



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

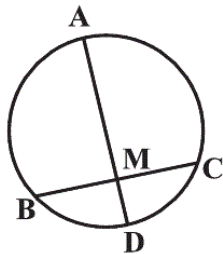
(@riazisara)

۱۳۱- یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی یک زاویه‌ی 30° دارد. نسبت طول قاعده‌ی کوچک به طول قاعده‌ی بزرگ آن کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$
 (۲) $7 - 4\sqrt{3}$
 (۳) $4 - 2\sqrt{3}$
 (۴) $\sqrt{3} - 1$

شما پاسخ نداده اید

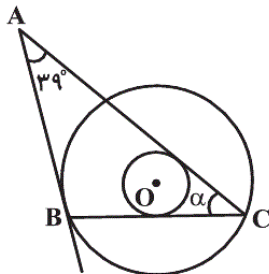
۱۳۲- در شکل زیر D وسط کمان BC و M وسط وتر BC است. اگر $AD = 2BC$ ، آن‌گاه کمان AB چند درجه است؟



- (۱) ۱۲۰
 (۲) ۱۳۵
 (۳) ۱۵۰
 (۴) ۱۶۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- دو دایره‌ی هم‌مرکز مطابق شکل، مفروضند. وتر BC در دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی کوچک‌تر و AB در نقطه‌ی B بر دایره‌ی بزرگ‌تر مماس است. اندازه‌ی α کدام است؟



- (۱) 34°
 (۲) 32°
 (۳) 30°
 (۴) 36°

شما پاسخ نداده اید

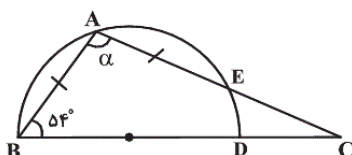
۱۳۴- در مثلث ABC میان‌ه‌ی ضلع BC و عمودمنصف ضلع AB هم‌دیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند. اگر نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی

محیطی مثلث ABC باشد، نوع مثلث ABC لزوماً کدام است؟

- (۱) قائم‌الزاویه
 (۲) متساوی‌الاضلاع
 (۳) متساوی‌الساقین
 (۴) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- در شکل زیر، $AB = AE$ و BD قطر نیم‌دایره است. زاویه‌ی α چند درجه است؟

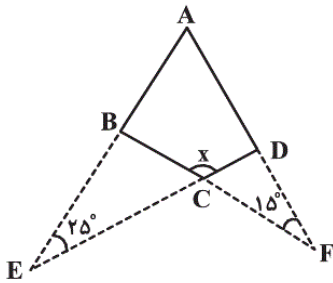


- (۱) ۱۰۸
 (۲) ۱۱۶
 (۳) ۱۲۰
 (۴) ۱۲۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- در چهارضلعی محاطی ABCD مطابق شکل زیر، امتدادهای AB و CD در E و امتدادهای AD و BC در F متقاطع‌اند. مقدار

x کدام است؟



(۲) 115°

(۱) 110°

(۴) 125°

(۳) 120°

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- در مثلث ABC، ضلع $BC = 4$ ثابت است و رأس A با زاویه‌ی ثابت $\hat{A} = 45^\circ$ تغییر می‌کند. در حالتی که طول ضلع AB

بیش‌ترین مقدار ممکن را دارد، طول ضلع AC کدام است؟

(۲) $3\sqrt{2}$

(۱) $4\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(۴) 4

(۳) $4\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- در مثلث ABC نیمساز زاویه‌ی داخلی A، ضلع BC را به نسبت $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$ قطع می‌کند. اگر $AC = 2DC$ ، آن‌گاه طول نیمساز

AD چه کسری از طول ضلع AC است؟

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- طول مماس مشترک خارجی دو دایره با شعاع‌های نابرابر، با طول مماس رسم شده بر دایره‌ی کوچک‌تر از مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر، برابر

است. نسبت شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر به شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام است؟

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) 3

(۳) 2

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- طول خط‌المركزین دو دایره به شعاع‌های 3 و 5 برابر با 10 واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو مماس مشترک داخلی از مرکز دایره

بزرگ‌تر کدام است؟

(۲) $\frac{6}{25}$

(۱) $\frac{6}{25}$

(۴) $\frac{7}{5}$

(۳) 7

شما پاسخ نداده اید

۸۱- مشتق سوم تابع $y = (3x-1)^3 \sqrt[3]{6x-1}$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱۶۲
(۲) صفر
(۳) ۲۷
(۴) ۸۱

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{9 - x^4}}$ باشد، مقدار $f''(0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
(۲) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- مشتق تابع $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3)$ در نقطه‌ای $x = 0$ کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۲
(۳) -۶
(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اگر خط مماس بر وارون تابع $f(x) = mx^3 + nx$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر آن، به صورت $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$ باشد، $m - n$ کدام

است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) -۳
(۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر $y = \sqrt[3]{1+x}$ و $y'' = k(\frac{1}{9y^5})$ باشد، آن گاه k کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , x \geq 0 \\ -3x + [x] & , x < 0 \end{cases}$ باشد، آن گاه حاصل $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(3+2h) - f^3(3-h)}{h^2 - h}$ کدام است؟ ([] علامت جزء

صحیح است.)

- (۱) ۳۲۴
(۲) -۳۲۴
(۳) ۱۰۸
(۴) -۱۰۸

شما پاسخ نداده اید

۸۷- معادله‌ی خط قائم بر منحنی $\ln(x-y) = xy + y^2$ در نقطه‌ی $(1,0)$ کدام است؟

(۲) $y = -2x$

(۱) $y = -2x + 2$

(۴) $y = \frac{1}{2}x - 1$

(۳) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 5x - a |x - 1|$ و $g(x) = 2x + |x^2 - 1|$ مفروضند. تابع $f \circ g$ به‌ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به

طول ۱ مشتق‌پذیر است؟

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۱) $\frac{2}{5}$

(۴) هیچ مقدار a

(۳) ۵

شما پاسخ نداده اید

۸۹- در رابطه‌ی $xy + x^2y^2 = 2$ حاصل $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه‌ی $(1, -2)$ کدام است؟

(۲) -4

(۱) صفر

(۴) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر $f(x) = g(x\sqrt{x}) = \frac{x^2}{8} + 1$ آن‌گاه حاصل مشتق $(f \circ g)(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 8$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) ۶

(۴) ۹

(۳) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، ماتریس و دترمینان ، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۰۶

۱۱۱- اگر $A = [2i - j]_{3 \times 2}$ و $B = [i + 4j]_{3 \times 2}$ ، آن‌گاه درایه‌ای که در سطر سوم و ستون دوم $A + B$ قرار دارد برابر است با:

