ی تلاقی خط  $2x - 3y - 1 = 0$  را با محور  $2x + 3y - 5 = 0$  پیدا کنیم.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین  $A\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ ، نقطه‌ی ثابت مورد نظر است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مسین فابیو)

ضابطه‌ی تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت دو، به صورت  $D(x, y) = (2x, 2y)$  است، پس:

$$\begin{cases} X = 2x \Rightarrow x = \frac{X}{2} \\ Y = 2y \Rightarrow y = \frac{Y}{2} \end{cases}$$

$$x + y = 2 \Rightarrow \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} = 2 \Rightarrow X + Y = 4$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا عباسی اصل)

مساحت مربع  $ABCD$  را با  $S$  و مساحت مجانس آن را با  $S'$  نشان می‌دهیم، داریم:

$$a = 2 \Rightarrow S = 2^2 = 4$$

$$S' - S = 140 \Rightarrow S' - 4 = 140 \Rightarrow S' = 144$$

از طرفی:

و در نتیجه:

$$k^2 = \frac{S'}{S} = \frac{144}{4} \Rightarrow k^2 = 36 \Rightarrow k = 6$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

با توجه به فرض مسأله، با در نظر گرفتن  $O(4a-1, b+1)$ ،  
 $A(-1, 3)$  و  $B(3, 2)$  می توان گفت امتداد پاره خط  $AB$  از  $O$   
 می گذرد، بنابراین داریم:

$$m_{AB} = \frac{3-2}{-1-3} = -\frac{1}{4}$$

$$AB \text{ معادله ی: } y-2 = -\frac{1}{4}(x-3) \xrightarrow{\times 4} 4y-8 = -x+3$$

$$\Rightarrow 4y+x=11$$

$O(4a-1, b+1)$  در معادله ی  $AB$  صدق می کند، پس:

$$4(b+1) + 4a-1 = 11 \Rightarrow 4(a+b) = 8 \Rightarrow a+b = 2$$

(هندسه ۲ - تبدیل ها - صفحه های ۱۱۲ تا ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مشار منصورى)

ابتدا تبدیل یافته ی خط  $L: y = x$  را تحت تبدیل  $T$  به دست  
 می آوریم.

$$T(x, y) = (x-1, y+1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$$

$$T(L) = L' \Rightarrow (y'-1) - (x'+1) = 0$$

$$\Rightarrow y' - x' - 2 = 0 \Rightarrow L': y - x - 2 = 0$$

حال نقطه ی تقاطع  $L'$  را با خط  $y = -x$  می یابیم:

$$\begin{cases} y = -x \\ y - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$$

(هندسه ۲ - تبدیل ها - صفحه های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳ ✓

۲

۱



## راه حل اول:

اگر  $L': 2x + 3y = 0$  تصویر  $L: 2x - 3y = m$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  باشد، آن گاه  $L$  نیز تصویر  $L'$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  است. پس کافی است تصویر  $L'$  را تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  به دست آورده و با  $L$  مقایسه کنیم.

$$T(x, y) = (2 \times 3 - x, y) = (6 - x, y)$$

$$(6 - x, y) = (X, Y) \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - X \\ y = Y \end{cases}$$

$$L': 2x + 3y = 0 \xrightarrow{x=6-X, y=Y} L: 2(6 - X) + 3Y = 0$$

$$\Rightarrow L: 2X - 3Y = 12 \Rightarrow m = 12$$

## راه حل دوم:

خط به معادله  $2x + 3y = 0$  خط  $x = 3$  را در نقطه  $(3, -2)$  قطع می کند. پس مختصات نقطه  $(3, -2)$  در معادله تبدیل یافته نیز باید صدق کند:

$$2 \times 3 - 3 \times (-2) = m \Rightarrow m = 12$$

(هندسه ۲ - تبدیل ها - صفحه های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

نقطه  $(a, 0)$  روی خط به معادله  $x + 2y = a$  واقع است. پس تصویر  $L$  تحت این تبدیل، خطی است عمود بر آن در نقطه  $(a, 0)$ .

