



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی، هندسه ۲، تبدیل‌ها - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۴۱- ترکیبی از کدام دو تبدیل زیر، ایزومتری نیست ولی شیب خط‌ها را حفظ می‌کند؟

(۱) انتقال و بازتاب نسبت به خط

(۲) بازتاب نسبت به نقطه و دوران

(۳) تجانس و بازتاب نسبت به خط

(۴) بازتاب نسبت به نقطه و تجانس

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- نگاشت  $M$  از صفحه به خط  $L$  را به این صورت تعریف می‌کنیم: «اگر نقطه‌ی  $P$ ، واقع بر صفحه، روی  $L$  باشد، آن‌گاه  $M(P) = P$  و

اگر  $P$  روی  $L$  نباشد، آن‌گاه  $M(P) = P'$  که  $P'$  محل تقاطع عمودی است که از  $P$  بر  $L$  رسم می‌شود». نگاشت  $M$  چگونه

است؟

(۱) یک‌به یک است - ایزومتری است.

(۲) یک به یک نیست - ایزومتری است.

(۳) یک به یک نیست - ایزومتری نیست.

(۴) یک به یک است - ایزومتری نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- مساحت تصویر مثلث  $ABC$  با رأس‌های  $A(۶,۰)$ ،  $B(۰,-۴)$  و  $C(۰,۰)$  تحت تبدیل  $T(x,y) = (x+۴, y-۴)$  کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- دو خط  $L: y-x=۰$  و  $d: y+x=۰$  مفروض‌اند. نقطه‌ی برخورد تبدیل یافته‌ی خط  $L$  (یعنی  $L'$ ) تحت انتقال

$T(x,y) = (x-۱, y+۱)$  با خط  $d$  کدام است؟

(۱)  $(۰,۰)$

(۲)  $(-۲,-۲)$

(۳)  $(-۱,۱)$

(۴)  $(۱,-۱)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵-  $L': ۲x+۳y=۰$  تبدیل یافته‌ی خط  $L: ۲x-۳y=m$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x=۳$  است.  $m$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۴

(۳) ۸

(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- در یک بازتاب محوری نسبت به خط  $l: 2x + 3y - 5 = 0$ ، نقطه‌ی ثابت خط  $D: 2x - 3y - 1 = 0$  کدام است؟

(۱)  $(3, 2)$  (۲)  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

(۳)  $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$  (۴)  $(3, -2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- قرینه‌ی نقطه‌ی  $M(3, 5)$  نسبت به مرکز ثقل مثلث  $ABC$  با مختصات رأس‌های  $A(0, 0)$  و  $B(6, 0)$  و  $C(0, 6)$ ، کدام نقطه است؟

(۱)  $(1, 1)$  (۲)  $(2, 1)$

(۳)  $(1, -1)$  (۴)  $(2, -1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- نقطه‌ی  $(3, 4)$  را به مرکز  $O_1(1, -1)$  و زاویه‌ی  $90^\circ$  دوران می‌دهیم، فاصله‌ی نقطه‌ی حاصل تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) ۵ (۲)  $\sqrt{17}$

(۳)  $\sqrt{26}$  (۴)  $\sqrt{19}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹-  $u = (2, -3)$  بردار یک انتقال است. نقطه‌ی  $A(1, 2)$  را با بردار  $\vec{u}$  به نقطه‌ی  $A'$  انتقال می‌دهیم. اگر نقطه‌ی  $A'$  بر تصویر خط

$2x + 3y - 2 = 0$  تحت یک تجانس به مرکز  $(0, 0)$  منطبق باشد، بر اثر این تجانس مساحت هر شکل در صفحه، چند برابر می‌شود؟

(۱) ۳ (۲)  $\frac{3}{2}$

(۳) ۹ (۴)  $\frac{9}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- مثلث  $ACB'$  بازتاب مثلث  $ABC$  نسبت به خط گذرا از دو نقطه  $A$  و  $C$  و مثلث  $AB'C'$  بازتاب مثلث  $ACB'$  نسبت به خط گذرا از

نقاط  $A$  و  $B'$  است. مثلث  $AB'C'$  تصویر مثلث  $ABC$  تحت کدام تبدیل زیر است؟

(۱) دوران حول نقطه  $A$  با اندازه‌ی زاویه‌ی  $\hat{A}$  (۲) دوران حول نقطه‌ی  $A$  با اندازه‌ی زاویه‌ی  $2\hat{A}$

(۳) بازتاب نسبت به نقطه‌ی  $A$  (۴) تجانس به مرکز  $A$

شما پاسخ نداده اید

۸۱- دامنه‌ی تابع مشتق  $f(x) = \begin{cases} x + [x] & ; |x| < 1 \\ 2x^2 + |x| & ; |x| \geq 1 \end{cases}$  کدام است؟ ( [ ] ، علامت جز صحیح است.)

(۱)  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$

(۲)  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1\}$

(۳)  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(۴)  $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

شما پاسخ نداده اید

۸۲- مقدار مشتق دوم  $y$  بر حسب  $x$  در نقطه‌ی  $(-1, 1)$  واقع بر منحنی  $x^3 + 2\sqrt{y} = 1$  کدام است؟

(۱) ۷

(۲)  $8/5$

(۳) ۱۰

(۴)  $10/5$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- برای تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = \begin{cases} 2x - \tan 2x & ; x > 0 \\ ax^n & ; x \leq 0 \end{cases}$ ، اگر مقدار  $f^{(3)}(0)$  موجود باشد،  $a$  کدام است؟

(۱)  $\frac{8}{3}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $-\frac{8}{3}$

(۴)  $-\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- مشتق تابع  $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$  در نقطه‌ی  $x = n$  در صورت وجود کدام است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

(۱)  $\frac{1}{n}$

(۲)  $n$

(۳)  $n!$

(۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2-h)}{h} = 5$  و  $g(x) = \sqrt{3x+1}$  باشد، آنگاه مشتق تابع  $f \circ g$  در نقطه‌ی  $x = 1$  کدام است؟

(۱)  $\frac{15}{16}$

(۲)  $\frac{15}{8}$

(۳)  $\frac{5}{16}$

(۴)  $\frac{5}{8}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- از نقطه‌ی  $(0, 1)$  واقع بر منحنی  $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$  مماس  $(d)$  بر منحنی را رسم می‌کنیم. این مماس نمودار تابع را در

نقطه‌ای دیگر نیز قطع می‌کند، در نقطه‌ی تقاطع، زاویه‌ی بین خط مماس و خط  $d$  کدام است؟

(۱)  $\tan^{-1}(3)$

(۲)  $\tan^{-1}(23)$

(۳)  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

(۴)  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{23}\right)$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- مساحت مثلثی که رئوس آن نقاط بحرانی تابع  $f(x) = x^2 \sqrt{3-x^2}$  هستند، چقدر است؟

(۱) ۲

(۲)  $2\sqrt{2}$

(۴) ۴

(۳)  $4\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- تابع معکوس تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ x^3+1, & x \geq -1 \end{cases}$  در دو نقطه مشتق پذیر نیست. فاصله‌ی آن دو نقطه، کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴)  $2\sqrt{2}$

(۳)  $\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- مقدار ماکزیمم مطلق تابع  $y = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x - 1}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{\sqrt{3}+2}$

(۲)  $\frac{3}{\sqrt{3}-2}$

(۴) صفر

(۳) ۱

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر  $f$  مشتق پذیر و معکوس پذیر باشد و بدانیم  $f(2) = 0$  و  $f'(2) = \frac{1}{3}$  آن گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf^{-1}(x-1) - 2}{x-1}$  کدام است؟

