



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)



ریاضی ، ریاضی پیش‌دانشگاهی ، مشتق ، مشتق توابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۱۰۱- آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + 2x$ هنگامی که متغیر از $x_1 = -1$ به $x_2 = 2$ تغییر می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴) ۱۰

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ در $x = -\frac{1}{2}$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر $f(x) = \begin{cases} e^{ax} - e^{bx}, & x \geq 0 \\ \ln(1 - 2ax), & x < 0 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) نشدنی

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- مشتق تابع $y = \ln(\ln \frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{\ln x}$ (۲) $\frac{1}{x \ln x}$ (۳) $\frac{-x}{\ln x}$ (۴) $\frac{-1}{x \ln x}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر مشتق چپ تابع $f(x) = ax \left| \tan \pi x + \sqrt{3} \right|$ در $x = \frac{2}{3}$ برابر -4π باشد، a کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- نقطه‌ی A با طول $h-2$ و نقطه‌ی B با طول ۲ بر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x \sin \pi x$ واقع‌اند. شیب پاره‌خط AB، زمانی که $h \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) 2π (۲) -2π (۳) π (۴) $-\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر منحنی $f(x) = ax^2 - bx + 2$ بر خط $g(x) = bx - 6$ در $x = 2$ مماس باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x}{1 + \cos x}}$ و $g(x) = \pi \cos x$ باشد، مشتق $(f \circ g)(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (۲) $-\frac{1}{2}\pi$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$ (۴) $-\frac{1}{4}\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی $y^2x^2 + yx - 6 = 0$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی در ربع چهارم چه قدر است؟

- (۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $-\frac{7}{3}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{11}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- اگر $y = u^2 - 2u$ و $u = [\sin x]x - \cos x$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) $4\pi + 6$ (۲) $4\pi - 6$ (۳) $6\pi + 4$ (۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، حد در بی نهایت ، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۱۱۷- اگر حد تابع $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر ۲ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، حدچپ و راست ، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۱۱۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+|x|-2} \right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\infty$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $+\infty$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & , |x| \leq 1 \\ x + b & , |x| > 1 \end{cases}$ در تمام نقاط حد دارد. مقدار $2b - a$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر $f(x+1) = \frac{1}{x^2-1}$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) -۱ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{1+3x^2} - x^3}{(x-1)^3} & ; x \neq 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} a & ; x = 1 \end{cases}$$

به‌ازای کدام مقدار a در $x=1$ پیوسته است؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{6}$

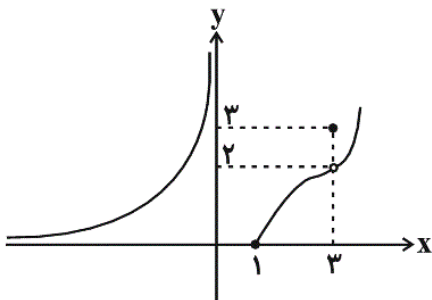
شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ به‌ترتیب در نقاط $x=1$ و $x=2$ چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) پیوسته - پیوسته
(۲) پیوسته - ناپیوسته
(۳) ناپیوسته - پیوسته
(۴) ناپیوسته - ناپیوسته

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، حاصل کدام یک از حدهای زیر صحیح نیست؟



- (۱) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$
(۲) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$
(۴) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر $2 + x^2 \leq f(x) \leq 2 \cos x$ باشد و تابع f در R حد داشته باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{f(x)}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- هرگاه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{mx+n}{x-\sqrt{x+2}} = 2$ مقدار n کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) -۳ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{12}$ (۲) $-\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

(۱) -3 (۲) 3 (۳) 6 (۴) 12

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲- است. $m + n$ کدام است؟

(۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan \frac{\pi}{x-2}$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) -1 (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) -1 (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

(۱) هر مقدار a (۲) -3 (۳) 3 (۴) هیچ مقدار a

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{2x - \pi} & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{a}{\pi}x & , \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۲) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۴) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه - گواه ، تعریف و قضایای حد ، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۱۲۶- حد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{Kx^3}{\sin x - \tan x}$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر ۴ است. K کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) 2 (۴) -2

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در بازه‌ی $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ ، به جزء در نقطه‌ی $x = 1$ ، داریم $\frac{\sin \pi x}{1 - x} \leq f(x) \leq g(x)$ و همچنین $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1 - x} - g(x)) = 0$. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، برابر کدام است؟

(۱) $-\pi$ (۲) صفر (۳) π (۴) $\frac{\pi}{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پیش‌دانشگاهی ، مشتق ، مشتق توابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

-۱۰۱

(فائزه رضایی بقا)

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع مورد نظر در بازه‌ی } x_1 \text{ تا } x_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{12 - (-3)}{3} = 5$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۲۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۲