$$L: x + 2y = a \Rightarrow m_L = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{L'} = 2$$

$$L': y - 0 = 2(x - a) \Rightarrow L': y = 2x - 2a$$

$$\xrightarrow{(0, 4) \in L'} 4 = 0 - 2a \Rightarrow a = -2$$

(هندسه ۲ - تبدیل ها - صفحه های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمور مموری)

$$\sqrt{3}x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

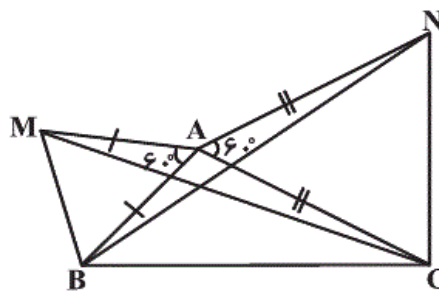
این خط با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $30^\circ$  می سازد و از مبدأ هم می گذرد. چنانچه این خط حول مبدأ  $120^\circ$  در جهت حرکت عقربه های ساعت دوران کند بر محور  $y$  ها منطبق می شود، پس  $A$  باید روی محور  $y$  ها باشد.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



با توجه به برابری‌های  
 $AB = AM$  ،  $AN = AC$   
 و می‌توان  $\hat{BAM} = \hat{NAC} = 6^\circ$   
 نتیجه گرفت که نقاط  $B$  و  $N$  ،  
 $M$  و  $C$  به ترتیب دوران یافته‌ی  
 تحت دوران به مرکز  $A$  و زاویه‌ی  
 $6^\circ$  هستند.

بنابراین پاره‌خط  $BN$  دوران یافته‌ی  $MC$  به مرکز  $A$  و زاویه‌ی  
 $6^\circ$  است، پس  $BN = MC$ .

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

از دو خط متنافر، هیچ صفحه‌ای نمی‌گذرد پس گزاره‌ی «الف» نادرست  
 است.

طبق مسأله‌ی ۵ صفحه‌ی ۱۳۸ کتاب درسی، اگر سه صفحه دو به دو  
 متقاطع باشند، فصل مشترک‌های آن‌ها، سه خط دو به دو موازی یا سه  
 خط هم‌مرس است، بنابراین گزاره‌ی «ب» در حالت کلی نادرست است.  
 از سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست، یک و فقط یک صفحه می‌گذرد،  
 پس گزاره‌ی «ج» نادرست است.

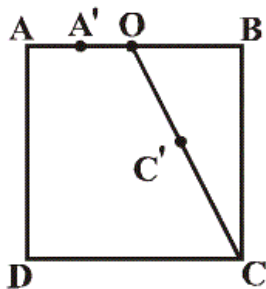
(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۳، ۱۳۶ و ۱۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



در این تجانس، نسبت تجانس  $\frac{1}{2}$  است.

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، نقطه‌ی  $C'$ ، تصویر نقطه‌ی  $C$ ، وسط  $OC$  واقع است.

$$OC' = CC' = \frac{OC}{2}$$

در مثل قائم‌الزاویه‌ی  $OBC$  داریم:

$$\hat{B} = 90^\circ, BC = \sqrt{5} \text{ و } OB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{5}{2}, CC' = \frac{5}{4}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

۴

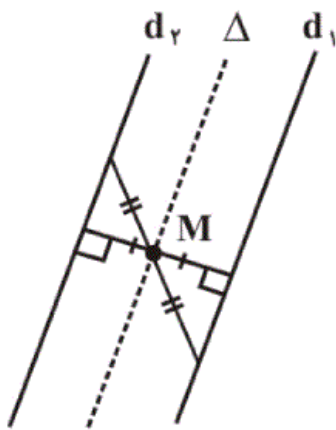
۳

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج کشور- ۸۸)

۱۳۲-



با توجه به فرض سؤال، خط

$d_1: x - 2y + 6 = 0$  تصویر خط

$d_2: x - 2y - 4 = 0$  تحت بازتاب نسبت

به نقطه‌ی  $M(2, a)$  است، پس  $M$  روی

محور تقارن دو خط موازی  $d_1$  و  $d_2$ ، یعنی

خط به معادله‌ی  $\Delta: x - 2y + \frac{6-4}{2} = 0$

قرار دارد، در نتیجه مختصات آن در

معادله‌ی خط  $\Delta$  صدق می‌کند:

$$2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

**راه حل اول:** در تجانس، شیب خط حفظ می‌شود، پس  $a = 2$ . در تجانس با نسبت  $K$ ، طول‌ها  $K$  برابر می‌شود، پس فاصله‌ی نقطه‌ی  $(1, 2)$  از خط  $y + 2x - b = 0$ ، دو برابر فاصله‌ی این نقطه از خط  $y + 2x - 3 = 0$  است. داریم:

$$\frac{|4+2-b|}{\sqrt{1+4}} = 2\left(\frac{|4+2-3|}{\sqrt{1+4}}\right) \Rightarrow |6-b| = 6 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 12 \end{cases}$$

به ازای  $b = 12$  مرکز تجانس بین دو خط قرار می‌گیرد که قابل قبول نیست.

