



www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...و

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

[@riazisara](https://telegram.me/riazisara)

ریاضی ، حسابان ، توابع صعودی و نزولی ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۵۳- تابع $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^x$ چگونه است؟

- ۱) زوج
۲) فرد
۳) صعودی
۴) نزولی

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، حسابان ، توابع یک به یک و وارون ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۵۴- نمایش هندسی تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ \sqrt{x} & ; x \geq 0 \end{cases}$ با معکوس آن چند نقطه‌ی مشترک دارد؟

- ۱) صفر
۲) ۱
۳) ۴

شما پاسخ نداده اید

۵۵- ضابطه‌ی معکوس تابع $f(x) = 2x + |x-1| - 1$ به صورت $f^{-1}(x) = a|x-1| + bx + c$ است، در این صورت حاصل $a+2b+c$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{4}{3}$
۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

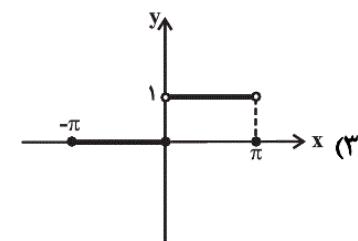
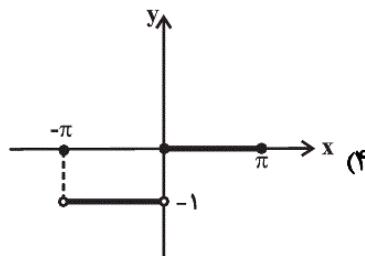
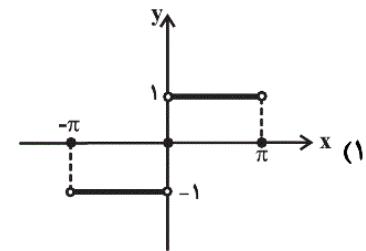
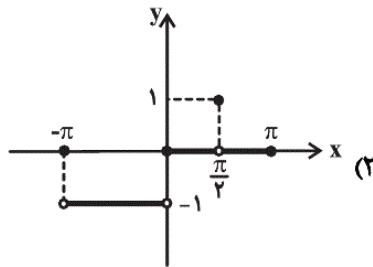
ریاضی ، حسابان ، تابع پله‌ای و تابع جزء صحیح ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۵۶- معادله‌ی $x = -1 - \left[\frac{5-x}{3}\right]$ در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (۱)، علامت جزء صحیح است.)

- ۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴

شما پاسخ نداده اید

۵۱- نمودار تابع $y = [\sin x]$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ مطابق کدام گزینه است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است).



شما پاسخ نداده اید

۵۲- تابع $[x - y]$ چگونه است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است).

(۲) فرد

(۱) زوج

(۴) یکبهیک

(۳) متناوب

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، حسابان ، توابع تانژانت و کتانژانت ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۵۷- ارتفاع وزنه‌ای که به یک فنر متصل و در حال نوسان است، t ثانیه‌ی پس از شروع حرکت از رابطه‌ی $h(t) = -2 \sin(\frac{5\pi t}{3} + \frac{\pi}{6})$ بر حسب

متربه‌دست می‌آید. در ثانیه‌ی $t = 0 / 8s$ ، ارتفاع وزنه چند متر است؟

-۲ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۲ (۴)

$-\sqrt{3}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، حسابان ، اتحادهای مثلثاتی ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۵۸- بهازای کدام مقدار m تابع $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ ثابت است؟

۱/۵ (۲)

۳ (۱)

-۳ (۴)

-۱/۵ (۳)

۵۹- حاصل کدام است؟

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$$

$\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

-۴ (۴)

۴ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۶۰- اگر $\sin 2x = \frac{7}{9}$ ، آن‌گاه $|\sin x + \cos x|$ کدام است؟

$\frac{16}{9}$ (۲)

$\frac{9}{7}$ (۱)