(مهدی مصطفی ابراهیمی)

$$f'(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{-1}{x^2}\right)(1)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \xrightarrow{x = -\frac{1}{2}} \frac{4}{(1-2)^2} = 4$$

(ریاضی ۳، مشابه تمرین ۱۰، صفحه‌ی ۱۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۳

(سروش موئینی)

ابتدا می‌بایست تابع $f(x)$ در $x = 0$ پیوسته باشد، بنابراین:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\Rightarrow e^0 - e^0 = \ln(1-0) = 0$$

سپس باید مشتق‌های چپ و راست با هم برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} - be^{bx} & x \geq 0 \\ \frac{-2a}{1-2ax} & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ae^0 - be^0 = \frac{-2a}{1-0} \Rightarrow a - b = -2a \Rightarrow b = 3a \Rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۱ و ۷۵ تا ۷۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$y' = \frac{(\ln \frac{1}{x})'}{\ln \frac{1}{x}} = \frac{(-\ln x)'}{-\ln x} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۷۱ تا ۷۹)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

$$f(x) = -ax(\tan \pi x + \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow f'(x) = -a(\tan \pi x + \sqrt{3}) + \pi(1 + \tan^2 \pi x)(-ax)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow (\frac{2}{3})^-} f'_-(\frac{2}{3}) = -a(0) + \pi(1 + 3)(-\frac{2}{3}a) = -\frac{8\pi}{3}a = -4\pi$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

(مسین فابیلو)

$$m_{AB} = \frac{f(2) - f(2-h)}{2 - (2-h)} \\ = \frac{f(2) - f(2-h)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} m_{AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$$

با در نظر گرفتن $-h = t$ حاصل این حد برابر است با:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t) - f(2)}{t} = f'(2)$$

$$f(x) = x \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = \sin \pi x + x(\pi \cos \pi x)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \sin 2\pi + 2(\pi \cos 2\pi) = 2\pi$$

نکته: حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ برابر با مشتق تابع در نقطه‌ی $x = 2$ می‌باشد. $(f'(2))$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۸ و ۱۴۰ تا ۱۴۳)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

چون دو منحنی در $x=2$ بر هم مماس‌اند، بنابراین:

$$\begin{cases} f(2) = g(2) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 2 = 2b - 6 \\ 2a(2) - b = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -8 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$\xrightarrow{4a - 2b = 0} 4a - 2(4) = 0 \Rightarrow a = 2$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵ تا ۶۹)

۴

۳

۲✓

۱

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})}{2\sqrt{\tan \frac{x}{2}}} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\frac{1}{2}(1+1)}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = -\pi \sin x \Rightarrow g'(\frac{\pi}{3}) = -\pi \sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$$(fog)'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

(ریاضی عمومی، مشابه سؤال ۱۱، صفحه‌ی ۷۴)

۴

۳✓

۲

۱

(سپهر حقیقت افشار)

با جایگذاری $x=1$ در رابطه‌ی داده شده، عرض نقطه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود:

$$x=1 \Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-3 \end{cases} \xrightarrow[\text{ربع چهارم}]{(y<0)} y=-3$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه‌ی مورد نظر}} (1, -3)$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy^2 + y}{2yx^2 + x} = -\frac{18-3}{-6+1} = 3$$

پس شیب خط قائم برابر $-\frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط قائم}} y+3 = -\frac{1}{3}(x-1) \xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{(x=0)} y+3 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{8}{3}$$

(ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۵، ۶۶ و ۷۹ تا ۸۱)

۴

۳✓

۲

۱

ابتدا مقدار u به ازای $x = \frac{3\pi}{2}$ را می یابیم:

$$u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left[\sin \frac{3\pi}{2}\right]\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos \frac{3\pi}{2} = [-1]\frac{3\pi}{2} - 0 = -\frac{3\pi}{2}$$

حال بررسی می کنیم تابع u در $x = \frac{3\pi}{2}$ مشتق پذیر است یا خیر:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} [\sin x]x - \cos x = [(-1)^+] \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} + 0 = -\frac{3\pi}{2}$$

مقدار و حد تابع برابر است پس در $\frac{3\pi}{2}$ پیوسته هست. حال مشتق چپ و راست را حساب کنیم:

$$\begin{cases} x > \frac{3\pi}{2} : u = [\sin x]x - \cos x \\ \Rightarrow u = [(-1)^+]x - \cos x = -x - \cos x \Rightarrow u' = -1 + \sin x \\ x < \frac{3\pi}{2} : u = [(-1)^+]x - \cos x = -x - \cos x \Rightarrow u' = -1 + \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow u'_-\left(\frac{3\pi}{2}\right) = u'_+\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + \sin \frac{3\pi}{2} = -1 + (-1) = -2$$