**راه حل دوم:** می‌دانیم که ضابطه‌ی تجانس به نسبت  $K$  و مرکز  $(\alpha, \beta)$  به صورت  $D(x, y) = (Kx + (1-K)\alpha, Ky + (1-K)\beta)$  است، پس:

$$(\alpha, \beta) = (1, 4), K = 2$$

$$\Rightarrow D(x, y) = (2x - 1, 2y - 4) = (X, Y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = X \\ 2y - 4 = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X+1}{2} \\ y = \frac{Y+4}{2} \end{cases}, y + 2x = 3$$

$$\Rightarrow \frac{Y+4}{2} + 2\left(\frac{X+1}{2}\right) = 3 \xrightarrow{\times 2} Y + 4 + 2(X+1) = 6$$

$$\Rightarrow Y + 2X = 0$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی اخیر با صورت سؤال نتیجه می‌شود  $a = 2$  و  $b = 0$

(هنر سه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

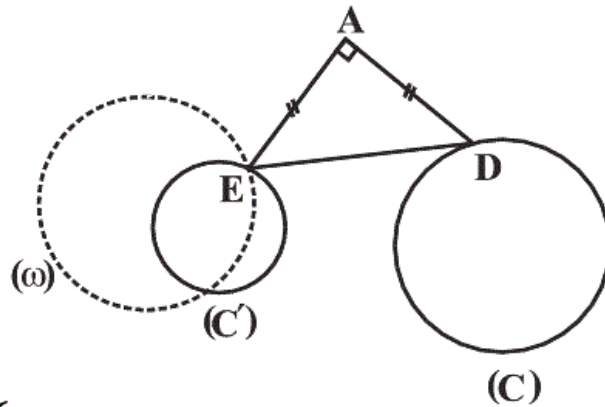
۴

۳

۲ ✓

۱

عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا دایره‌ی  $\omega$  به دست آید، نقطه‌ی برخورد  $C'$  با  $\omega$  را  $E$  می‌نامیم. دوران یافته‌ی  $E$  حول  $A$  و به زاویه‌ی  $90^\circ$ ، قطعاً نقطه‌ی  $D$  واقع بر دایره‌ی  $C$  است که با استفاده از تعریف دوران:



$$\begin{cases} AE = AD \\ \hat{EAD} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ADE \text{ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.}$$

(هنر سه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

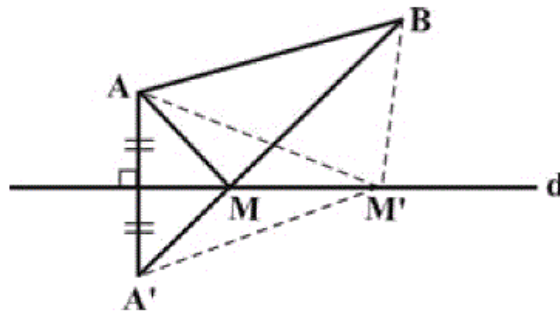
۴

۳

۲

۱

قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط d، A' می‌نامیم و از B به A' وصل می‌کنیم تا پاره خط حاصل، خط d را در نقطه‌ی M قطع کند. ثابت می‌کنیم M نقطه‌ای روی d است که مجموع فاصله‌های آن از A و B، کم‌ترین مقدار ممکن است:



اگر نقطه‌ای دلخواه مانند M' روی d در نظر بگیریم و از آن به A، A' و B وصل کنیم، داریم:

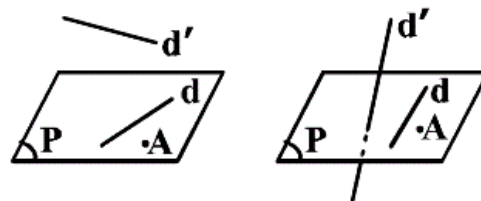
$$\begin{aligned} \triangle M'A'B: M'B + M'A' &> A'B \\ \Rightarrow M'B + M'A' &> MB + MA' \\ \xrightarrow{MA=MA'} M'B + M'A' &> MB + MA \end{aligned}$$

نامساوی اخیر نشان می‌دهد که نقطه‌ی M، نقطه‌ای روی d است که مجموع فاصله‌های آن از A و B کم‌ترین مقدار ممکن است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۱ ✓      ۲      ۳      ۴

(کتاب آبی هندسه ۲ - صفحه‌ی ۱۶ - سوال ۳۹۹)



خط d' هیچ‌گاه به تمامی در صفحه‌ی P قرار نمی‌گیرد؛ زیرا d و d' متناظرند.