(۴) ۱۵

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۹

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- ماتریس مربعی A را به‌صورت $A = B + C$ نوشته‌ایم که در آن B ماتریس متقارن و C ماتریس پادمتقارن است. حاصل $B - C$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}A^t$

(۳) $\frac{1}{2}A$

(۲) A^t

(۱) A

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس 3×3 با این ویژگی باشند، که $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : i+j=2k \\ 0 & : i+j=2k+1 \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} 1 & : i \leq j \\ 0 & : i > j \end{cases}$ ، آن گاه

سطراول ماتریس $(A - B)^2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(۱) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- کدام رابطه درست است؟

(۱) $AB = BA = O \Rightarrow A = O$ یا $B = O$ (۲) $AB = BA = O \Rightarrow A = O$ و $B = O$

(۳) $AC = A \Rightarrow C = I$ (۴) $AB = BA \Rightarrow (AB)^2 = A^2 B^2$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، حاصل $A^{1395} - A^{1396}$ کدام است؟

(۱) I (۲) A (۳) $I - A$ (۴) $A - I$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A$ باشد، و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کمترین مقدار مجموع درایه‌های A کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- اگر ماتریس $A + A^t$ هم متقارن و هم پادمتقارن باشد، چه تعداد از ماتریس‌های زیر متقارن‌اند؟

(الف) $A + I$ (ب) $3A$ (ج) A^2 (د) صفر
(۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه A^{343} کدام است؟

(۱) $2^{340} I$ (۲) $-2^{340} I$ (۳) $2^{342} A$ (۴) $2^{343} A$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- خط $D: 2x - 3y - 1 = 0$ ابتدا تحت زاویه‌ی 16° و سپس تحت زاویه‌ی 11° حول مبدأ مختصات و در جهت مثلثاتی دوران یافته

است. معادله‌ی خط حاصل کدام است؟

(۱) $2x - 3y + 1 = 0$ (۲) $3x + 2y + 1 = 0$ (۳) $3x - 2y - 1 = 0$ (۴) $2x + 3y - 1 = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- فرض کنید F ، مجموعه نقاط محیط و درون بیضی به معادله‌ی $1 = \frac{x^2}{4} + (y-2)^2$ باشد. ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ نقاط F را به محیط و

درون کدام مقطع مخروطی تصویر می‌کند؟

(۱) دایره‌ای به قطر ۸ واحد (۲) بیضی قائم به قطر بزرگ ۴ واحد
(۳) دایره‌ای به قطر ۴ واحد (۴) بیضی افقی به قطر بزرگ ۸ واحد

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته، ترکیبیات - ۱۳۹۵۱۲۰۶

۱۲۱- اگر $A = \{x \in \mathbb{N}; 30 < x^3 < 200\}$ و $B = \{5k - 1 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 3\}$ باشند، آن گاه تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه‌ی

$(A \times B) \cup (B \times A)$ کدام است؟

(۱) ۵۵ (۲) ۴۵ (۳) ۶۶ (۴) ۳۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- رابطه‌ی $\{ (x,y) \in Z^2 : |x| + |y| \leq 3, y \leq 0 \}$ شامل چند زوج مرتب است؟

- ۱۳ (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- چند افراز متمایز از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که شامل حداقل یک مجموعه‌ی ۳ عضوی باشد؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- در رابطه‌ی هم‌ارزی $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^b = c^d$ روی N^2 ، کلاس هم‌ارزی $(2,6)$ چند عضو دارد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- بر مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، چند رابطه‌ی هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد که دارای ۱۱ عضو باشد؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

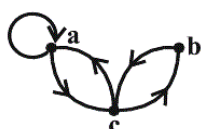
شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه چند ماتریس صفر و یک مانند C وجود دارد. که $B \ll C \ll A$ و رابطه متناظر با

ماتریس C بازتابی نباشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید



۱۲۷- اگر گراف مقابل متعلق به رابطه‌ی R باشد، ماتریس متناظر با رابطه‌ی ROR کدام است؟

- (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- R_1 و R_2 دو رابطه روی $A = \{a, b, c, d\}$ بوده که هر یک دارای دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی‌اند ولی بازتابی نمی‌باشند. اگر R_1

دارای کمترین تعداد عضو و R_2 دارای بیشترین تعداد عضو باشد، در این صورت اختلاف تعداد اعضای این دو رابطه کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- روی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ چند رابطه‌ی فاقد (c, a) می‌توان نوشت که ماتریس متناظر با آن در رابطه‌ی

$M \wedge M^T \ll I_n \ll M$ صدق کند؟

- ۳۶۰ (۱) ۴۱۵ (۲) ۴۸۶ (۳) ۵۰۲ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ به صورت $R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,3), (2,4), (3,4)\}$ تعریف شده است. اگر M ماتریس

این رابطه باشد، دست کم چند عضو اضافه کنیم تا M در شرط $M^{(2)} \ll M$ صدق کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- اگر $\cos(2x - 5\pi) = 0$ باشد، x کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2) \qquad k\pi \quad (1)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (4) \qquad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- یکی از جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$2k\pi \quad (2) \qquad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (4) \qquad (2k+1)\pi \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- معادله‌ی $(3 \sin x - 2)(4 \cos x + 1) = 0$ در بازه‌ی $[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

$$2 \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

$$4 \quad (4) \qquad 3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- تعداد جواب‌های معادله‌ی $\cos 2x - \cos x = \frac{1}{[x] + [-x]}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جز صحیح است).

$$5 \quad (2) \qquad 6 \quad (1)$$

$$3 \quad (4) \qquad 4 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- جواب‌های معادله‌ی $\sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x = 0$ ، بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چند ضلعی است؟

$$(1) \text{ شش ضلعی منتظم} \qquad (2) \text{ شش ضلعی غیرمنتظم}$$

$$(3) \text{ چهارضلعی غیرمنتظم} \qquad (4) \text{ مربع}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- جواب کلی معادله‌ی $\tan(2x+1)\tan(x-1)=1$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (2) \qquad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad (4) \qquad k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

۱۱۰- جواب کلی معادله $\sin^6 x - \cos^6 x = 0$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، تابع حسابان - ۱۳۹۵۱۲۰۶

۱۰۵- مجموعه‌ی جواب معادله $1 - 2[x] - [-4 - x] - 1 = 0$ ، شامل چند عدد صحیح است؟ ($[]$ ، نماد جز صحیح است.)

$$1 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin^3 x \sin x + \cos 8x$ کدام است؟

$$\pi \quad (2)$$

$$2\pi \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- معادله $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = \frac{x}{12}$ ، چند جواب دارد؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۵۱۲۰۶