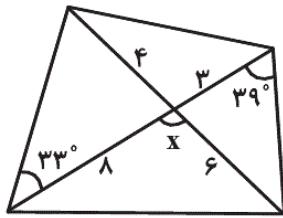
$\frac{4}{3}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، چندضلعی محیطی ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۷۴- با توجه به شکل رویه‌رو، زاویه‌ی بین قطرهای چهارضلعی کدام است؟



۶۴° (۲)

۵۴° (۱)

۷۸° (۴)

۷۲° (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، کمان در خور یک زاویه ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۷۲- پاره خط $BC = 2\sqrt{2}$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی A طوری در صفحه تغییر می‌کند که همواره $\hat{BAC} = 135^\circ$. طول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث

ABC

۲) برابر با ۲ است.

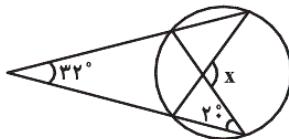
۱) با تغییر نقطه‌ی A، تغییر می‌کند.

۴) ثابت است ولی با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

۳) برابر با $\sqrt{2}$ است.

شما پاسخ نداده اید

۷۱ - با توجه به شکل زیر، زاویه‌ی X چند درجه است؟



۸۰ (۲)

۸۴ (۱)

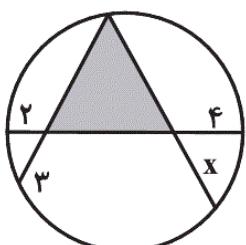
۷۲ (۴)

۷۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، رابطه‌ی طولی در دایره ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۷۳ - در شکل رویه‌رو، مثلث سایه‌خورده متساوی‌الاضلاع است. مقدار X کدام است؟



۵ (۲)

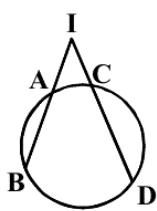
۷ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۵ - مطابق شکل، امتداد وترهای AB و CD در نقطه‌ی I متقاطع‌اند. اگر $2 = CD = 3IA = 2IC = 2$ ، طول پاره‌خط IA کدام است؟



$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲)

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۴)

$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۶ - در مثلث ABC نیمساز زاویه‌ی داخلی A ، ضلع BC را به نسبت $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$ قطع می‌کند. اگر $AC = 2DC$ ، آن‌گاه طول نیمساز AD چه

کسری از طول ضلع AC است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

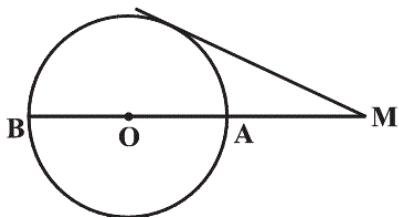
$\frac{1}{2}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۷- در شکل زیر، طول مماس رسم شده از نقطه‌ی M بر دایره‌ی $C(O, 6)$ برابر ۸ واحد است. طول MA چند واحد است؟



۵ (۲)

۴ (۱)

۳ (۴)

۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۹- زاویه‌ی بین مماس‌های مشترک خارجی دو دایره $(O, 4)$ و $(O', 12)$ برابر 60° است. کمترین فاصله‌ی نقاط این دو دایره از یکدیگر کدام است؟

۶ (۲)

۱) صفر

۴ (۴)

۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، مماس مشترک دو دایره ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

۸۰- طول خط‌المرکزین دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ برابر با 10° واحد است. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو مماس مشترک داخلی از مرکز دایره بزرگ‌تر کدام است؟

۶/۷۵ (۲)

۶/۲۵ (۱)

۳/۷۵ (۴)

۳/۲۵ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۸- طول مماس مشترک خارجی دو دایره با شعاع‌های نابرابر، با طول مماس رسم شده بر دایره‌ی کوچک‌تر از مرکز دایره‌ی بزرگ‌تر، برابر است. نسبت شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر به شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، جبر و احتمال ، جبر مجموعه‌ها و قوانین ترکیبی ، مجموعه ضرب دکارتی و رابطه - ۱۳۹۵۱۱۱۵

-۸۱ مجموعه‌ی $(A - B)' \cap (A \cap B)'$ همواره برابر کدام است؟

B (۲)

A' (۱)