۱      ۲ ✓      ۳      ۴

می‌دانیم اگر خطی با یکی از دو صفحه‌ی موازی، متقاطع باشد، حتماً با دیگری نیز متقاطع است، پس هر صفحه‌ی موازی با صفحه‌ی  $P$ ، دو خط  $D$  و  $\Delta$  را قطع می‌کند و خط واصل بین دو نقطه‌ی تلاقی، جواب مسأله است.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌ی ۱۴۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

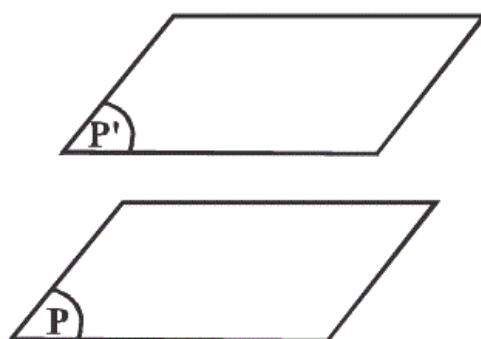
با دو خط متقاطع  $D$  و  $D'$  یک صفحه تشکیل می‌شود و عکس قضیه‌ی تالس در صفحه پدید می‌آید: اگر دو خط  $D$  و  $D'$  سه خط  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  را قطع کنند و پاره‌خط‌های متناظر متناسب ایجاد کنند، سه خط  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  با هم موازی هستند. به این ترتیب، سه صفحه‌ی  $P$ ،  $P'$  و  $P''$  در این تست نقش مهمی ندارند و نسبت به هم هر وضعی می‌توانند داشته باشند، (عکس قضیه‌ی تالس در فضا لزوماً درست نیست).

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۶، ۱۴۴ و ۱۴۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱


از نقطه‌ی  $A$  می‌توان دقیقاً یک صفحه مانند  $Q$  به موازات  $P$  و  $P'$  رسم کرد. هر خطی واقع در صفحه‌ی  $Q$  که از نقطه‌ی  $A$  بگذرد با هر دو صفحه‌ی  $P$  و  $P'$  موازی است، پس مسأله، بی‌شمار جواب دارد.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

خط  $d$  درون صفحه‌ی  $Q$  واقع است، فرض کنیم  $d \parallel P$ ، حال در صورتی که دو صفحه‌ی  $P$  و  $Q$ ، متقاطع باشند، فصل مشترک آن‌ها یعنی خط  $L$  قطعاً موازی  $d$  است. خط  $L$  متعلق به صفحه‌ی  $Q$  است، پس اگر خط گذرنده از نقطه‌ی  $A$  در این صفحه، خط  $d$  را قطع کند، قطعاً خط  $L$  (و در نتیجه‌ی صفحه‌ی  $P$ ) را نیز قطع خواهد کرد یعنی خط گذرنده از نقطه‌ی  $A$  و متقاطع با خط  $d$  نمی‌تواند با صفحه‌ی  $P$  موازی باشد.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۷)

۴

۳

۲

۱

ریاضی، هندسه ۲- گواه-سوالات موازی، - ۱۳۹۶۰۲۰۱

(کتاب آبی هندسه ۲- صفحه‌ی ۱۰- سؤال ۳۸۳)

۱۵۱-

نقطه‌ی دلخواه  $M = (x, y)$  را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$R_1(x, y) = (y, x) \text{ : بازتاب نسبت به خط } y = x$$

$$R_2(x, y) = (-x, -y) \text{ : بازتاب نسبت به مبدأ مختصات}$$

$$M = (x, y) \xrightarrow{R_1} M_1 = (y, x) \xrightarrow{R_2} M_2 = (-y, -x)$$

تبدیل  $T(x, y) = (-y, -x)$ ، نقطه‌ی  $M$  را بر  $M_2$  تصویر می‌کند.

$$M = (x, y) \xrightarrow{T} M_2 = (-y, -x) \Rightarrow$$

می‌دانیم که  $T(x, y) = (-y, -x)$  ضابطه‌ی بازتاب نسبت به نیم‌ساز ربع دوم و چهارم است.