۹۱- مقدار مشتق $\sin x \cos^3 x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

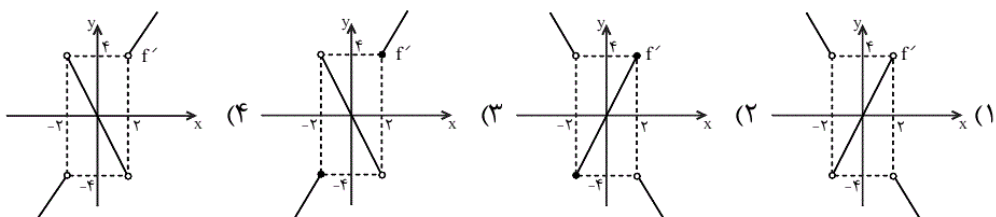
شما پاسخ نداده اید

۹۲- با فرض آن که $f(x) = \sqrt{x^2}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - f^2(1)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- نمودار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = |x^2 - 4|$ کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin \pi x$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع $g \circ f$ در نقطه‌ی تلاقی آن با محور x ها، روی بازه $(0, \pi)$ کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۹۵- اگر $x = u^2 - 2u$ و $u = y^2 - y$ مقدار y'_x به ازای $y = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- هرگاه معادله‌ی خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی A به طول $x = 1$ ، $y = 2x + 1$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{1}{f}$ در نقطه‌ی A به طول $x = 1$ روی آن کدام است؟

- (۱) $9x - 2y = 1$ (۲) $3y + 2x = 3$ (۳) $9y + 2x = 5$ (۴) $2x - 3y = 1$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- خط $y = ax + b$ نمودار $x^2 + y^2 - xy = 1$ را در نقاط M و N قطع می‌کند، اگر خط مماس در نقاط M و N موازی محور y ها باشد، زوج مرتب (a, b) کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{2}, 1)$ (۲) $(\frac{1}{2}, 0)$ (۳) $(1, \frac{1}{2})$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} وارون پذیر و مشتق پذیر است و $f'(x) = \sqrt{9 + f^2(x)}$ ، مقدار $(f^{-1})'(4)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) 3 (۴) 5

شما پاسخ نداده اید

۹۹- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) $-\frac{\pi}{4}$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{2}$

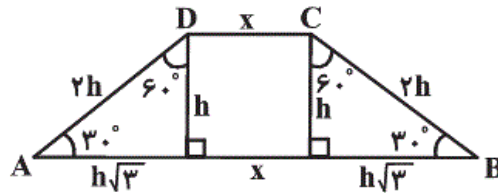
شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- اگر $x > -2$ ، $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و خط به معادله $\Delta y + x = b$ یکی از قائم‌های نمودار تابع f^{-1} باشد، b کدام است؟

- (۱) 12 (۲) 15 (۳) 16 (۴) 20

شما پاسخ نداده اید

(ممد طاهر شعاعی)



ارتفاع‌های دوزنقه را رسم می‌کنیم.
 در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اندازه‌ی
 یک زاویه 30° باشد، ضلع روبه‌رو
 به آن نصف وتر و ضلع روبه‌رو به

زاویه 60° ، وتر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

پس اندازه‌ی اضلاع مطابق شکل می‌شود. چون دوزنقه محیطی است، پس:

$$CD + AB = AD + BC \Rightarrow x + x + 2h\sqrt{3} = 2h + 2h$$

$$\Rightarrow x = 2h - h\sqrt{3}$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{x}{x + 2h\sqrt{3}} = \frac{2h - h\sqrt{3}}{2h - h\sqrt{3} + 2h\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

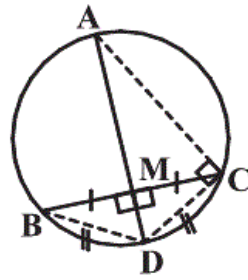
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۲ و ۵۳ و ۵۴)

۴

۳

۲ ✓

۱



از آنجا که AD ، وتر و کمان BC را نصف کرده است، پس قطر دایره است. در نتیجه مثلث ACD قائم‌الزاویه است. چون ارتفاع CM و $AD = 2BC = 4CM$ وارد بر وتر است، پس $\hat{D}AC = 15^\circ$ (در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع یک چهارم وتر باشد، یک زاویه 15° است)، داریم:

$$\hat{A}DC = 75^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB} = 15^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۰ و ۵۶ تا ۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

زاویه خارجی: $\hat{B}DC = \hat{A} + \hat{A}BD$

$$\text{زاویه‌ی ظلی: } \hat{A}BD = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 39^\circ + \frac{\widehat{BD}}{2}$$

از طرفی $\hat{B}CD = \frac{\widehat{BD}}{2}$ (زاویه‌ی محاطی) پس $\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$. در نتیجه:

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 39^\circ + \alpha \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 51^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \times 51^\circ}{3} = 2 \times 17^\circ = 34^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

O نقطه‌ی هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث ABC است، یعنی میانه‌ی ضلع BC عمود منصف این ضلع نیز هست، بنابراین مثلث ABC، متساوی‌الساقین است.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

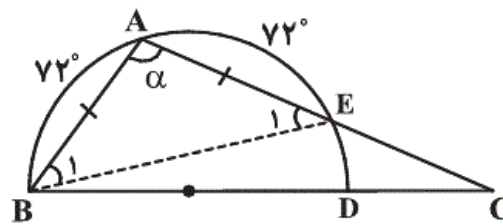
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا عباسی اصل)



$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow 54^\circ = \frac{\widehat{AED}}{2} \Rightarrow \widehat{AED} = 108^\circ$$

زاویه‌ی محاطی

$$\widehat{AB} = \widehat{BAD} - \widehat{AED} \Rightarrow \widehat{AB} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$AB = AE \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AE} \Rightarrow \widehat{AE} = 72^\circ$$

$$\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\triangle ABE: \alpha + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2 \times 36^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 108^\circ$$

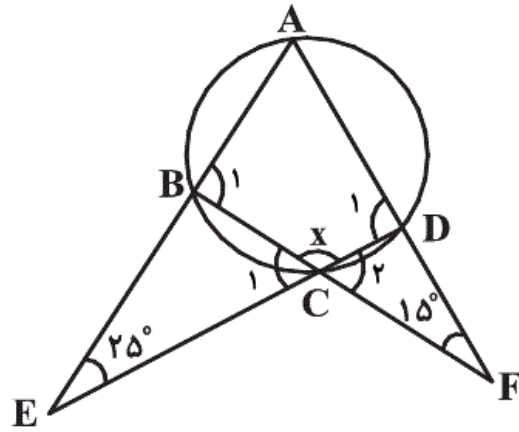
(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{D}_1 = 180^\circ$ چهار ضلعی ABCD محاطی است.

$$\Rightarrow (\widehat{C}_1 + 25^\circ) + (\widehat{C}_2 + 15^\circ) = 180^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2} 2\widehat{C}_1 = 140^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 70^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

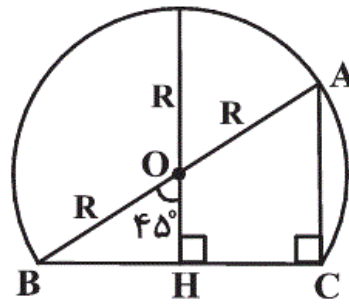
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱



مکان هندسی رأس A، کمان

درخور زاویه ۴۵° روبه‌رو به

وتر BC = ۴ است.