(۲) ۵

(۱) -۱

(۴)  $\frac{5}{3}$

(۳)  $\frac{7}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۱- آهنگ متوسط تغییر تابع  $f(x) = \ln(\tan^2 \frac{\pi x}{12})$  در  $[2, 4]$ ، از آهنگ آنی تغییر تابع در  $x = 3$  چقدر بیشتر است؟

(۲)  $\ln \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۱)  $\ln 9 - \frac{\pi}{2}$

(۴)  $\ln 3 - \frac{\pi}{6}$

(۳)  $\ln 3 - \frac{\pi}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- مقدار مشتق مرتبه پنجم  $y = \frac{\sin x + x^2 \sin x + \cos x}{1 + x^2}$  در  $x = 0$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۹۳- ماکزیمم مطلق تابع  $f(x) = 2 \sin x - \sin 2x$  چقدر از می نیمم مطلق آن بیش تر است؟

(۱)  $\sqrt{3}$

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۴)  $3\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر  $f$  تابعی مشتق پذیر و  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^3$  باشد، آن گاه  $f'(3)$  کدام است؟

(۱) -۶

(۲) ۶

(۳) -۲

(۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۹۵- مینیمم مطلق تابع  $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۳

(۳) -۱

(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x) - 4} = -2$  و  $(1, 4) \in f$  باشد،  $f'(1)$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۹۷- از نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر محور  $x$  ها، خط قائمی بر منحنی  $y = x^2$  رسم شده است. این خط قائم محور  $y$  ها را با کدام عرض قطع

می‌کند؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۳)  $-\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- ماکزیمم مطلق تابع  $f(x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{4}$

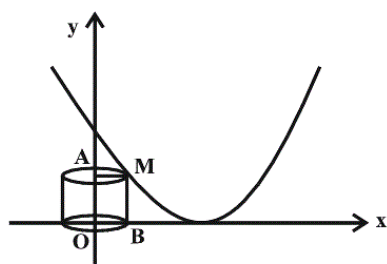
(۲) ۱

(۳)  $\frac{4}{5}$

(۴)  $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- با توجه به شکل زیر، روی منحنی  $f(x) = (x-4)^2$  نقطه‌ی  $M$  را مشخص می‌کنیم. مستطیل  $OAMB$  را حول محور  $y$  دوران



می‌دهیم. حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ی ایجاد شده کدام است؟

(۱)  $8\pi$

(۲)  $16\pi$

(۳)  $32\pi$

(۴)  $64\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- آهنگ تغییر سطح یک مکعب نسبت به ضلع آن وقتی طول ضلع برابر ۲ است، کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۶

(۳) ۲۴

(۴) ۱۸

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۱۱- اگر دو مجانب مایل یک هذلولی، خطوط  $2x + y = 0$  و  $2x + ay = 0$  باشند و نقطه‌ی  $(\sqrt{5}, 2)$  روی هذلولی باشد، فاصله‌ی

کانونی این هذلولی چقدر است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(۲)  $2\sqrt{5}$

(۳)  $4\sqrt{5}$

(۴)  $\sqrt{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- به ازای کدام مقدار  $m$ ، فاصله‌ی دو کانون مقطع مخروطی  $xy = m$  برابر ۸ است؟ ( $m > 0$ )

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = A^3$ ، حاصل  $b_{۳۲}$  کدام است؟

- (۱) ۷  
(۲) -۷  
(۳) ۹  
(۴) -۹

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$  و  $A^n = 2^{2n-2} \times 3^{n-1} A$ ،  $a$  کدام است؟

- (۱) ۳  
(۲) ۶  
(۳) ۹  
(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر  $A$  یک ماتریس متقارن  $2 \times 2$  با درایه‌های حقیقی باشد، کدام یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند نشان دهنده‌ی  $AA^t$  باشد؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$   
(۲)  $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$   
(۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$   
(۴)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- مجموع درایه‌های ماتریس  $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{۱۰۱}$  کدام است؟

- (۱) -۱  
(۲) ۱  
(۳)  $\sqrt{3}$   
(۴)  $-\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید



۱۱۷- خروج از مرکز تبدیل یافته‌ی مقطع مخروطی  $x^2 - y^2 + 4x = -5$ ، تحت ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\frac{\sqrt{13}}{9} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{13}}{3} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{13}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{14}}{9} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  همسازهی درایه‌ی سطر سوم و ستون اول با همسازهی درایه‌ی عنصر ۴ برابر است. عدد  $a$  کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$-3 \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- فرض کنید  $A$  ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳ باشد. اگر  $A^2 = A + I$  و  $|A| = -1$ ، دترمینان ماتریس  $A + 2I$  برابر کدام می‌تواند باشد؟

$$3 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$5\sqrt{5} \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر  $M = \begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 1 & y & 2 \end{vmatrix}$  آن‌گاه حاصل  $\begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 2x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  کدام است؟

$$M \quad (2)$$

$$-2M \quad (1)$$

$$-M \quad (4)$$

$$2M \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته، همنهشتی، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۳۱- رابطه‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی  $m$ ، مجموعه‌ی اعداد صحیح را به ۱۳ کلاس هم‌ارزی افراز کرده است. اگر عدد چهار رقمی  $\overline{1a5a}$  در کلاس هم‌ارزی  $[7]$  قرار داشته باشد،  $a$  چند مقدار مختلف می‌تواند، داشته باشد؟

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a$  بر دو عدد ۲۴ و ۵۴ به ترتیب ۲۰ و ۱۴ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم  $a^2 + 1$  بر ۳۶ کدام است؟

$$17 \quad (4)$$

$$15 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- چند رابطه روی مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  وجود دارد که نه متقارن و نه بازتابی باشد؟

- (۱)  $2^6 \times 945$  (۲)  $2^4 \times 745$  (۳)  $2^6 \times 845$  (۴)  $2^4 \times 645$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- یک رابطه روی  $A = \{a, b, c\}$  نوشته شده و شامل زوج‌های مرتب  $(b, a)$  و  $(a, b)$  است. اگر این رابطه دارای خاصیت تعدی باشد و

تقارنی نباشد، حداقل چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- رابطه‌ی هم‌ارزی  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b)\}$  روی مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  را به چند کلاس هم‌ارزی افزایش

می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- اگر  $R_1 = \{(x, y) | x \geq y\}$  و  $R_2 = \{(x, y) | 2x + y \leq 6\}$  باشند، آنگاه مساحت نمودار رابطه‌ی  $R_1 \cap R_2$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۱۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد، که نسبت به ۱۰۰ غیر اول هستند؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۵۵ (۳) ۵۴ (۴) ۵۳

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- چند عضو از مجموعه  $\{5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^8\}$  نسبت به ۶ اول هستند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- معادله‌ی  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$  در اعداد طبیعی و فرد بزرگتر از ۴ دارای چند جواب است؟

- (۱)  $\binom{11}{3}$  (۲)  $\binom{13}{3}$  (۳)  $\binom{15}{3}$  (۴)  $\binom{19}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- کلاس هم‌ارزی  $[(1, -1)]$  در کدام یک از روابط هم‌ارزی زیر که همگی روی  $R^2$  تعریف شده‌اند، نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه

مختصات می‌باشد؟

(۱)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ab = cd$  (۲)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

(۳)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + d = c^2 + b$  (۴)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- حاصل عبارت  $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3+2\sqrt{2}}$  کدام است؟

(۱)  $(3+2\sqrt{2})\sqrt{2}$  (۲) ۱

(۳)  $(\sqrt{2}+1)\sqrt{2}$  (۴)  $(\sqrt{2}+1)\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، توابع نمایی و لگاریتم - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۰۲- به ازای چند مقدار  $x$ ، سه عبارت  $\log 16 + (\log x)^2$ ،  $\log 4x$ ، ۱، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- مجموعه‌ی جواب معادله‌ی  $\log_3 \frac{1}{9} = \log_4 [3x+2] + \log_3 \frac{1}{9} = 0$  کدام است؟ ( [ ] ، نماد جزء صحیح است.)