(هندسه ۲- تبدیل‌ها- صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی هندسه ۲- صفحه‌ی ۸۳- سؤال ۲۴)

۱۵۲-

زاویه‌های  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  برابرند و  $AB = AB'$  و  $AC = AC'$  (چرا؟)

از طرفی  $\widehat{C'AC} = 2\widehat{A_1}$  و  $\widehat{B'AB} = 2\widehat{A_1}$  در نتیجه نقاط  $B'$  و  $C'$  به

ترتیب دوران یافته‌ی نقاط  $B$  و  $C$  با اندازه‌ی زاویه  $2\widehat{A_1}$  حول نقطه‌ی

$A$  هستند. پس مثلث  $AB'C'$  دوران یافته‌ی مثلث  $ABC$  حول

نقطه‌ی  $A$  با اندازه‌ی زاویه‌ی  $2\widehat{A_1}$  است.

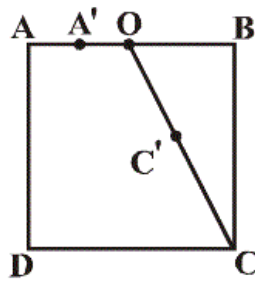
۴

۳

۲

۱





در این تجانس، نسبت تجانس  $\frac{1}{2}$  است.

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، نقطه‌ی  $C'$ ، تصویر نقطه‌ی  $C$ ، وسط  $OC$  واقع است.

$$OC' = CC' = \frac{OC}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $OBC$  داریم:

$$\hat{B} = 90^\circ, BC = \sqrt{5} \text{ و } OB = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow OC^2 = OB^2 + BC^2 = \frac{5}{4} + 5 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{5}{2}, CC' = \frac{5}{4}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها- صفحه‌های ۱۱۲ تا ۱۱۶)

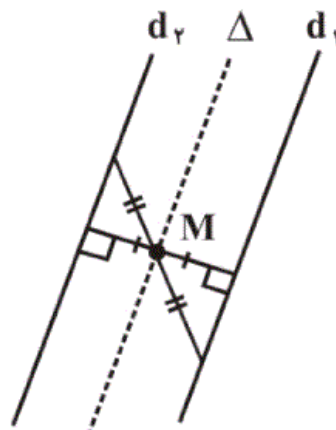
۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج کشور- ۸۸)



با توجه به فرض سؤال، خط

$$d_1: x - 2y + 6 = 0 \text{ تصویر خط}$$

$$d_2: x - 2y - 4 = 0 \text{ تحت بازتاب نسبت}$$

به نقطه‌ی  $M(2, a)$  است، پس  $M$  روی

محور تقارن دو خط موازی  $d_1$  و  $d_2$ ، یعنی

$$\Delta: x - 2y + \frac{6-4}{2} = 0 \text{ خط به معادله‌ی}$$

قرار دارد، در نتیجه مختصات آن در

معادله‌ی خط  $\Delta$  صدق می‌کند:

$$2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌ها- صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

راه حل اول: در تجانس، شیب خط حفظ می‌شود، پس  $a = 2$ .

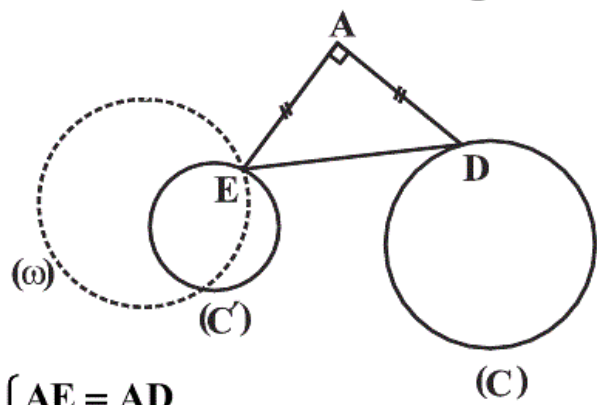
در تجانس با نسبت  $K$ ، طول‌ها  $K$  برابر می‌شود، پس فاصله‌ی نقطه‌ی  $(1, 4)$  از خط  $y + 2x - b = 0$  دو برابر فاصله‌ی این نقطه از خط  $y + 2x - 3 = 0$  است. داریم:

$$\frac{|4 + 2 - b|}{\sqrt{1 + 4}} = 2 \left( \frac{|4 + 2 - 3|}{\sqrt{1 + 4}} \right) \Rightarrow |6 - b| = 6 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 12 \end{cases}$$

به ازای  $b = 12$  مرکز تجانس بین دو خط قرار می‌گیرد که قابل قبول نیست.