وقتی نقطه‌ی A روی این مکان هندسی تغییر می‌کند، بیش‌ترین فاصله‌ی آن از نقطه B، قطر دایره‌ی شامل کمان درخور است.

$$\max(AB) = 2R$$

در چنین حالتی، مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است. از آن‌جا

که در این مثلث $\hat{A} = 45^\circ$ ، مثلث متساوی‌الساقین هم هست و در نتیجه $AC = BC = 4$.

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۶۱ تا ۶۶)

۴

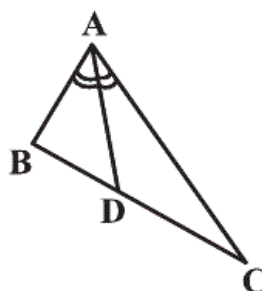
۳

۲

۱

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC, AB = \frac{2}{3}AC$$

از طرفی می‌دانیم:



$$\begin{aligned} AD^2 &= AB \cdot AC - DB \cdot DC \\ &= \left(\frac{2}{3}AC\right) \cdot AC - \left(\frac{2}{3}DC\right)DC \\ &= \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{3}DC^2 \end{aligned}$$

$$\text{فرض طبق } DC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AD^2 = \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}AC\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}AC^2 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$$

(هندسه ۲ - دایره: مسأله‌ی ۳ - قسمت ب - صفحه‌ی ۷۸)

۴

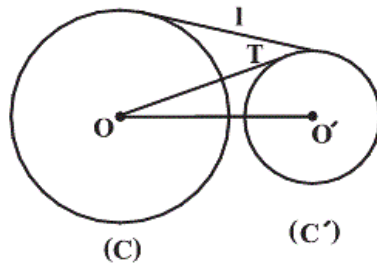
۳

۲

۱

طول مماس مشترک خارجی : $l = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

طول مماس بر دایره C' از نقطه O : $OT = \sqrt{d^2 - R'^2}$



$OT = l$

$\Rightarrow \sqrt{d^2 - R'^2} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$

$\Rightarrow d^2 - R'^2 = d^2 - R^2 + 2RR' - R'^2$

$\Rightarrow R^2 = 2RR' \Rightarrow R = 2R'$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۴

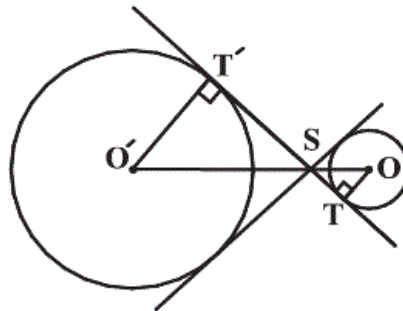
۳

۲

۱

(سروش موئینی)

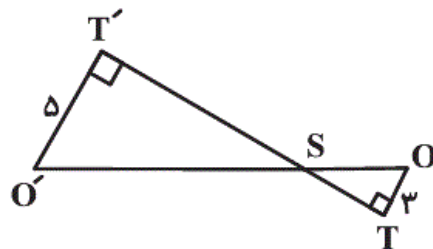
- ۱۴۰



با رسم شعاع‌های گذرنده از نقاط تماس،

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متشابه داریم:

$\Delta TSO \sim \Delta T'SO' \Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{O'T'}{OT}$



$\Rightarrow \frac{O'S}{OS + O'S} = \frac{O'T'}{OT + O'T'}$

$\Rightarrow \frac{O'S}{10} = \frac{5}{8} \Rightarrow O'S = 6.25$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۸۰ و ۸۱)

۴

۳

۲

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، مشتق تابع ، مشتق - ۱۳۹۵۱۲۰۶

(فاسم کتابچی)

$$y = \underbrace{(3x-1)^3}_{f(x)} \underbrace{\sqrt[3]{6x-1}}_{g(x)} \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{1}{3}\right) = f^{(3)}\left(\frac{1}{3}\right)g\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(x) = (3x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \times 3(3x-1)^2$$

$$\Rightarrow f^{(2)}(x) = 18(3x-1) \times 3$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = 162$$

$$y^{(3)}\left(\frac{1}{3}\right) = 162 \times \sqrt[3]{6 \times \frac{1}{3} - 1} = 162$$

نکته: در توابعی به فرم $y = f(x)g(x)$ اگر $x = x_0$ ریشه‌ی مکرر f از

$$y^{(n)} = f^n(x_0)g(x_0) \quad \text{مرتبه‌ی } n \text{ ام باشد و } g(x_0) \neq 0 \text{ باشد، آن‌گاه:}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فریدون ساعتی)

$$f(x) = \frac{\sqrt{3-\sqrt{9-x^4}} \sqrt{3+\sqrt{9-x^4}}}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^4}}} = \frac{\sqrt{9-9+x^4}}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^4}}}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3+\sqrt{9-x^4}}}$$

چون $f(x)$ دارای عامل x^2 است، پس $f(0) = f'(0) = 0$ می‌باشد، بنابراین

برای محاسبه‌ی f'' در نقطه‌ی $x=0$ کافی است از x^2 دو بار مشتق گرفته و $x=0$ را جایگذاری کنیم.

$$f''(0) = \frac{2}{\sqrt{3+\sqrt{9-(0)^4}}} = \frac{2}{\sqrt{3+3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کیا مقدرس نیاک)

عامل صفر شونده در تابع f ، به ازای $x=0$ ، (e^x-1) است. پس کافی است برای تعیین $f'(0)$ فقط از این عامل مشتق بگیریم و در بقیه‌ی عامل‌ها ضرب کنیم.