(۱)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  (۲)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

(۳)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  (۴)  $[\frac{1}{3}, 1)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۰۳- اگر مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم  $x^4 - 3x^2 + ax - 1$  بر  $x+1$  برابر با ۷ باشد،  $a$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵

(۳) ۶ (۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، معادله‌ای که جواب‌های آن  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  و  $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$  باشند، کدام است؟

(۱)  $x^2 - 3x + 1 = 0$  (۲)  $x^2 - 3x - 1 = 0$

(۳)  $x^2 + 3x - 1 = 0$  (۴)  $x^2 + 3x + 1 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر نمودار منحنی  $y = -x^2 + 2x + c$  از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات بگذرد، آن‌گاه حدود  $c$  کدام است؟

(۱)  $c > -1$

(۲)  $c > 0$

(۳)  $-1 < c < 0$

(۴)  $c < -1$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- می‌خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم‌اندازه بپوشانیم، کمترین تعداد فرش‌ها کدام است؟

(۱) ۳۶۰

(۲) ۹۰

(۳) ۱۸۰

(۴) ۴۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر بسط دو جمله‌ای  $(a + b)^n$  بر حسب توان‌های نزولی  $a$  مرتب شود، مجموع ضرایب عددی ۳ جمله اول با ضرایب عددی ۳ جمله‌ی

آخر آن کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۱۳۴

(۲) ۲۴۲

(۳) ۴۲۲

(۴) ۱۳۰

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- معادله‌ی  $(\sqrt{2})^x = \frac{2^{x+1} + 1}{3}$  چند جواب دارد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- حد مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی برابر  $\frac{16}{9}$  و حد مجموع مربعات آن‌ها برابر  $\frac{256}{63}$  است. جمله‌ی دوم این دنباله کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{8}$

(۳) ۲

(۴)  $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۲۱- هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی به معادله‌ی  $x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0$ ، محور  $y$ ها را در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه‌ی مقادیر

$a$  به کدام صورت است؟

$$|a| < 2 \quad (1) \qquad |a| > 2 \quad (2)$$

$$|a| < 4 \quad (3) \qquad |a| > 4 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- با دوران محورهای مختصات به اندازه‌ی مناسب، معادله‌ی مقطع مخروطی  $\sqrt{3}xy + y^2 = 1$ ، به کدام صورت نوشته می‌شود؟

$$3x^2 - y^2 = 2 \quad (1) \qquad 2x^2 - 3y^2 = 2 \quad (2)$$

$$3x^2 + y^2 = 2 \quad (3) \qquad 2x^2 + 3y^2 = 2 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۲۰

۱۲۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، آن‌گاه:

$$x = y = -1 \quad (1) \qquad x = -y = -1 \quad (2)$$

$$x = y = 1 \quad (3) \qquad x = -y = 1 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- اگر  $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$  و  $B = [b_{ij}]_{4 \times 3}$  باشند، کدام ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است؟

$$A^t B \quad (2) \qquad AB \quad (1)$$

$$AB^t \quad (4) \qquad B^t A^t \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر  $A$  ماتریس متقارن و  $B$  ماتریس پاد متقارن باشند به طوری که  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$  آن‌گاه ماتریس  $A \cdot B$

چگونه است؟

$$(1) \text{ قطری} \qquad (2) \text{ بالا مثلثی}$$

$$(3) \text{ متقارن} \qquad (4) \text{ پاد متقارن}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- تبدیل یافته‌ی  $2y - 3x = 0$  با ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، چگونه است؟

(۱) محور  $y$  ها

(۲) محور  $x$  ها

(۳) نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم

(۴) نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  مستطیل  $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  را به متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌کند. مساحت متوازی‌الاضلاع، کدام است؟

(۱) ۳۶

(۲) ۴۳

(۳) ۴۸

(۴) ۵۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- اگر دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & m & -2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$  برابر ۲۰ و همسازه‌های  $A_{11} = 2A_{12} = -A_{13} = 10$  باشند،  $m$  کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) -۲

(۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  مفروض است. دترمینان ماتریس  $(\frac{1}{4}A \cdot A^t)$  کدام است؟

(۱) ۳۲

(۲) ۶۴

(۳) ۷۲

(۴) ۱۴۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- اگر  $a, b$  و  $c$  سه عدد حقیقی متمایز باشند، حاصل دترمینان  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $abc$

(۳)  $a + b + c$

(۴)  $(a - b)(b - c)(c - a)$

شما پاسخ نداده اید

(رضا بفشیره)

۱۴۱-

بازتاب نسبت به نقطه و تجانس هر دو شیب خط را حفظ می‌کند پس ترکیب آن‌ها شیب خط را حفظ می‌کند. بازتاب نسبت به نقطه ایزومتری است ولی تجانس ایزومتری نیست، پس ترکیب آن‌ها ایزومتری نیست و مطلوب مسأله است.

(هندسه‌ی ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۸۳ تا ۱۱۹)

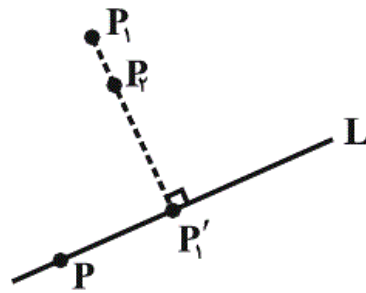
۴

۳

۲

۱

نگاشت  $M$  به صورت زیر نقاط صفحه را روی خط  $L$  تصویر می‌کند، که در آن اگر  $P \in L$  آن‌گاه تصویرش بر خودش منطبق می‌شود. (نقطه‌ی  $P$  در شکل) و در غیر این صورت تصویر نقطه‌ی  $P_1 \notin L$  بر نقطه‌ی  $P_1'$  که پای عمود رسم شده از  $P_1$  بر  $L$  است، واقع می‌شود. روشن است که تصویر هر نقطه‌ی دیگری که واقع بر عمود مرسوم از  $P_1$  بر  $L$  باشد بر نقطه‌ی  $P_1'$  منطبق می‌شود. (مانند نقطه‌ی  $P_2$  در شکل). این نشان می‌دهد که  $M$  یک‌به‌یک نیست و ایزومتري هم نیست، زیرا چنانچه  $P_1$  و  $P_2$  بر هم منطبق نباشند، طول پاره‌خط  $P_1P_2$  ناصفر است، در صورتی که تصویر آن‌ها، هر دو بر  $P_1'$  منطبق است و فاصله‌ی تصاویرشان برابر صفر می‌شود.



(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمور همبندی)

-۱۴۳

$$AB = \sqrt{(0-6)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$AC = \sqrt{(0-6)^2 + (0-0)^2} = 6$$

$$BC = \sqrt{(0-0)^2 + (0+4)^2} = 4$$

واضح است که  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ، پس مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است.

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



ابتدا تبدیل یافته‌ی خط  $L$  تحت تبدیل  $T$  را به دست می‌آوریم.

$$T(x, y) = (x - 1, y + 1) \Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

$$T(L) = L' \Rightarrow (y' - 1) - (x' + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y' - x' - 2 = 0 \Rightarrow L' : y - x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} d : y + x = 0 \\ L' : y - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow d \cap L' = (-1, 1)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۴۵

اگر  $L'$  تصویر  $L$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  باشد، آن‌گاه  $L$

نیز تصویر  $L'$  تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  است. پس کافی است

تصویر  $L'$  را تحت بازتاب نسبت به خط  $x = 3$  به دست آورده و با  $L$

مقایسه کنیم.

$$T(x, y) = (2 \times 3 - x, y) = (6 - x, y)$$

$$(6 - x, y) = (X, Y) \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - X \\ y = Y \end{cases}$$

$$L' : 2x + 3y = 0 \xrightarrow{x=6-X, y=Y} L : 2(6 - X) + 3Y = 0$$

$$\Rightarrow L : 2X - 3Y = 12 \Rightarrow m = 12$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

نقطه‌ی ثابت یک خط در یک تبدیل، نقطه‌ای است که بر تصویر خود منطبق باشد. بازتاب محوری، هر نقطه‌ی محور را روی خودش تصویر می‌کند. بنابراین، کافی است نقطه‌ی تلاقی خط  $D$  را با محور  $P$  پیدا کنیم.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

بنابراین  $A(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$ ، نقطه‌ی ثابت مورد نظر است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمود مموری)

-۱۴۷

مرکز ثقل مثلث، نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث است. فرض کنیم  $G$  مرکز ثقل مثلث باشد.