[۴]

[۳]✓

[۲]

[۱]

ریاضی ، ریاضی پایه ، حد در بی نهایت ، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax - \left| x + \frac{1}{2} \right|}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x - \frac{1}{2}}{3x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x}{3x} = \frac{a-1}{3} = 2 \Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x - \sqrt{x^2 + x}}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x - |x|}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + x}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{3x} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

بنابراین:

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۵)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، ریاضی پایه، حدچپ و راست، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(میثم همزه‌لویی)

توجه کنید که مخرج هریک از کسرهای به‌ازای $x = -1$ ، صفر می‌شود و حاصل عبارت مورد نظر، ابهام دارد که باید آن را رفع ابهام کنیم.

وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ داریم: $|x| = -x$

بنابراین حد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-x-2} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x-2)} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x-2)^2 + 2(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 4x + 4 + 2x - 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۰ تا ۱۰۳)

۴✓

۳

۲

۱

ابتدا شرط تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & , -1 \leq x \leq 1 \\ x + b & , x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

تابع در تمام نقاط حد دارد. بنابراین f در $x = 1$ و $x = -1$ حد دارد، یعنی:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \Rightarrow 1 + b = 1 - a + 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \\ \Rightarrow 1 + a + 1 = -1 + b \Rightarrow a - b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow 2b - a = 5$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷، ۸۳ تا ۸۵)

۴

۳✓

۲

۱

(معمدمصطفی ابراهیمی)

باید $x \rightarrow 0^+$ میل کند. پس $x \rightarrow (-1)^+$ میل می‌کند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{((-1)^+)^2 - 1} \\ &= \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۶ و ۹۴ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، ریاضی پایه ، پیوستگی در نقطه ، پیوستگی - ۱۳۹۵۱۱۱۵

شرط پیوستگی در $x=1$ آن است که $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. با توجه به

ضابطه‌ی تابع f ، $f(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ و برای محاسبه‌ی حد f در $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{1+3x^2-x^3}}{(x-1)^3} \quad \text{داریم:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{1+3x^2-x^3}}{(x-1)^3} \times \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{1+3x^2-x^3}}{\sqrt{3x} + \sqrt{1+3x^2-x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - (1+3x^2-x^3)}{(x-1)^3 (\sqrt{3x} + \sqrt{1+3x^2-x^3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^3 (\sqrt{3x} + \sqrt{1+3x^2-x^3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3 (\sqrt{3x} + \sqrt{1+3x^2-x^3})}$$

۴

۳

۲ ✓

۱

چون حد چپ تعریف نشده و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ ، بنابراین f در $x=1$

پیوسته است.

بررسی پیوستگی در $x=2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[2^+]} = \frac{2}{2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[2^-]} = \frac{2}{1} = 2 \end{array} \right.$$

چون حدهای چپ و راست موجود و نابرابرند، بنابراین تابع در $x=2$ ناپیوسته است.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

با توجه به شکل داریم:

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷، ۸۵، ۹۴ تا ۹۶ و ۱۰۴ تا ۱۰۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عباس امیدوار)

از آن جا که: $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x^2) = 2$ بنابراین طبق قضیه‌ی

فشرده‌گی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)} = \frac{1}{2}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۷ تا ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

چون حد مخرج وقتی $x \rightarrow 2$ برابر صفر است و حاصل حد، عددی حقیقی است، پس باید حد صورت نیز صفر باشد. در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (mx + n) = 2m + n = 0 \Rightarrow n = -2m$$

حال با قرار دادن $n = -2m$ در حد داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{mx - 2m}{x - \sqrt{x+2}} = 2$$

با گویا کردن داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x+\sqrt{x+2})}{(x+1)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{4m}{3} = 2 \Rightarrow m = \frac{3}{2} \xrightarrow{n=-2m} n = -3$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۲ تا ۹۴)

۴

۳✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x} = \frac{0}{0} \text{ (مبهم)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{\tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{\tan^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (2 \sin^2 \frac{x}{2})}{\tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \times (2(\frac{x}{2})^2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times \frac{x^3}{4}}{x^3} = 1$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۶ تا ۹۰)

۴

۳

۲

۱✓

حد حاصل ابهام $(\infty - \infty)$ دارد. با تجزیه‌ی مخرج‌ها و مخرج مشترک‌گیری رفع ابهام می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(2x+1)(x+2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(x-2) - 4(2x+1)}{(2x+1)(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x - 10}{(2x+1)(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5(x+2)}{(2x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

تذکر: برای تجزیه‌ی $2x^2 + 5x + 2$ دقت کنید که چون $x = -2$ یک ریشه‌ی آن می‌باشد پس یکی از عوامل تجزیه، $(x+2)$ خواهد شد و به راحتی عامل دیگر که $(2x+1)$ است تعیین می‌گردد.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶، ۹۰ تا ۹۲ و ۹۴ تا ۱۰۳)