$$f'(x) = e^x(e^{2x}-2)(e^{3x}-3) \Rightarrow f'(0) = e^0(e^0-2)(e^0-3) = 1 \times (-1) \times (-2) = 2$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عمید علیزاده)

$$f(x) = mx^3 + nx \Rightarrow f'(x) = 3mx^2 + n$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \xrightarrow{x=f} y = 1 \Rightarrow A'(f, 1) \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow A(1, f) \in f \Rightarrow f(1) = f \Rightarrow f(1) = m + n = f \quad (1)$$

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{1}{6}$$

$$(f^{-1})'(f) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow f'(1) = 6 \Rightarrow 3m + n = 6 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m = 1, n = 3 \Rightarrow m - n = -2$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عمید علیزاده)

-۸۵

$$y = \sqrt[3]{1+x} \Rightarrow y^3 = 1+x \xrightarrow{\text{مشتق}} 3y^2 y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3y^2}$$

$$(y')' = \left(\frac{1}{3y^2}\right)' \Rightarrow y'' = \frac{-6yy'}{9y^4} = \frac{-2y'}{3y^3} = \frac{-2\left(\frac{1}{3y^2}\right)}{3y^3}$$

$$= \frac{-2}{9y^5} = k\left(\frac{1}{9y^5}\right)$$

$$\Rightarrow k = -2$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(کیا مقدس‌نیاک)

-۸۶

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} \times \frac{f'(3+2h) + f'(3+2h)f(3-h) + f'(3-h)}{h-1} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} \right) \times \left(\frac{f'(3) + f'(3) + f'(3)}{-1} \right)$$

$$= \left[2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \right] \times (-3f'(3))$$

$$= 3f'(3) \cdot (-3f'(3))$$

$$f(3) = (3)^2 - 2(3) = 3$$

$$\text{برای } x \text{ های مثبت} \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(3) = 2(3) - 2 = 4$$

$$3f'(3) \cdot (-3 \cdot f'(3)) = 3(4) \cdot (-3(3)^2) = -324$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌ی ۱۴۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(جمال الدین حسینی)

$$f(x, y) = \ln(x - y) - xy - y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{1}{x-y} - y}{-1 - x - 3y^2}$$

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,0)} = -\frac{1}{-1-1} = \frac{1}{2}$$

$$m' = \frac{-1}{m} = -2$$

$$y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(میلاد منصوری)

تابع fog عبارت است از:

$$f(g(x)) = 5(2x + |x^2 - 1|) - a|2x + |x^2 - 1| - 1|$$

در همسایگی نقطه‌ی $x = 1$ عبارت $2x + |x^2 - 1| - 1$ مثبت است، لذا:

$$|2x + |x^2 - 1| - 1| = 2x + |x^2 - 1| - 1$$

$$fog = 10x + 5|x^2 - 1| - a(2x - 1 + |x^2 - 1|) \quad \text{پس:}$$

برای مشتق‌پذیری این تابع در $x = 1$ لازم و کافی است که

$$5|x^2 - 1| - a|x^2 - 1| \quad \text{یا} \quad (5 - a)|x^2 - 1| \quad \text{مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:}$$

$$5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ و ۱۵۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمید علیزاده)

$$F(x, y) = xy + x^2y^2 - 2 = 0$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y + 2xy^2}{x + 2yx^2} = -\frac{y(1 + 2xy)}{x(1 + 2yx)} = \frac{-y}{x}$$

$$\xrightarrow[y=-2]{x=1} y'_x = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

$$y' = \frac{-y}{x} \Rightarrow y'' = \frac{-y'_x - (-y)}{x^2}$$

$$\xrightarrow[y'_x=2]{x=1, y=-2} y'' = \frac{-2(1) - 2}{1} = -4$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۳ تا ۱۵۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مصدر مصطفی ابراهیمی)

$$f(x) = \frac{x^2}{\lambda} + 1 \Rightarrow f(\lambda) = \lambda + 1 = 9$$

$$f'(x) = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow f'(\lambda) = 2$$

$$g(x\sqrt{x}) = \frac{x^2}{\lambda} + 1 \xrightarrow{x=4} g(\lambda) = \frac{16}{\lambda} + 1 = 3$$

$$(g(x\sqrt{x}))' = \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right)g'(x\sqrt{x}) = \frac{x}{\lambda} \xrightarrow{x=4} \left(2 + \frac{4}{4}\right)g'(\lambda) = 1$$

$$3g'(\lambda) = 1 \Rightarrow g'(\lambda) = \frac{1}{3}$$

$$(fg)'(\lambda) = f'(\lambda)g(\lambda) + g'(\lambda)f(\lambda) \Rightarrow (fg)'(\lambda) = 2 \times 3 + \frac{1}{3} \times 9$$

$$= 6 + 3 = 9$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، ماتریس و دترمینان، ماتریس، دترمینان و دستگاه - ۱۳۹۵۱۲۰۶

(مصدر صادق نیک‌کار)

$$A + B = [2i - j + i + 4j]_{3 \times 2} = 3[i + j]_{3 \times 2}$$

$$\text{درایه‌ی سطر سوم و ستون دوم} = 3(3 + 2) = 15$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سیدامیر ستوده)

$$\text{چون } B \text{ متقارن است } B^t = B \text{ و چون } C \text{ پادمقارن است داریم } C^t = -C$$

بنابراین داریم:

$$A^t = (B + C)^t = B^t + C^t = B - C$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

نخست دو ماتریس را با نوشتن درایه‌هایشان مشخص و سپس $A - B$ را پیدا

می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - B)^2 \text{ سطر اول ماتریس } = (A - B) \times \text{سطر اول } (A - B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

طبق تمرین ۶ صفحه‌ی ۱۱۱ کتاب درسی ملاحظه می‌شود که اگر

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

آن گاه $AB = BA = O$ ، $AC = A$ و $CA = C$ و ملاحظه می‌شود که

هیچ کدام از دو ماتریس A و B صفر نیستند و C نیز برابر I نیست ولی در

صورتی که $AB = BA$ باشد، آن گاه داریم:

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B$$

$$= (AA)(BB) = A^2 B^2$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۵ و ۱۱۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فرهاد صابری)

-۱۱۵

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} I & n = 2k \\ A & n = 2k - 1 \end{cases}$$

$$A^{1396} - A^{1395} = I - A$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و مثبت بنابه فرض در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

□۴

□۳

□۲

□۱✓

(عنایت‌اله کشاورزی)

- ۱۱۷

$A + A^t \Rightarrow A + A^t = O$ هم متقارن و هم پادمتقارن است.

$$\Rightarrow A^t = -A \Rightarrow \text{پادمتقارن } A$$

$$(A+I)^t = A^t + I^t = -A + I = I - A$$

پس $I + A$ نه متقارن است و نه پادمتقارن است.