B - A (۴)

B' (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۸۲ اگر $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$ آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$A \Delta B = A$ (۲)

$A \subset B$ (۱)

$A' \cap B' = A'$ (۴)

$A' - B' = B$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۸۳ اگر $[n-1, n+1] = A_1 \Delta A_2 \Delta A_n$ ، آن‌گاه شامل چند عدد صحیح است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۸۴ اگر $A \cap B' = \{c, d\}$ و $A \cap B = \{a, b\}$ کدام است؟

$A \cap B'$ (۲)

$A \cap B$ (۱)

$\{a, b, c, d\}$ (۴)

\emptyset (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۸۵ حاصل عبارت $[((A - B)' \cap C) \cup (B \cup A')] \cap (B \cup A)$ همواره کدام است؟

$B - A$ (۲)

A (۱)

U (۴)

B (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۸۶ اگر مجموعه‌ی A، ۱۳ عضو و مجموعه‌ی B، ۶ عضو داشته باشد، تعداد اعضای $A \Delta B$ چند مقدار متفاوت می‌تواند باشد؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۱۹ (۴)

۱۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، جبر و احتمال ، حاصل ضرب دکارتی ، مجموعه ضرب دکارتی و رابطه - ۱۳۹۵۱۱۱۵

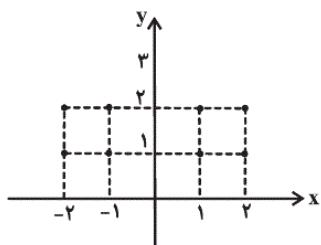
-۸۷ نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ به صورت زیر است. مجموعه‌های A و B به کدام صورت می‌توانند باشند؟

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$ (۱)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x^2 \leq 4\}$ (۲)

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$ (۳)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$ (۴)



شما پاسخ نداده اید

-۸۸ اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی نایبیشتر از ۲۰ و مجموعه‌ی B $= \{3k - 1 \mid k \in A\}$ به صورت B = {3k - 1 | k ∈ A} تعریف شود، $B^3 - A \times B$ چند عضو دارد؟

۲۱۰ (۲)

۱۴۰ (۱)

۲۸۰ (۴)

۲۶۰ (۳)

شما پاسخ نداده اید

- ۸۹ - چند رابطه روی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c\}$ می‌توان تعریف کرد؟

۲۵۶ (۲) ۱۲۸ (۱)

۵۱۲ (۴) ۵۶۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

- ۹۰ - در ناحیه‌ی $\{(x, y) | x^2 \leq y \leq 2x + 3\}$ ، بیشترین مقدار $x + y$ کدام است؟

۱۲ (۲) ۹ (۱)

۱۵ (۴) ۱۱ (۳)

شما پاسخ نداده اید

- ۶۱ - به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+2|+a|x-2|$ زوج است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر

۱ (۳) ۲ (۴)

شما پاسخ نداده اید

- ۶۲ - اگر تابع $y = f(x)$ صعودی اکید باشد، کدام تابع همواره صعودی اکید است؟

$|x|f(x)$ (۲) $|x|+f(x)$ (۱)

$|x|f(x)$ (۴) $x+f(x)$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

- ۶۳ - تابع با ضابطه‌ی $|x-2| = y$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

$$y = 1 - \sqrt{1-x} ; x < 1 \quad (۲)$$

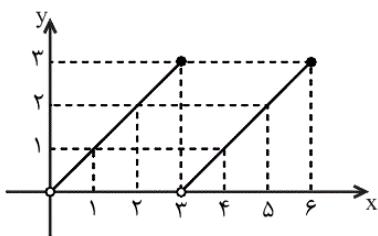
$$y = 1 - \sqrt{1+x} ; x < 0 \quad (۱)$$

$$y = 1 - \sqrt{1-x} ; 0 < x < 1 \quad (۴)$$

$$y = 1 + \sqrt{1-x} ; 0 < x < 1 \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۶۴- قسمتی از نمودار تابع متناوبی با دوره‌ی تناوب $T=3$ به صورت زیر رسم شده است. حاصل $f(11) + f(9)$ کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۱۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۶۵- اگر $x^0 + x^1 + x^2 + \dots$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟ ()، علامت جزء صحیح است.