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2, 2)$$

حال اگر  $M'$ ، قرینه‌ی نقطه‌ی  $M$  نسبت به نقطه‌ی  $G$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$G = \frac{M + M'}{2} \Rightarrow M' = 2G - M \Rightarrow M' = (4, 4) - (3, 5) = (1, -1)$$

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

مرکز دوران نقطه‌ی ثابت دوران است و تحت دوران تغییر نمی‌کند. پس:

$$R(1, -1) = (1, -1) \Rightarrow (1 + a, 1 + b) = (1, -1) \Rightarrow a = 0, b = -2$$

$$R(x, y) = (-y, x - 2) \Rightarrow R(3, 4) = (-4, 1)$$

و فاصله‌ی این نقطه از مبدأ مختصات  $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$  است.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۱)

۴

۳

۲

۱

(معمداً ابراهیم کیتی زاده)

-۱۴۹

اگر  $A'(x', y')$  باشد، آن‌گاه:

$$\overline{AA'} = \vec{u} \Rightarrow (x' - 1, y' - 2) = (2, -3) \Rightarrow A'(3, -1)$$

به‌طور کلی، تصویر خط  $ax + by + c = 0$  تحت یک تجانس به مرکز

$(0, 0)$  و با نسبت  $k$  به‌صورت  $ax + by + c \times k = 0$  است.

$$2x + 3y - 2 = 0 \xrightarrow{H^k_O} 2x + 3y - 2 \times k = 0$$

$$2 \times 3 - 3 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

تبدیل تجانس با نسبت  $k > 0$ ، طول پاره‌خط را با ضریب  $k$  و مساحت

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \frac{9}{4}$$

هر شکل را با ضریب  $k^2$  تغییر می‌دهد.

(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶ و ۱۱۲ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

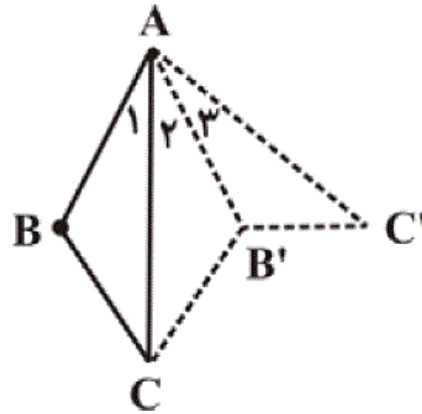
زاویه‌های  $A_1$  و  $A_2$  و  $A_3$  برابرند و  $AB = AB'$  و  $AC = AC'$  (چرا؟)

از طرفی  $\widehat{C'AC} = 2\widehat{A_1}$  و  $\widehat{B'AB} = 2\widehat{A_1}$  در نتیجه نقاط  $B'$  و  $C'$  به

ترتیب دوران یافته‌ی نقاط  $B$  و  $C$  با اندازه‌ی زاویه  $2\widehat{A_1}$  حول نقطه‌ی

$A$  هستند. پس مثلث  $AB'C'$  دوران یافته‌ی مثلث  $ABC$  حول

نقطه‌ی  $A$  با اندازه‌ی زاویه‌ی  $2\widehat{A_1}$  است.



(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۵۱۲۲۰

به علت براکت، ضابطه‌ی بالایی به ازای مقادیر صحیح  $x$  مشتق‌ناپذیر است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \leq -1 \\ x + [x] & -1 < x < 1 \\ 2x^2 + x & x \geq 1 \end{cases}$$

پس تاکنون این تابع در  $x = 0$  مشتق‌ناپذیر است و در نقاط  $x = -1$  و

$x = 1$  تابع دارای ناپیوستگی است، در نتیجه در این نقاط نیز تابع  $f$

مشتق‌ناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & ; x < -1 \\ 1 & ; -1 < x < 1 \\ 4x + 1 & ; x > 1 \end{cases}$$

نقاطی که تابع  $f$  در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است، در دامنه‌ی  $f'$  وجود نخواهند

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

داشت. پس:

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱

(صیب شفیع)

-۸۲

$$x^3 + 2y^{\frac{1}{2}} = 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} 3x^2 + y^{-\frac{1}{2}} y' = 0$$

$$\frac{x=-1}{y=1} \rightarrow 3 + y' = 0 \Rightarrow y' = -3$$

$$3x^2 + y^{-\frac{1}{2}} y' = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 6x + \left(-\frac{1}{2}\right) y^{-\frac{3}{2}} y'^2 + y'' y^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{x=-1, y=1}{y'=-3} \rightarrow -6 - \frac{1}{2}(1)(9) + y''(1) = 0 \Rightarrow y''(1) = 10/5$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱ و ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲

۱

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -8 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) & ; x > 0 \\ an(n-1)x^{n-2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \begin{cases} -16(1 + \tan^2 x)^2 - 32 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) & ; x > 0 \\ an(n-1)(n-2)x^{n-3} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = -16 \quad (1)$$

برای اینکه  $f'_-(0)$  مخالف صفر باشد، باید توان  $x$  یعنی  $n-3$  برابر صفر باشد.

$$n-3=0 \Rightarrow n=3 \Rightarrow f'_-(0) = a \times 3 \times 2 \times 1 = 6a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 6a = -16 \Rightarrow a = \frac{-8}{3}$$

دقت کنید که به ازای  $n=3$  شرط پیوستگی  $f$ ،  $f'$  و  $f''$  در  $x=0$  برقرار می‌شود.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۵۱)

۴

۳

۲

۱

(عمید ستاری)

-۸۴

$$x=n \Rightarrow y=1$$

$$\text{Ln} y = \text{Ln} \left( \frac{x}{n} \right)^{nx} \Rightarrow \text{Ln} y = nx \cdot \text{Ln} \left( \frac{x}{n} \right) \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = n \cdot \text{Ln} \frac{x}{n} + n$$

$$\xrightarrow[\frac{y=1}{x=n}]{} \frac{y'}{1} = n \cdot \text{Ln} 1 + n \Rightarrow \frac{y'}{1} = n \Rightarrow y' = n$$

(مسابان - مشتق: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۴

۳

۲

۱

(مر تفضی روزبوانی)

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \times f'(g(1))$$

$$g(1) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2-h)}{h} = 5$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{h \rightarrow 0} 3f'(2+3h) + f'(2-h) = 5$$

$$\Rightarrow 4f'(2) = 5 \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(1) = \frac{3}{4} \times f'(2) = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{16}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 = m$$

$$y - 1 = 3(x - 0) \Rightarrow \text{معادله‌ی خط مماس} \Rightarrow d : y = 3x + 1$$

برای تعیین نقطه‌ی تقاطع تابع  $f$  و خط مماس آنها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$2x^3 - x^2 + 3x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow 2x^3 - x^2 = 0$$

چون  $x = 0$  نقطه‌ی مماس بوده، پس نقطه‌ی تقاطع  $x = \frac{1}{2}$  است.