به علاوه $3A$ به وضوح پادمتقارن است. $(A^2)^t = (A^t)^2 = (-A)^2 = A^2$

پس A^2 متقارن است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۷)

□۴

□۳

□۲✓

□۱

$$A = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2R_{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A^{343} = 2^{343} R_{\frac{343\pi}{3}} = 2^{343} R_{114\pi + \frac{\pi}{3}}$$

$$= 2^{343} \times R_{\frac{\pi}{3}} = 2^{343} \times \frac{1}{2} A = 2^{342} A$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۱۹، صفحه ۱۱۳)

□ ۴

□ ۳ ✓

□ ۲

□ ۱

(ممدابراهیم کیتی زاده)

- ۱۱۹

اگر R_α ماتریس دوران تحت زاویه α حول مبدأ مختصات و در جهت

مثلثاتی باشد، آن گاه:

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} \Rightarrow R_{11.0} \times R_{16.0} = R_{27.0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $M' = (x', y')$ ، تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ تحت ماتریس $R_{27.0}$ باشد

داریم:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y' \end{cases}$$

$$2x - 3y - 1 = 0 \Rightarrow -2y' - 3x' - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} 3x' + 2y' + 1 = 0$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

□ ۴

□ ۳

□ ۲ ✓

□ ۱

فرض کنیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطه‌ای از F و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ نقطه‌ی تصویر آن تحت ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ باشد. داریم:}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{در معادله جایگذاری}]{\frac{(-x')^2}{4} + \left(\frac{y'}{2} - 2\right)^2 \leq 1} \Rightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{(y' - 4)^2}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow x'^2 + (y' - 4)^2 \leq 4$$

ناحیه‌ی تصویر شده، محیط و درون دایره‌ای به شعاع ۲ و قطر ۴ واحد است.

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان: مشابه تمرین ۷، صفحه‌های ۱۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، ترکیبیات - ۱۳۹۵۱۲۰۶

-۱۲۱

(امیرھوشنگ فمسه)

با قرار دادن اعداد ۴ و ۵ در نامساوی مجموعه‌ی A متوجه می‌شویم که A دو عضو دارد از طرفی اعضای مجموعه‌ی B با قرار ۱ و ۲ و ۳ به جای k به صورت $B = \{4, 9, 14\}$ خواهند بود. پس داریم:

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = n(A \times B) + n(B \times A) - n((A \times B) \cap (B \times A))$$

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 2n(A \times B) - n(A \cap B)^2$$

$$= 2(3 \times 2) - 1^2 = 11$$

$$\binom{11}{2} = 55$$

لذا تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی برابر است با:

(فیلر و احتمال - ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

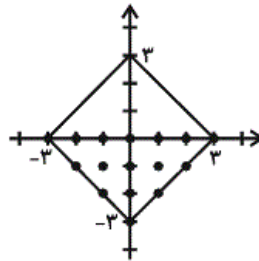
 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

باید به شرط $y \leq 0$ توجه داشته باشیم و این نکته که $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ، ۱۶ نقطه با این شرایط وجود دارد. پس ۱۶ زوج مرتب داریم:



(بهر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر یک افراز از مجموعه‌ی پنج عضوی A بخواهد شامل حداقل یک مجموعه‌ی ۳ عضوی باشد، جزء دیگر افراز یا باید دو مجموعه‌ی یک عضوی باشد یا یک مجموعه‌ی دو عضوی. همچنین می‌دانیم به $\binom{5}{3} = 10$ صورت می‌توان یک زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی از مجموعه‌ی ۵ عضوی انتخاب کرده یکی از این زیر مجموعه‌ها را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. مثلاً $\{2, 4, 5\}$ با این زیر مجموعه دو افراز متمایز $[\{2, 4, 5\}, \{1, 3\}]$ و $[\{2, 4, 5\}, \{1\}, \{3\}]$ را می‌توان تشخیص داد. به طریق مشابه با هر کدام از ۹ زیر مجموعه دیگر نیز می‌توان دو افراز دیگر پیدا کرد، بنابراین به تعداد $10 \times 2 = 20$ افراز متفاوت وجود دارد که در آن‌ها حداقل یک مجموعه ۳ عضوی وجود داشته باشد.

(بهر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$[(2, 6)] = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, y)R(2, 6)\}$$

$$x^y = 2^6 = 64 = 64^1 = 8^2 = 4^3$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow [(2, 6)] = \{(64, 1), (8, 2), (4, 3), (2, 6)\}$$

(بهر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۶ و ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(علی سعیدی زاد)

نکته: اگر $P = \{A_1, A_2, A_3\}$ افزاز متناظر با یک رابطه‌ی هم‌ارزی باشد تعداد اعضای این رابطه برابر است با: $|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2$
 با توجه به این که مجموعه‌ی مرجع، ۵ عضوی است و رابطه، ۱۱ زوج مرتب دارد و با توجه به این که $3^2 + 1^2 + 1^2 = 11$ نتیجه می‌گیریم افزاز متناظر با این رابطه به صورت مقابل است:
 $P = \{\{x, y, z\}, \{w\}, \{t\}\}$
 بنابراین باید حساب کنیم که به چند طریق می‌توان یک مجموعه ۵ عضوی را به یک مجموعه ۳ عضوی و دو مجموعه ۱ عضوی افزاز کنیم. این تعداد برابر

$$\binom{5}{3} \times \frac{\binom{2}{1}}{2!} = 10$$

است با:

(پیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

-۱۲۶

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} \square & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از آنجا که رابطه بازتابی نیست، پس در خانه‌ی \square باید صفر قرار دهیم و از طرف دیگر در خانه‌ی Δ می‌توان هم صفر قرار داد و هم یک. پس ماتریس C دارای ۲ حالت است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(عمید کرویسی)

-۱۲۷

ابتدا ماتریس رابطه را نوشته سپس توان دوم بولی ماتریس رابطه را به دست می‌آوریم:

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow [M(R)]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سید عادل، رضا مرتضوی)

هر رابطه‌ای که دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی را با هم داشته باشد، می‌بایست زیر مجموعه‌ای از رابطه‌ی همانی باشد. تهی رابطه‌ای است که به غیر از بازتابی دیگر خواص را دارد، پس $R_1 = \{\}$ ، همچنین $R_2 = \{(a,a)(b,b)(c,c)\}$ به علت عدم وجود زوج مرتب (d,d) خاصیت بازتابی ندارد ولی خاصیت تقارنی و پادتقارنی را نیز داراست و در نتیجه اختلاف تعداد اعضای این دو رابطه ۳ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۴

۳✓

۲

۱

(مهدی عزیزی)