-۱ (۲)

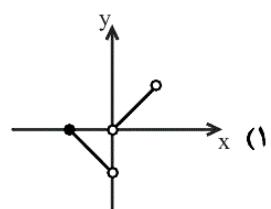
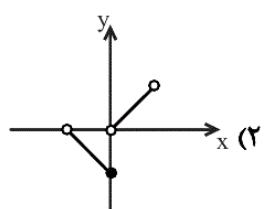
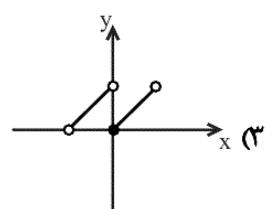
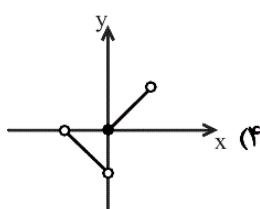
-۲ (۱)

۱ (۴)

۰ صفر (۳)

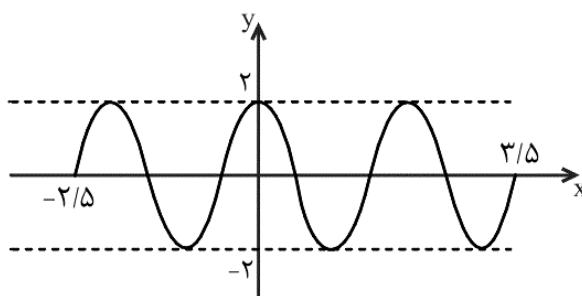
شما پاسخ نداده اید

۶۶- نمایش هندسی $y = |x| + [x]$ در فاصله‌ی $-1 < x < 1$ - کدام شکل است؟ ()، علامت جزء صحیح است.



شما پاسخ نداده اید

-۶۷- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ است. a, b کدام است؟



۲ (۱)

۲/۵ (۲)

۳ (۳)

۳/۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، حسابان-گواه ، اتحادهای مثلثاتی ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

-۶۸- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ برابر کدام است؟ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$ و $g(x) = \tan x$ ، ضابطه‌ی تابع $(fog)(x)$ در بازه‌ی

$\cos x$ (۲)

$\sin x$ (۱)

- $\cos x$ (۴)

- $\sin x$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۶۹- اگر $\cot(25^\circ - \alpha) = \tan(\alpha + 20^\circ)$ باشد، کدام است؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

شما پاسخ نداده اید

-۷۰- از معادله‌ی $\tan 2x - \cot x = 6$ ، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$-\frac{1}{3}$ (۲)

-۳ (۱)

۳ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

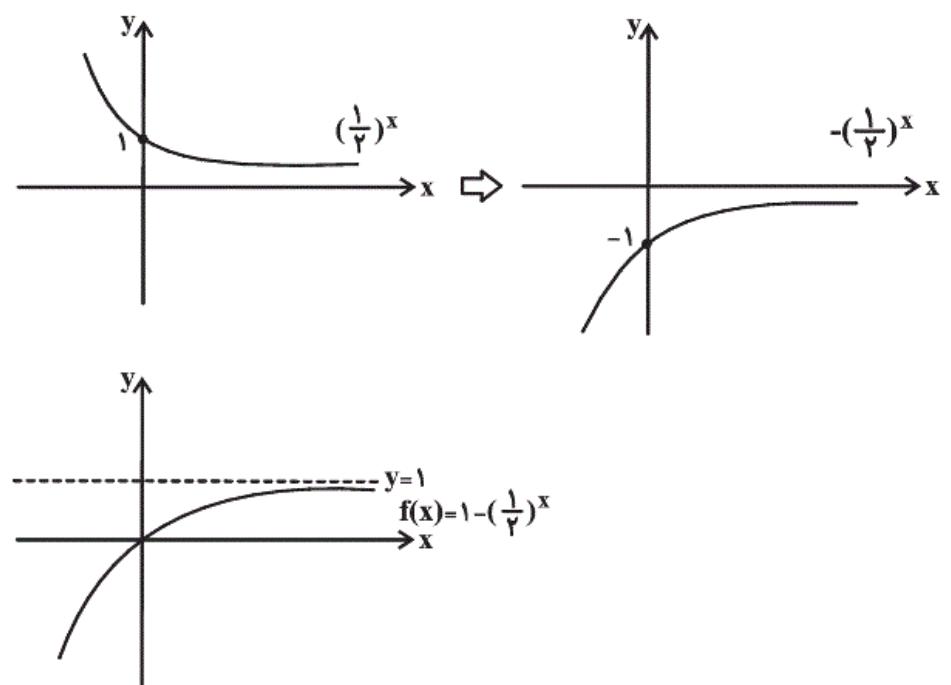
شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، حسابان ، توابع صعودی و نزولی ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۵