۴

۳

۲✓

۱

حد صورت وقتی $x \rightarrow 3$ برابر ۱- است، پس برای آن که هم حد چپ و هم حد راست تابع ∞ - گردد، باید مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف $x = 3$ باشد. با توجه به اینکه ضریب x^2 در عبارت مخرج ۲ است، پس مخرج کسر به صورت $2(x-3)^2$ خواهد بود و داریم:

$$\begin{aligned} 2(x-3)^2 &= 2x^2 - 12x + 18 = 2x^2 + ax + b \\ \Rightarrow a &= -12, b = 18 \end{aligned}$$

پس $a + b = 6$.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۴ تا ۹۶ و ۱۰۳)

۴

۳✓

۲

۱

از آن جایی که $n > 3$ ، پس $n - 2 > 1$ ، لذا جمله‌ی پرتوان مخرج mx^{n-2} است و از آن جایی که حد تابع عددی غیرصفر شده پس در صورت کسر، جمله‌ی پرتوان x^{m+3} خواهد بود، زیرا درجه‌ی آن باید از ۱ بیش‌تر باشد،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2 \quad \text{بنابراین:}$$

با توجه به حد تابع باید:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = \frac{-1}{2} \\ m + 3 = n - 2 \xrightarrow{m = \frac{-1}{2}} \frac{-1}{2} + 3 = n - 2 \rightarrow n = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{-1}{2} + \frac{9}{2} = 4$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۵)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی، ریاضی پایه - گواه، حدچپ و راست، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(سؤال ۴۳۱ کتاب آبی)

اگر $x \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه $(-\frac{\pi}{2})^- \rightarrow (\frac{\pi}{x-2})^-$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan \frac{\pi}{x-2} = \tan \left(-\frac{\pi}{2} \right)^- = \frac{\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)^-}{\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right)^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۳)

۴✓

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی ۱-۱۳)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] = 2 \times \left[\frac{1}{2^-} \right] = 2 \times 0 = 0$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷ و ۸۴ تا ۸۶)

۴

۳

۲✓

۱

$$L = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|}$$

اگر $x \rightarrow 2^+$ ، آنگاه $x > 2$ ، پس:

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2}$$

برای محاسبه‌ی حد اخیر، با توجه به آنکه ابهام آن از نوع $\frac{0}{0}$ است، از

قاعده‌ی هوییتال استفاده می‌کنیم:

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲ ✓

☐ ۱

ریاضی ، ریاضی پایه - گواه ، پیوستگی در نقطه ، پیوستگی - ۱۳۹۵۱۱۱۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} \\ \quad = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} \\ \quad = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{x-1} = -3 \end{cases}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، پس شرط پیوستگی در $x = 1$ ،

یعنی $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ، هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد، بنابراین

تابع f هیچ‌گاه در $x = 1$ پیوسته نیست.

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

برای پیوسته بودن، باید تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{2x - \pi} \quad (\text{ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد.})$$

برای رفع ابهام، از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + t \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow t \rightarrow 0^- \end{cases} \Rightarrow \text{حد} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + t)}}{2(t + \frac{\pi}{2}) - \pi}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{t^2}{2}}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{\sqrt{2}t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{2\sqrt{2}t} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

در نتیجه برای پیوسته بودن باید:

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی، ریاضی پایه - گواه، تعریف و قضایای حد، حد - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(سؤال ۳۹۸ کتاب آبی)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2}{\sin x - \tan x} = \varphi &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2}{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}} = \varphi \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2}{\frac{\sin x \cos x - \sin x}{\cos x}} = \varphi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2 \cos x}{\sin x \cos x - \sin x} = \varphi \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2 \cos x}{\sin x (\cos x - 1)} = \varphi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Kx^2 \cos x}{\sin x \left(-2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)} = \varphi \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{K}{-2} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \left(\frac{x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 (\cos x) \right) = \varphi \\
 &\Rightarrow \frac{K}{-2} (1) \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right)^2 (1) = \varphi \Rightarrow -2K = \varphi \Rightarrow K = -2
 \end{aligned}$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲ تا ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری تهرانی-۱۶)

ابتدا حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$ را می‌یابیم. داریم:

$$x-1=t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} = \pi$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = 0$ ، پس: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \pi$ و ازآن جا که در بازه‌ی $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$ ، به جز در نقطه‌ی $x=1$ داریم:

$$\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x), \text{ طبق قضیه‌ی فشردگی، نتیجه می‌شود که:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$$

(ریاضی ۳، صفحه‌های ۸۲، ۸۳ و ۸۷ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