بالای قطر اصلی ۳ حالت دارد \Rightarrow خاصیت پادتقارنی $\Rightarrow M \wedge M^T \ll I_n$
 قطر اصلی یک حالت دارد \Rightarrow خاصیت بازتابی $\Rightarrow I_n \ll M$

	a	b	c	d
a	۱	۳	۲	۳
b		۱	۳	۳
c			۱	۳
d				۱

$\Rightarrow 2 \times 3^5 = 486$

تذکر: منظور از ۳ حالت آن است که به عنوان مثال برای درایه‌های m_{12} و m_{21} می‌توانیم سه حالت $(0,0)$ ، $(0,1)$ و $(1,0)$ را داشته باشیم. از طرفی چون $m_{31} = 0$ ، پس m_{13} می‌تواند صفر یا یک باشد، یعنی دارای دو حالت است.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۳)

۴

۳✓

۲

۱

(فرزاد جوادی)

بنا به یکی از قضایای کتاب درسی گسسته زمانی رابطه‌ی $M \ll M^{(2)}$ برقرار می‌شود که R خاصیت تعدی (ترایایی) داشته باشد.
 با توجه به این که زوج مرتب‌های $(1,2)$ ، $(2,3)$ در R وجود دارند باید حتماً $(1,3)$ نیز عضو R شود. همین طور زوج مرتب‌های $(1,2)$ ، $(2,4)$ در R وجود دارند، پس حتماً $(1,4)$ نیز باید عضو R باشند.

$$R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,3), (2,4), (3,4), (1,3), (1,4)\}$$

عضوهای جدید

یعنی کلاً باید حداقل ۲ عضو اضافه شود تا R خاصیت تعدی داشته باشد.

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

(علی اصغر فرضی)

$$\cos(2x - \Delta\pi) = \cos(2x - 4\pi - \pi) = \cos(2x - \pi) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \pi = k'\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = (k' + 1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(مسابقه - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میثم حمزه لوی)

-۱۰۲

$$\sin x + \sin x \cos x + \cos x + 1 = \sin x(1 + \cos x) + 1 + \cos x$$

$$= (1 + \cos x)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi \end{cases}$$

(مسابقه - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳ ✓

۲

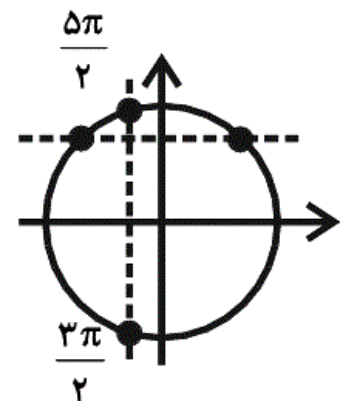
۱

(سید مهرداد رضوی پور)

-۱۰۳

$$۱) 3 \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2}{3}$$

$$۲) 4 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{4}$$



فقط یکی از جواب‌ها بین $\frac{5\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ است.

(مسابقه - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

تابع تعریف نشده: $x \in Z$

$$x \notin Z: 2 \cos^2 x - 1 - \cos x = -1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x(2 \cos x - 1) = 0$$

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مسئله مهر رضوی پور)

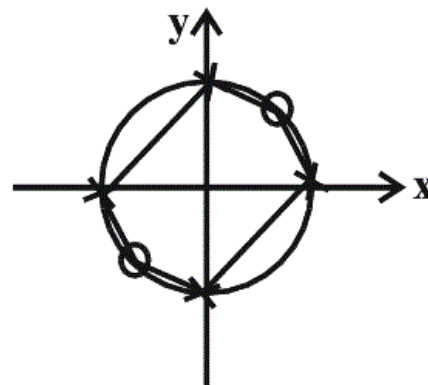
$$\sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x = \sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = 0 \xrightarrow{\div \cos x} \tan x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

با مشخص کردن جواب‌ها در دایره‌ی مثلثاتی داریم:



که شکل مورد نظر نشان دهنده‌ی یک شش ضلعی غیرمنتظم است.

(مسئله بان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\tan(\gamma x + 1) = \frac{1}{\tan(x-1)} \Rightarrow \tan(\gamma x + 1) = \cot(x-1)$$

$$\Rightarrow \tan(\gamma x + 1) = \tan\left(\frac{\pi}{\gamma} - x + 1\right) \Rightarrow \gamma x + 1 = k\pi + \frac{\pi}{\gamma} - x + 1$$

$$\Rightarrow \gamma x = k\pi + \frac{\pi}{\gamma} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\gamma} + \frac{\pi}{\gamma}$$

(مسئله - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 - (\cos^2 x)^3$$

$$= (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow -\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

ریاضی، ریاضی پایه، تابع حسابان - ۱۳۹۵۱۲۰۶

(سعید مدیرفراسانی)

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x \Rightarrow -2x - (-4 - x) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 4 + x - 1 = 0 \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{Z}$$

با توجه به صورت سؤال $x \in \mathbb{Z}$ باید باشد.

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با کمک فرمول تبدیل ضرب به جمع داریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) + \cos 8x$$

دوره‌ی تناوب توابع $\cos 2x$ ، $\cos 4x$ ، $\cos 8x$ به ترتیب برابر $\frac{2\pi}{4}$ ، $\frac{2\pi}{8}$ ، $\frac{2\pi}{8}$ است، یعنی $\frac{2\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4}$.

دوره‌ی تناوب $f(x)$ کوچک‌ترین عددی است که مضرب صحیح هر سه عدد اخیر باشد. که همان π است.

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مدرس رضا شوکتی بیرق)

- ۱۰۷

چون طرف چپ تساوی، مجموع چند عدد صحیح است، پس طرف راست یعنی

$$\frac{x}{12} \text{ عددی صحیح و به تبع آن } \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \text{ و } \frac{x}{4} \text{ اعدادی صحیح خواهند بود.}$$

بنابراین معادله‌ی داده شده به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow 6x + 4x + 3x = x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس معادله‌ی داده شده، تنها یک جواب دارد.