حال شیب خط مماس در این نقطه را به دست می‌آوریم:

$$m' = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{6}{4} - 1 + 3 = \frac{7}{2}$$

$$\tan(\theta) = \left| \frac{m - m'}{1 + m.m'} \right| \Rightarrow \tan(\theta) = \left| \frac{\frac{7}{2} - 3}{1 + \left(\frac{7}{2}\right)(3)} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{\frac{23}{2}} \right| = \frac{1}{23}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{23}\right)$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶ و ۱۳۴)

۴

۳

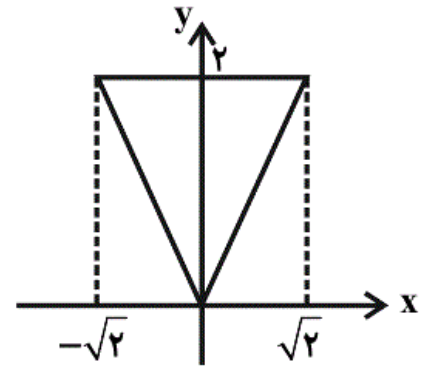
۲

۱



مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt{3-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}} \\ &= \frac{2x(3-x^2) - x^3}{\sqrt{3-x^2}} \\ &= \frac{3x(2-x^2)}{\sqrt{3-x^2}} \end{aligned}$$



در نقاطی به طول  $x = 0$  و  $x = \pm\sqrt{2}$  مشتق تابع برابر صفر و در نقاط

$x = \pm\sqrt{3}$  مشتق تابع وجود ندارد. ولی  $x = \pm\sqrt{3}$ ، نقاط درونی دامنه‌ی تابع

نیستند و بحرانی محسوب نمی‌شوند. پس  $(0,0)$  و  $(-\sqrt{2}, 2)$  و  $(\sqrt{2}, 2)$

نقاط بحرانی تابع هستند. مساحت مثلث مورد نظر برابر است با:

$$S = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مدرس رضا شوکتی بیرق)

-۸۸

روش اول: ابتدا ضابطه‌ی  $f^{-1}$  را به دست می‌آوریم.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & , x < 0 \\ \sqrt[3]{x-1} & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^2}} & , x > 0, x \neq 1 \\ \text{وجود ندارد.} & , x = 0, 1 \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، تابع  $f^{-1}$  در دو نقطه به طول‌های  $x = 0$  و

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(0) = -1 &\Rightarrow A(0, -1) \in f^{-1} \\ f^{-1}(1) = 0 &\Rightarrow B(1, 0) \in f^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{2}$$

روش دوم: فرض کنید تابع  $f$  در همسایگی چپ و راست  $x = a$  تعریف شده

باشد، تابع  $f^{-1}$  در نقطه‌ی  $(b, a)$  مشتق ناپذیر است، هرگاه تابع  $f$  در نقطه‌ی

$x = a$  مشتق ناپذیر و یا  $f'(a) = 0$  باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , x < -1 \\ x^3 + 1 & , x \geq -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , x < -1 \\ 3x^2 & , x > -1 \\ \text{وجود ندارد.} & , x = -1 \end{cases}$$

پس تابع  $f$  در  $x = -1$  مشتق ناپذیر است و  $f'(0) = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (-1, 0) \in f \Rightarrow (0, -1) \in f^{-1} \\ x = 0 &\Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \in f \Rightarrow (1, 0) \in f^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله‌ی دو نقطه} = \sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

۴

۳

۲

۱

چون  $1 + \cos 2x \geq 0$  و  $\sin x - 1 \leq 0$  است. پس مقدار کسر همواره

غیرمثبت است. یعنی  $y = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x - 1} \leq 0$  می باشد و ماکزیمم آن برابر صفر

می شود و زمانی رخ می دهد که  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$  باشد.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه های ۱۶۷ تا ۱۷۰)

 ۴ ✓

 ۳

 ۲

 ۱

(ممدمصطفی ابراهیمی)

-۹۰

$$f(2) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 2 \quad (1)$$

فرض می کنیم  $x - 1 = t$ ، داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)f^{-1}(t) - 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tf^{-1}(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(t) - 2}{t}$$

$$\stackrel{(1)}{=} f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(2)} = 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0) = 2 + 3 = 5$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه های ۱۵۷ تا ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲ ✓

 ۱

(صیب شفیع)

$$f(x) = 2 \ln\left(\tan\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{2(\ln \tan \frac{\pi}{3} - \ln \tan \frac{\pi}{6})}{2}$$

$$= \ln \sqrt{3} - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \ln \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \ln 3$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{\frac{\pi}{12}(1 + \tan^2 \frac{\pi x}{12})}{\tan \frac{\pi x}{12}} \Rightarrow f'(3) = \frac{2 \times \frac{\pi}{12} \times 2}{1} = \frac{\pi}{3}$$

بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و آنی برابر است با:  $\ln 3 - \frac{\pi}{3}$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۲۷ و ۱۵۷ تا ۱۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

-۹۲

$$y = \frac{\sin x(1 + x^2) + \cos x}{1 + x^2} = \sin x + \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

تابع  $g(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ ، یک تابع زوج بوده، لذا مشتق مرتبه‌ی پنجم آن تابعی

فرد است، بنابراین در  $x = 0$  برابر صفر خواهد بود. کافی است مشتق مرتبه‌ی

پنجم  $y = \sin x$  را در  $x = 0$  حساب کنیم:  $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$$\Rightarrow y'' = -\sin x \Rightarrow y^{(3)} = -\cos x$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y^{(5)} = \cos x \Rightarrow y^{(5)}(0) = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۲۵ و ۱۲۶ و ۱۴۵ تا ۱۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(ممد رضا شوکتی بیرق)

کافی است، اکسترمم مطلق تابع داده شده را در یک دوره‌ی تناوب، مثلاً در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  به دست آوریم.

$$f(x) = 2 \sin x - \sin 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x - 2 \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{cases} f(0) = f(2\pi) = 0 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ : ماکزیمم مطلق} \\ f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ : می نیمم مطلق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف ماکزیمم و می نیمم مطلق} = 3\sqrt{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(هاری فولادی)

$$\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Rightarrow x = 2$$

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} -\frac{2}{(x-1)^2} f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3x^2$$

$$\xrightarrow{x=2} -2f'(3) = 12 \Rightarrow f'(3) = -6$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } x \geq 0$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1 + \sqrt{x^2+2x}) \times \frac{(x+1 - \sqrt{x^2+2x})}{(x+1 - \sqrt{x^2+2x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x}{x+1 - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

بنابراین می‌نیمم مطلق تابع  $-1$  است.  $f(-2) = -1$  ,  $f(0) = 1$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هاری پلاور)

-۹۶

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{f(x)-4} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)-4}$$

$$= -1 \times \frac{1}{f'(1)} = -2 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\Rightarrow (\alpha - 1) \underbrace{(2\alpha^2 + 2\alpha + 3)}_{\Delta < 0} = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\text{معادله‌ی خط قائم: } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۶)

۴

۳

۲

۱

(مدرس اکبری)

-۹۸

$$D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4}, \quad f(0) = 1, \quad f(\pm 1) = 1$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۰)

۴

۳

۲

۱

(میب شفیعی)

-۹۹

نقطه‌ی M به مختصات  $M(x, (x-4)^2)$  را در نظر می‌گیریم:

$$\text{حجم استوانه } V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi x^2 (4-x)^2$$

$$V = \pi(4x - x^2)^2 \Rightarrow V' = 2\pi(4x - x^2)(4 - 2x) = 0$$

جواب‌های  $V' = 0$  برابر ۰ و ۴ و ۲ است که ۰ و ۴ قابل قبول نیست. (در

این حالت حجم صفر می‌شود)

$$V = \pi x^2 (4-x)^2 \xrightarrow{x=2} V = 16\pi$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۶۵ و ۱۶۶)

۴

۳

۲

۱

(نکین یغمایی)