(محمد مصطفی ابراهیمی)

-۵۳

نمودار تابع را رسم می کنیم :



مطابق شکل این تابع در \mathbb{R} اکیداً صعودی است.

(حسابان - تابع - صفحه های ۷۶ تا ۸۵)

۴

۳ ✓

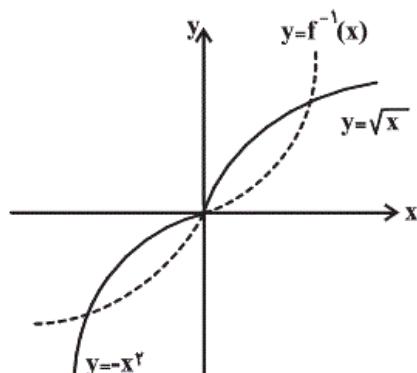
۲

۱

ریاضی ، حسابان ، توابع یک به یک و وارون ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۵

روش اول:

برای حل این سؤال از رسم نمودار کمک می‌گیریم، که از روی نمودار کاملاً مشخص است دو تابع f و f^{-1} ، ۳ نقطه‌ی مشترک دارند.



روش دوم:

بعد از رسم نمودار تابع f با توجه به این‌که از روی نمودار مشخص است که تابع f صعودی اکید است می‌توانیم از این نکته استفاده کنیم که اگر تابعی صعودی اکید باشد محل برخورد آن با معکوسش روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم ($y = x$) واقع می‌شود:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = x \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \\ -x^2 = x \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1 \end{cases}$$

که در نقاط $x = \pm 1$ و $x = 0$ تابع f و معکوسش مشترک‌اند.

(مسابقات-تابع-صفحه‌های ۱۵ تا ۹۵)

۴✓

۳

۲

۱

ضابطه‌ی تابع f به شکل مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & ; \quad x \geq 1 \\ x & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

برای یافتن ضابطه‌ی تابع معکوس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x = \begin{cases} 3y - 2 & ; \quad y \geq 1 \\ y & ; \quad y < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & ; \quad x \geq 1 \\ x & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

پس تابع معکوس در نهایت به صورت زیر است:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & ; \quad x \geq 1 \\ x & ; \quad x < 1 \end{cases} = \begin{cases} (a+b)x + c - a & ; \quad x \geq 1 \\ (b-a)x + a + c & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a+b = \frac{1}{3} \\ b-a = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2}{3}, a = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ c-a = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{3}, a = -\frac{1}{3}$$

$$a + 2b + c = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)



$$\left[\frac{x}{3} \right] \left[\frac{5-x}{2} \right] - 1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3} \right] \left[\frac{5-x}{2} \right] = 1$$

چون حاصل ضرب دو جزء صحیح عددی صحیح می‌باشد، عبارت بالا را باید این‌طور تعبیر کرد که ضرب دو عدد صحیح ۱ شده است. این در صورتی امکان‌پذیر است که هر دو ۱ یا هر دو -۱ باشند:

$$\left[\frac{x}{3} \right] = 1, \quad \left[\frac{5-x}{2} \right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{3} < 2, \quad 1 \leq \frac{5-x}{2} < 2$$

$$\Rightarrow 3 \leq x < 6, \quad 2 \leq 5-x < 4 \Rightarrow 3 \leq x < 6, \quad 1 < x \leq 3$$