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری تهری خارج از کشور - ۸۶)

با استفاده از فرمول مشتق fg داریم:

$$y = \sin x \cos 3x$$

$$y' = \cos x \cdot \cos 3x - 3 \sin 3x \cdot \sin x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{4} - 3 \sin \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۳۸ و ۱۳۹)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی - سوال ۱۶۳۲)

راه حل اول: با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$ خواهیم

داشت: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} (f^2(1+h) + f^2(1) + f(1+h)f(1))$

$$= f'(1) \times (3f^2(1))$$

کافی است $f'(1)$ و $f(1)$ را محاسبه کنیم. با استفاده از قاعده‌ی توانی خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt[9]{x^2} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{2}{9}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9} x^{-\frac{7}{9}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{9} \text{ و } f(1) = 1$$

۴

۳

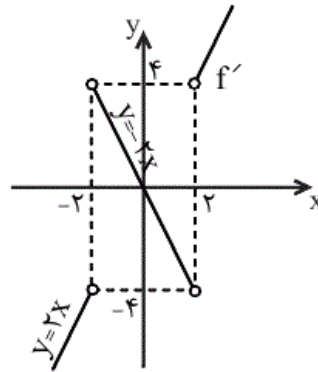
۲

۱

با ضابطه‌بندی تابع خواهیم داشت:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x < 2 \\ \text{تعریف نشده}, & x = 2, x = -2 \\ 2x, & x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases}$$



با توجه به این که مشتق تابع در $x = 2$ و $x = -2$ وجود ندارد، پس گزینه‌ی (۳) درست نیست.

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌ی ۱۴۷)

۴

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

ابتدا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sin(\pi \cos x)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \sin(\pi \cos x)$$

در تلاقی با محور x ها، $y = 0$ است، پس باید:

$$\sin(\pi \cos x) = 0 \Rightarrow \pi \cos x = k\pi \Rightarrow \cos x = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

اما $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، لذا مقادیر قابل قبول برای k عبارتند از $0, 1, -1$ ، که در بازه‌ی $(0, \pi)$ ، تنها $k = 0$ یعنی $\cos x = 0$ حاصل می‌شود و از

$$\text{آنجا } x = \frac{\pi}{2}, \text{ پس کافی است مشتق تابع را در } x = \frac{\pi}{2} \text{ بیابیم.}$$

$$(g \circ f)'(x) = (-\sin x)(\pi) \cos(\pi \cos x)$$

$$(g \circ f)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = (-\pi) \cos(0) = -\pi$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۵۱ و ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

(کتاب آبی - سوال ۱۷۰۷)

از مشتق زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ اما از آنجایی که محاسبه دشوار است، $\frac{dx}{dy}$ را می‌یابیم و سپس آن را عکس می‌کنیم.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{du} \times \frac{du}{dy} = (2u - 2)(2y - 1)$$

به ازای $y = 1$ ، $u = 0$ است، پس:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{\substack{y=1 \\ u=0}} = (0 - 2)(2 - 1) = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کتاب آبی - سوال ۱۷۶۲)

از خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی A به طول (۱) خواهیم داشت:

$$\text{مماس } m = f'(1) = 2 \text{ و } y(1) = f(1) = 3$$

با توجه به این اطلاعات معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{1}{f}$ در نقطه‌ی A' به طول (۱) را می‌یابیم. ابتدا عرض نقطه را می‌یابیم.

$$y(1) = \left(\frac{1}{f} \right)(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow A' \left(1, \frac{1}{3} \right)$$

حال شیب خط مماس را می‌یابیم:

$$y' = \left(\frac{-f'}{f^2} \right)(x) \Rightarrow y'(1) = -\frac{f'(1)}{f^2(1)} = -\frac{2}{3^2} = \frac{-2}{9}$$

پس معادله‌ی خط مماس بر تابع $\frac{1}{f}$ در A' برابر است با:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{-2}{9}(x - 1) \Rightarrow 9y - 3 = -2x + 2 \Rightarrow 9y + 2x = 5$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۱ تا ۱۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کتاب آبی - سوال ۱۸۳۵)

چون خط مماس در نقاط M و N موازی محور y هاست، پس باید شیب خط

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x} \quad \text{مماس در این نقاط } \infty \text{ باشد، لذا:}$$

بنابراین $2y - x = 0$ و از آنجا $y = \frac{x}{2}$ ، نقاط M و N روی این خط و ازطرفی روی خط $y = ax + b$ هستند، پس $a = \frac{1}{2}$ و $b = 0$ خواهد بود.

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌ی ۱۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(کتاب آبی - سوال ۱۸۷۱)

اگر نقطه‌ی $A(x, f(x))$ را روی تابع $y = f(x)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{9 + f^2(x)}}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(4) = \frac{1}{\sqrt{9 + 4^2}} = \frac{1}{5} \quad \text{با فرض } f(x) = 4 \text{ خواهیم داشت:}$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌ی ۱۶۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

ابتدا با استفاده از قوانین لگاریتم، ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم تا بتوانیم راحت‌تر مشتق

$$y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}} = \ln \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \quad \text{بگیریم:}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(\sin x) - \ln(1 + \cos x))$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ ، همان مقدار مشتق تابع به

$$\text{ازای } x = \frac{\pi}{2} \text{ است: } m = y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1+0} \right) = \frac{1}{2}$$

برای یافتن عرض نقطه‌ی تماس، $x = \frac{\pi}{2}$ را در ضابطه‌ی تابع قرار می‌دهیم:

$$y \left(\frac{\pi}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{1}{1+0}} = \ln 1 = 0 \Rightarrow \text{نقطه‌ی تماس: } T \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

معادله‌ی مماس: $y - y_T = m(x - x_T)$

$$y - 0 = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\xrightarrow{x=0} y = \frac{-\pi}{4} \quad (\text{عرض از مبدأ خط مماس مورد نظر})$$

(دیفرانسیل - مشتق: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

خط به معادله‌ی $\Delta y + x = b$ ، خط قائم بر نمودار تابع f^{-1} است، لذا ضریب زاویه‌ی خط قائم $\left(\frac{-1}{\Delta}\right)$ است بنابراین ضریب زاویه‌ی خط مماس بر تابع f^{-1} ، Δ خواهد بود.

از آنجایی که: $\frac{1}{\text{شیب خط مماس بر } f \text{ در } A}$ = شیب خط مماس بر تابع f^{-1} در A'

$$\text{شیب خط مماس بر } f \text{ در } A = \frac{1}{\Delta}$$

بنابراین اگر طول نقطه‌ی A را α بگیریم، آنگاه $f'(\alpha) = \frac{1}{\Delta}$ است:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(\alpha) = \frac{\Delta}{(\alpha+2)^2} = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow (\alpha+2)^2 = 2\Delta$$

$$\alpha+2 = \pm\Delta \xrightarrow{\alpha > -2} \alpha = 3$$

با قرار دادن این طول در تابع، عرض نقطه‌ی A را می‌یابیم.

$$f(3) = \frac{6-1}{3+2} = 1 \Rightarrow A(3, 1) \in f \text{ و } A'(1, 3) \in f^{-1}$$

نقطه‌ی A' در معادله‌ی خط قائم صدق می‌کند:

$$\Delta \times 3 + 1 = b \Rightarrow b = 16$$

(دیفرانسیل - مشتق؛ صفحه‌های ۱۵۷ و ۱۵۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