اگر ضلع مکعب را  $x$  در نظر بگیریم، سطح مکعب از رابطه‌ی  $S = 6x^2$  به دست می‌آید.

$$S = 6x^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} S' = 12x \xrightarrow{x=2} 24$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌ی ۱۲۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۱۲۲۰

-۱۱۱

(علی ایمانی)

شیب خطوط مجانب قرینه‌ی هم هستند. پس  $a = -1$ .معادله‌ی هذلولی عبارت است از:  $(2x + y)(2x - y) = k$ 

$$4x^2 - y^2 = k \xrightarrow{(\sqrt{5}, 2)} 4(5) - 4 = k \Rightarrow k = 16$$

$$4x^2 - y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳ ✓

۲

۱



$$xy = m \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{1}{0} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

$$xy = m \Rightarrow \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \right] = m$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = m \Rightarrow \frac{x'^2}{2m} - \frac{y'^2}{2m} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 = 2m$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2m + 2m = 4m \Rightarrow c = 2\sqrt{m} \quad (1)$$

$$|FF'| = 2c \Rightarrow \lambda = 2c \Rightarrow c = 4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 4 = 2\sqrt{m} \Rightarrow m = 4$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۱۳ تا ۹۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۲۰

(علی اکبر جعفری)

ستون دوم ماتریس  $\times A$  سطر سوم ماتریس  $A^2$

$A^2 \times A$  سطر سوم ماتریس  $A$  = سطر سوم ماتریس  $A^2$

$$A^2 \text{ سطر سوم ماتریس } = [-1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad -1 \quad -4]$$

$$b_{32} = [1 \quad -1 \quad -4] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 + 0 - 8 = -9$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{aligned}
 A^2 &= \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= a^2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2a^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2a \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = 2aA
 \end{aligned}$$

$$A^3 = A \times A^2 = A \times (2aA) = 2a(\underbrace{A \times A}_{2aA}) = 2a(2aA) = 2^2 a^2 A$$

در نتیجه ماتریس  $A^n$  به صورت زیر است:

$$A^n = 2^{n-1} a^{n-1} A$$

$$\begin{cases} A^n = 2^{2n-2} \times 3^{n-1} A \\ A^n = 2^{n-1} a^{n-1} A \end{cases} \Rightarrow 2^{2n-2} \times 3^{n-1} = 2^{n-1} a^{n-1}$$

$$\Rightarrow (2^2 \times 3)^{n-1} = (2a)^{n-1} \Rightarrow 12 = 2a \Rightarrow a = 6$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد، داریم:

$$B = AA^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

از طرفی نامساوی‌های روبه‌رو همواره برقرار است:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 \geq 2ac \\ b^2 + d^2 \geq 2bd \end{array} \right\} \Rightarrow (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq 2(ac + bd)$$

$$\Rightarrow b_1 + b_4 \geq b_2 + b_3$$

یعنی در ماتریس  $AA^t$ ، جمع درایه‌های قطر اصلی بزرگتر یا مساوی جمع

درایه‌های قطر فرعی است، که تنها گزینه‌ی «۲» درست است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -R\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{101} = \left(-R_{-\frac{\pi}{3}}\right)^{101} = -R_{-\frac{\pi}{3}}^{101} = -R_{-34\pi + \frac{\pi}{3}} = -R_{\frac{\pi}{3}}$$

$$= - \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y = \frac{y'}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 + 4x = -5 \Rightarrow \left(\frac{x'}{2}\right)^2 - \left(\frac{y'}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{x'}{2}\right) = -5$$

$$36\left(\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} + 2x' = -5\right) \Rightarrow 9x'^2 - 4y'^2 + 72x' = -18.$$

$$f'(x') = 0 \Rightarrow 18x' + 72 = 0 \Rightarrow x' = -4$$

$$9(x' + 4)^2 - 4y'^2 = +144 - 180 = -36$$

$$\frac{9(x' + 4)^2}{-36} - \frac{4y'^2}{-36} = 1 \Rightarrow \frac{y'^2}{9} - \frac{(x' + 4)^2}{4} = 1 \quad \text{هذلولی قائم}$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

کهاد درایه  $i, j$  ام ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  یک ماتریس  $2 \times 2$  با علامت  $M_{ij}$  است که از حذف سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام از ماتریس  $A$  باقی می ماند. همسازهی درایه  $i, j$  ام ماتریس  $A$ ، یک عدد است که به صورت  $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$  تعریف می شود.

$$A_{31} = (-1)^{1+3} |M_{31}| = \begin{vmatrix} a & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 2$$

عنصر ۴ در سطر دوم و ستون سوم واقع است،

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = - \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2a + 3$$

$$4a - 2 = 2a + 3 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه های ۱۱۳ تا ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(آزنگ نوید)

$$(A + 2I)^2 = A^2 + 4A + 4I = A^2 + 4(\underbrace{A + I}_{A^2}) = 5A^2$$

$$|A + 2I|^2 = |5A^2| = 5^3 |A^2| = 5^3 |A|^2 = 125$$

$$\Rightarrow |A + 2I| = \pm \sqrt{125} = \pm 5\sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه های ۱۱۳ تا ۱۲۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 2x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 2x & 2y & 4 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ -2 & -2y & -4 \end{vmatrix}}_{\text{سطر اول و سوم مضرب یکدیگرند.}}$$

سطر اول و سوم مضرب یکدیگرند.

$$= \begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 2x & 2y & 4 \end{vmatrix} + 0 = 2 \begin{vmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ x & y & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} -2 \begin{vmatrix} x & y & 2 \\ 3 & 1 & x \\ 1 & y & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2M$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، همنهشتی ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۲۲۰

-۱۳۱

(کامظم باقرزاده)

$$\begin{aligned} \overline{13} & \qquad \qquad \qquad \overline{13} \\ 13a \equiv 7 \pmod{13} & \Rightarrow 1 \cdot \dots + 1 \cdot a + 5 \cdot 0 + a \equiv 7 \\ \Rightarrow 12 + 9a - 2 + a & \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow 1 \cdot a \equiv -3 \equiv 10 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 1 \\ \Rightarrow a & = 13k + 1 \end{aligned}$$

چون  $a$  یک رقم است، پس مقدار آن باید بین صفر و ۹ باشد، بنابراین تنها مقدار  $a = 1$  قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

-۱۳۲

(علیرضا شریف‌قطبی)

$$\left. \begin{aligned} a \equiv 20 \pmod{36} & \xrightarrow{4|24} a \equiv 20 \equiv -4 \pmod{36} \\ a \equiv 14 \pmod{36} & \xrightarrow{9|54} a \equiv 14 \equiv -4 \pmod{36} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv -4 \pmod{36} \Rightarrow a^2 \equiv 16 \pmod{36}$$

$$\Rightarrow a^2 + 1 \equiv 17 \pmod{36}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، ترکیبیات - ۱۳۹۵۱۲۲۰

-۱۳۳

(علیرضا کلاتری)

تعداد رابطه‌های بازتابی و متقارن روی مجموعه چهار عضوی A به ترتیب برابر  $۲^{۱۲}$  و  $۲^{۱۰}$  و تعداد رابطه‌های هم بازتابی و هم متقارن برابر  $۲^۶$  است. بنابراین تعداد رابطه‌هایی که نه بازتابی و نه متقارن باشند، برابر است با:

$$۲^{۱۶} - (۲^{۱۰} + ۲^{۱۲} - ۲^۶) = ۲^۶(۲^{۱۰} - ۲^۴ - ۲^۶ + ۱) = ۲^۶ \times ۹۴۵$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۳۴

(سعید زوارقی)

چون رابطه متقارن نیست، لاقلاً یک زوج مرتب دیگر مثلاً (b,c) نیز در آن باید وجود داشته باشد تا از حالت تقارنی خارج شود و چون باید خاصیت تعدی هم داشته باشد. بنابراین باید (a,c) نیز عضو رابطه‌ی R باشد. همچنین برای حفظ خاصیت تعدی و به دلیل وجود زوج مرتب‌های (a,b) و (b,a)، لزوماً زوج مرتب‌های (a,a) و (b,b) نیز به رابطه‌ی R تعلق دارند.

$$R = \{(a,b)(b,a)(a,a)(b,b)(b,c)(a,c)\}$$

پس رابطه حداقل ۶ عضو دارد.