پس تنها جواب تا اینجا $x = 3$ می‌باشد و اگر داشته باشیم:

$$\left[\frac{x}{3} \right] = -1, \quad \left[\frac{5-x}{2} \right] = -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 0, \quad -1 \leq \frac{5-x}{2} < 0$$

$$\Rightarrow -3 \leq x < 0 \quad \text{و} \quad -2 \leq 5-x < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \quad \text{و} \quad 5 < x \leq 7$$

که اشتراک ندارند پس تنها جواب معادله $x = 3$ است.

۴

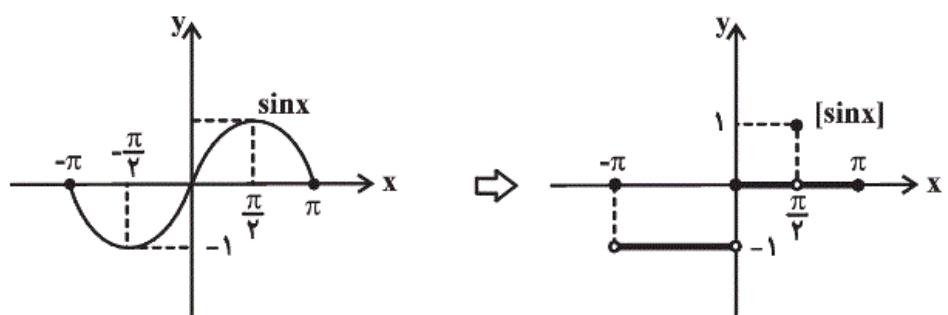
۳

۲

۱ ✓

اول نمودار $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم، سپس از روی آن، نمودار

$y = [\sin x]$ را به دست می‌آوریم:



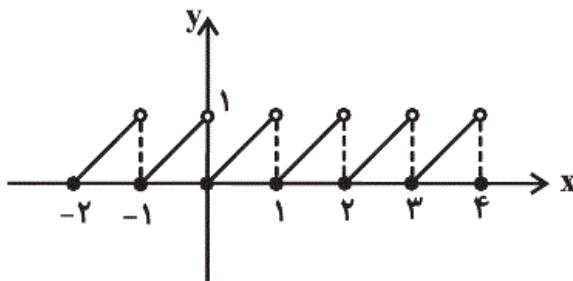
۴

۳

۲

۱

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است:



با توجه به نمودار، این تابع متناوب با دوره تناوب $T = 1$ است.

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۷۶ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱

ریاضی ، حسابان ، توابع تانژانت و کتانژانت ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(کاظم اجلالی)

با جایگذاری $t = \theta / \lambda$ در رابطه‌ی h داریم:

$$h(\theta / \lambda) = -2 \sin\left(\frac{5\pi}{3} \times \theta / \lambda + \frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \text{ متر}$$

(حسابان - مثلثات - صفحه‌های ۱۰۴ و ۱۰۵)

۴

۳

۲

۱

ریاضی ، حسابان ، اتحادهای مثلثاتی ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

می دانیم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$-2 \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2 \sin x \cos x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x$$

$$f(x) = 1 - 2 \sin x \cos x + m(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2(\sin x \cos x) + m - 2m(\sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow f(x) = m + 1 + \sin x \cos x (-2 - 2m)$$

برای اینکه تابع ثابت باشد میبایست عبارت $\sin x \cos x$ حذف

شود. پس داریم:

$$-2m - 2 = 0 \Rightarrow -2m = 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{2} = -1 / 5$$

(مسابقات - مسئله های ۱۷ و ۱۸)