- ۱       ۲       ۳       ۴

ابتدا مسأله را حل شده در نظر گرفته و فرض کنید دو نقطه‌ی  $D$  و  $E$  به ترتیب روی دو دایره  $C$  و  $C'$  طوری موجود هستند که مثلث  $ADE$  قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. با توجه به شکل می‌توان گفت که در واقع  $D$  و  $E$  دوران یافته‌ی هم به زاویه‌ی  $90^\circ$  حول نقطه‌ی  $A$  هستند. با این توضیحات کافیست که نحوه‌ی پیدا کردن نقاط  $D$  و  $E$  را مشخص کنیم: دایره‌ی  $C$  را حول  $A$  به اندازه‌ی  $90^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا دایره‌ی  $\omega$  به دست آید، نقطه‌ی برخورد  $C'$  با  $\omega$  را  $E$  می‌نامیم. دوران یافته‌ی  $E$  حول  $A$  و به زاویه‌ی  $90^\circ$ ، قطعاً نقطه‌ی  $D$  واقع بر دایره‌ی  $C$  است که با استفاده از تعریف دوران:



$$\begin{cases} AE = AD \\ \hat{EAD} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ADE \text{ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.}$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

- ۴       ۳       ۲       ۱

$$\Delta M'A'B : M'B + M'A' > A'B$$

$$\Rightarrow M'B + M'A' > MB + MA'$$

$$\xrightarrow{MA=MA'} M'B + M'A' > MB + MA$$

نامساوی اخیر نشان می‌دهد که نقطه‌ی  $M$ ، نقطه‌ای روی  $d$  است که مجموع فاصله‌های آن از  $A$  و  $B$  کم‌ترین مقدار ممکن است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌ها - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۶)

۴

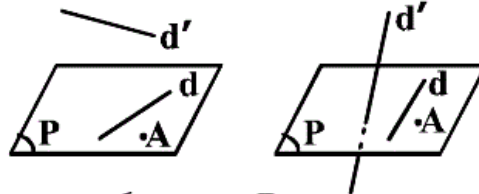
۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی هندسه ۲ - صفحه‌ی ۱۶ - سوال ۳۹۹)

-۱۵۸



خط  $d'$  هیچ‌گاه به تمامی در صفحه‌ی  $P$  قرار نمی‌گیرد؛ زیرا  $d$  و  $d'$  متناظرند.

پس  $d'$  صفحه‌ی  $P$  را قطع نمی‌کند و یا با آن متقاطع است.

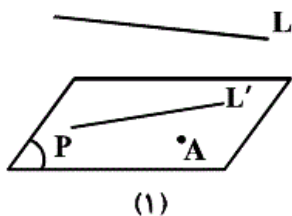
(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

۴

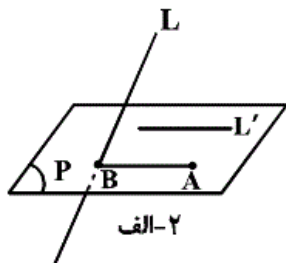
۳

۲ ✓

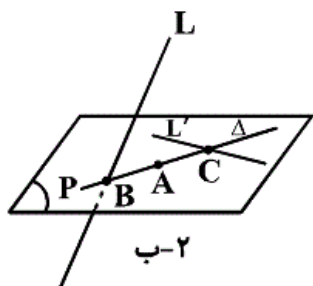
۱



صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی A و خط  $L'$  را رسم می‌کنیم و آن را P می‌نامیم. دو حالت پیش می‌آید:  
 ۱ - صفحه‌ی P با خط L موازی است، در این حالت مسأله جواب ندارد.



۲ - صفحه‌ی P با خط L متقاطع است و آن را در نقطه‌ی B قطع می‌کند، در این وضعیت، دو حالت پیش می‌آید:  
 الف) پاره‌خط AB با خط  $L'$  موازی باشد، در این حالت مسأله جواب ندارد.



ب) خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، با خط  $L'$  متقاطع باشد. در این حالت مسأله یک جواب دارد.  
 پس در حالت کلی مسأله حداکثر یک جواب دارد.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۶)

- ۴
- ۳
- ۲ ✓
- ۱

از دو خط متقاطع یا دو خط متمایز موازی، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد. پس این چهار نقطه که بر روی دو خط AB و CD قرار دارند، فقط در حالت‌های تقاطع یا توازی دو خط، در یک صفحه قرار می‌گیرند.

(هندسه ۲ - هندسه در فضا - مسأله‌ی ۲ - صفحه‌ی ۱۳۸)

- ۴ ✓
- ۳
- ۲
- ۱