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۳۵

(مهدی عزیزی)

کلاس‌های هم‌ارزی ایجاد شده توسط رابطه‌ی R عبارتند از:

$$[a] = \{a\}, [b] = [c] = \{b,c\}, [d] = \{d\}$$

بنابراین سه کلاس هم‌ارزی توسط رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A ایجاد شده است.

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۳۶

(سروش موئینی)

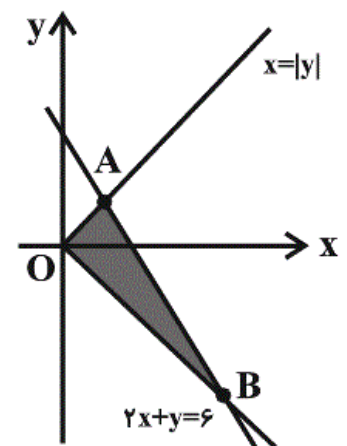
$$A: \begin{cases} x = y \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = y = 2$$

$$B: \begin{cases} x = -y \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = -6$$

$$AO = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$BO = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{OAB} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$



(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۰ و ۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱



(فرزاد بواری)

$$100 = 2^2 \times 5^2$$

$$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{5}\right) = 40.$$

چون اعداد دو رقمی مدنظر است، ۱، ۳، ۷ و ۹ که یک رقمی هستند و نسبت به ۱۰۰ اولند را حذف می‌کنیم.

بنابراین در اعداد دو رقمی، سی و شش عدد وجود دارد که نسبت به ۱۰۰ اولند. پس  $90 - 36 = 54$  عدد وجود دارد که دو رقمی بوده و نسبت به ۱۰۰ غیراولند.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علیرضا شریف‌فطیپی)

اگر مجموعه‌ی اعدادی که مضرب ۲ هستند را با A و مجموعه‌ی اعدادی که مضرب ۳ هستند را با B نمایش دهیم، آن‌گاه:

$$|A| = \left[\frac{80}{2}\right] - \left[\frac{49}{2}\right] = 40 - 24 = 16$$

$$|B| = \left[\frac{80}{3}\right] - \left[\frac{49}{3}\right] = 26 - 16 = 10$$

$$|A \cap B| = \left[\frac{80}{6}\right] - \left[\frac{49}{6}\right] = 13 - 8 = 5$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 10 - 5 = 21$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 31 - 21 = 10$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

اعداد فرد بزرگتر از ۴ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_1 = 2k_1 + 1, & x_2 = 2k_2 + 1, & x_3 = 2k_3 + 1, & x_4 = 2k_4 + 1 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 2 \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + (2k_3 + 1) + (2k_4 + 1) = 40 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 18 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k'_1 + k'_2 + k'_3 + k'_4 = 18 - 4 \times 2 = 10$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{13}{3}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومحبوب)

-۱۴۰

کلاس هم‌ارزی  $(1, -1)$  در گزینه‌ی «۱»، برابر  $xy = -1$ ، در گزینه‌ی «۲»،

$y = x + 2$ ، در گزینه‌ی «۳»،  $y = x^2 - 2$  و در گزینه‌ی «۴»،  $y = -x$

است که نیمساز ربع دوم و چهارم دستگاه مختصات می‌باشد.

(پیرواختمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

ابتدا دقت کنید که:

$$\text{و } (\sqrt{2} + 1)^{-1} = (\sqrt{2} - 1) \text{ پس:}$$

$$(3 + 2\sqrt{2})^{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} (\sqrt{2} + 1)^{-2\sqrt{2}}$$

$$= (\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^{2\sqrt{3}}} = (\sqrt{2} + 1)^{\sqrt{3}}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی ، ریاضی پایه ، توابع نمایی و لگاریتم - ۱۳۹۵۱۲۲۰

$$1, \log 4x, (\log x)^2 + \log 16$$

$$\xrightarrow[\text{دنباله‌ی هندسی}]{\text{شرط تشکیل}} (\log 4x)^2 = (\log x)^2 + \log 16$$

$$(\log 4x)^2 - (\log x)^2 = \log 16$$

$$\Rightarrow (\log 4x + \log x)(\log 4x - \log x) = \log 16$$

$$\log 4x^2 \cdot \log 4 = 2 \log 4 \Rightarrow \log_4 x^2 = 2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & \text{ق ق} \\ x = -5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(ریاضی ۲ - الگو و دنباله؛ صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ و توابع نمایی و لگاریتمی؛

صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۵)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(نادر مومری سامانی)

-۱۰۶

$$\log_4 [3x+2] + \log_3 \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \log_4 [3x+2] + \log_3 9^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \log_4 [3x+2] - 2 \log_3 3 = 0 \Rightarrow \log_4 [3x+2] = 2$$

$$\Rightarrow 4 = [3x+2]^2 \Rightarrow 2^2 = [3x+2]^2$$

$$\xrightarrow{[3x+2] > 0} [3x+2] = 2 \Rightarrow 2 \leq 3x+2 < 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3}$$

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$5x^2 - 3x^2 + ax - 1 = (x+1)Q(x) + R$$

چون مجموع ضرایب  $Q(x)$  برابر ۷ است، پس  $Q(1) = 7$  در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow 5-3+a-1=2 \times 7 + R \Rightarrow a=13+R \\ x=-1 \Rightarrow 5-3-a-1=0+R \Rightarrow 1-a=R \end{array} \right\} \Rightarrow a=7$$

(مسئله‌ها - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۶ تا ۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کاملاً ایملانی)

-۱۰۴

جمع و ضرب جواب‌های معادله‌ی  $x^2 - 3x + 1 = 0$  برابر ۳ و ۱ است. جمع و ضرب جواب‌های معادله‌ی جدید را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta}} = 1$$

$$S = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$$

بنابراین معادله‌ی جدید به صورت  $x^2 - 3x + 1 = 0$  است که با معادله‌ی اولیه یکسان است.

(مسئله‌ها - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴

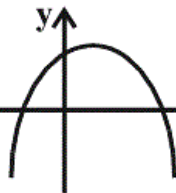
 ۳

 ۲

 ۱

(علی دارایی نیا)

با توجه به شرایط داده شده، نمودار آن شبیه  $x$  می باشد،



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ a < 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{array} \right. \text{ لذا بایستی تمام شرایط برقرار باشد.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a < 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c > 0 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2^2 - 4(-1)(c) > 0 \Rightarrow 4 + 4c > 0 \Rightarrow c > -1 \quad (2)$$

$$(2) \cap (1) \Rightarrow c > 0$$

(مسئله - معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(همایون شریک)

-۱۰۸

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۶ و ۴۰ برابر ۴ می باشد.

$$(36, 40) = 4$$

$$\frac{40 \times 36}{4 \times 4} = 90$$

برای پیدا کردن کمترین تعداد فرش‌ها داریم:

(مسئله - معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

⇒ (مجموع ضرایب عددی ۳ جمله‌ی آخر) + (مجموع ضرایب عددی ۳ جمله‌ی اول)

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

می‌دانیم:

$$\Rightarrow 2 \left( \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right) = 2 \left( 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$= 2 + 2n + n^2 - n = n^2 + n + 2 = n(n+1) + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 134 = 11 \times 12 + 2 \\ 242 = 15 \times 16 + 2 \\ 422 = 20 \times 21 + 2 \\ 130 = 11 \times 12 - 2 \end{cases}$$

(مسئله - مسابقات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱

$$\frac{2^{x+1} + 1}{3} = (\sqrt{2})^x \Rightarrow 2^{x+1} + 1 = 3 \times (\sqrt{2})^x$$

با فرض  $t = (\sqrt{2})^x$  خواهیم داشت:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \text{ق ق} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \rightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

پس معادله‌ی داده شده، ۲ جواب دارد.

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتمی؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۹۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(عیب شفیع)

-۱۰۱

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q} = \frac{16}{9} \Rightarrow 9a = 16 - 16q$$

در دنباله‌ی مربعات، جمله‌ی اول  $a^2$  و قدرنسبت  $q^2$  است. بنابراین:

$$\text{حد مجموع مربعات} = \frac{a^2}{1-q^2} = \frac{256}{63} \Rightarrow \frac{a}{1-q} \times \frac{a}{1+q} = \frac{256}{63}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{9} \times \frac{a}{1+q} = \frac{256}{63} \Rightarrow \frac{a}{1+q} = \frac{16}{7} \Rightarrow 7a = 16 + 16q$$

$$\begin{cases} 9a = 16 - 16q \\ 7a = 16 + 16q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ q = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \text{جمله‌ی دوم} = -\frac{1}{4}$$

(حسابان - محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



-۱۲۱

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۷)

برای آن که هر یک از دو شاخه‌ی هذلولی، محور  $y$  ها را در یک نقطه قطع کند، باید هذلولی قائم باشد.

$$x^2 + ax - 4y^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left( \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right) - 4y^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - 4y^2 = \frac{a^2 - 16}{4} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a^2 - 16}{4}} - \frac{y^2}{\frac{a^2 - 16}{16}} = 1$$

برای آن که این هذلولی قائم باشد، باید علامت کسر شامل  $y$  مثبت و علامت کسر شامل  $x$  منفی باشد، پس باید:

$$a^2 - 16 < 0 \Rightarrow a^2 < 16 \Rightarrow |a| < 4$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱

راه حل اول: اگر  $0 < \theta < 180^\circ$  زاویه‌ی مناسب برای دوران محورهای مختصات باشد، به طوری که در دستگاه جدید معادله‌ی  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  به صورت استاندارد (فاقد جمله‌ی

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \quad \text{شامل } (xy) \text{ نوشته شود، آنگاه}$$

$$\sqrt{3}xy + y^2 = 1 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{0-1} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

دستگاه جدید را  $XoY$  در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که مختصات دستگاه قدیم بر حسب مختصات دستگاه جدید، به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases} \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{3}} \begin{cases} x = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \end{cases}$$

$$\sqrt{3}xy + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}X^2 - \sqrt{3}Y^2 - 2XY)$$

$$+ \left(\frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}XY\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4}X^2 - \frac{2}{4}Y^2 = 1 \xrightarrow{\times 2} 3X^2 - Y^2 = 2$$

[۴]

[۳]

[۲]

[۱] ✓

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۲۰

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = AA$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y & xy - y \\ x - 1 & y + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y + 1 = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \quad \text{با توجه به سطر دوم، داریم:}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی - ۹۴)

- ۱۲۴

ماتریس  $A$  از مرتبه‌ی  $2 \times 3$  بوده و ماتریس  $B^t$  از مرتبه‌ی  $3 \times 4$ ، بنابراین از چپ در  $B^t$  ضرب پذیر است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری ریاضی - ۱۵)

- ۱۲۵

از آن جا که  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ ، پس  $AB = BA$ .

$$\begin{cases} A \text{ متقارن} \Rightarrow A = A^t & (1) \\ B \text{ پادمتقارن} \Rightarrow B = -B^t & (2) \end{cases}$$

برای بررسی متقارن یا پادمتقارن بودن ماتریس  $AB$ ، ترانهاده‌ی آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} (AB)^t &= B^t A^t \xrightarrow{(1), (2)} (AB)^t \\ &= (-B)(A) = -BA = -AB \end{aligned}$$

چون ترانهاده‌ی ماتریس  $AB$  با قرینه‌ی آن برابر است، پس  $AB$  ماتریسی پادمتقارن است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

راه حل اول: فرض می‌کنیم  $M \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  نقطه‌ای روی این خط و  $M' \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$  تبدیل

یافته‌ی آن تحت اثر ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  باشد.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = x' \\ x + 4y = y' \end{cases}$$

$x$  و  $y$  را بر حسب  $x'$  و  $y'$  پیدا نموده و در معادله‌ی  $2y - 3x = 0$  قرار

می‌دهیم.

$$\begin{cases} 6x - 4y = 2x' \\ x + 4y = y' \end{cases} \Rightarrow 7x = 2x' + y'$$

$$\Rightarrow x = \frac{2x' + y'}{7}, y = \frac{3y' - x'}{14}$$

$$2y - 3x = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{3y' - x'}{14}\right) - 3\left(\frac{2x' + y'}{7}\right) = 0$$

$\Rightarrow x' = 0 \Rightarrow$  تبدیل یافته‌ی این خط، محور  $y$  هاست.

راه حل دوم: کافیست نقطه‌ای دلخواه از خط داده شده را در نظر گرفته و تحت

ماتریس داده شده تبدیل نماییم.

$$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که  $\begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}$  در بین گزینه‌های داده شده تنها روی محور  $y$  ها

می‌تواند قرار گیرد، پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴

۳

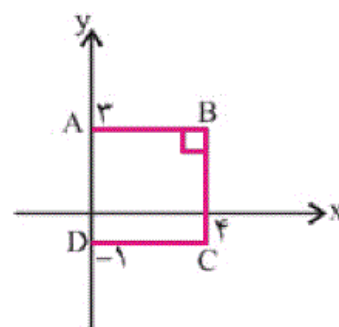
۲

۱

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(4-0)^2 + (3-3)^2} = 4 \\ BC &= \sqrt{(4-4)^2 + (-1-3)^2} = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = 4 \times 4 = 16$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |T| = -2 - 1 = -3$$

$$S' = ||T||S = 48$$



(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۷)

۴

۳

۲

۱

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۱)

$$A_{11} = 10, A_{12} = 5, A_{13} = -10$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 20 \rightarrow$$

$$10 + 5m + 20 = 20 \Rightarrow m = -2$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶)

[۴]

[۳]✓

[۲]

[۱]

(سراسری ریاضی - ۱۸۹)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط بر حسب}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3(12 - 4) = 24$$

$$\left| \frac{1}{2}AA^t \right| = \left( \frac{1}{2} \right)^3 |A| |A^t| = \frac{1}{8} |A|^2 = \frac{1}{8} \times 24 \times 24 = 72$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

[۴]

[۳]✓

[۲]

[۱]

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۱۸۶)

راه حل اول:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc - a^2 \\ 1 & b & ac - b^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{R}_2 - \text{R}_3]{\text{R}_1 - \text{R}_3} \begin{vmatrix} 0 & a - c & bc - a^2 - ab + c^2 \\ 0 & b - c & ac - b^2 - ab + c^2 \\ 1 & c & ab - c^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{بسط بر حسب ستون اول}} \begin{vmatrix} a - c & -(a - c)(a + b + c) \\ b - c & -(b - c)(a + b + c) \end{vmatrix} = 0$$

توجه کنید در دترمینان دو در دوی حاصل، ستون دوم مضربی از ستون اول است،

پس حاصل آن برابر صفر است.

راه حل دوم: با انتخاب  $a = 1$  و  $b = 3$  و  $c = 4$  داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -13 \end{vmatrix} = 1(-19) - 1(-8) + 11(1) = 0$$

توجه کنید  $a, b, c$  طوری انتخاب شده‌اند که گزینه‌ها متمایز شوند.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۶)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