۱

۲

۳

۴

$$\frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ - \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ} \xrightarrow{\tan 6^\circ = \sqrt{3}}$$

$$\frac{\cos 1^\circ - \frac{\sin 6^\circ}{\cos 6^\circ} \sin 1^\circ}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2^\circ} = \frac{\cos 6^\circ \cos 1^\circ - \sin 6^\circ \sin 1^\circ}{\cos 6^\circ}$$

$$= \frac{\cos(6^\circ + 1^\circ)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2^\circ \cos 6^\circ} = \frac{\cos 7^\circ}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2^\circ}$$

$$\xrightarrow{\cos 7^\circ = \sin 2^\circ} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4$$

(مسابقات - مسئلات - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$A = |\sin x + \cos x| \Rightarrow A^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= 1 + \sin 2x \xrightarrow{\sin 2x = \frac{2}{9}}$$

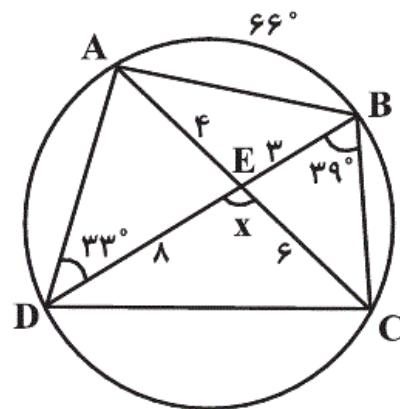
$$A^2 = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

(مسابقات - مسئلات - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به شکل، از آنجا که $AE \times EC = BE \times ED$ ، از چهار نقطه‌ی A،

$\widehat{AB} = 2\hat{ADB} = 66^\circ$ و $\widehat{CD} = 2\hat{CBD} = 78^\circ$ یک دایره می‌گذرد و در این دایره C، B، D و A هستند.



پس: $\widehat{CD} = 2\hat{CBD} = 78^\circ$

$$x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$$

$$= \frac{66^\circ + 78^\circ}{2} = 72^\circ$$

(هندرسه ۲ - صفحه‌های ۶۱ و ۷۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، کمان در خور یک زاویه ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

با توجه به مفروضات سؤال، می‌توان گفت که نقطه‌ی A روی کمان درخور زاویه‌ی 135° روبرو به پاره‌خط BC قرار دارد و دایره‌ی محیطی مثلث ABC دایره‌ای است که این کمان درخور بخشی از آن است که شعاع آن به صورت زیر حساب می‌شود:

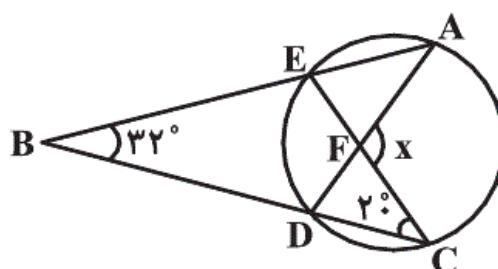
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} \xrightarrow{\substack{a=2\sqrt{2} \\ \alpha=135^\circ}} R = \frac{2\sqrt{2}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 2$$

(هنرسه‌ی ۳-صفحه‌های ۶۱ و ۶۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ریاضی ، هندسه‌ی ۲ ، زاویه‌ی بین امتداد دو وتر ، دایره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(رضا عباسی اصل)



$$\widehat{ED} = 2C \Rightarrow \widehat{ED} = 40^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{ED}}{2} \Rightarrow 32^\circ = \frac{\widehat{AC} - 40^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 104^\circ$$

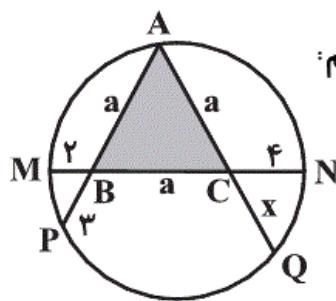
$$x = \frac{\widehat{ED} + \widehat{AC}}{2} \Rightarrow x = \frac{40^\circ + 104^\circ}{2} = 72^\circ$$

(هنرسه‌ی ۳-صفحه‌های ۶۱ و ۶۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

-۷۳-

(مهوداد ملوندی)



طول ضلع مثلث ABC را a می‌گیریم، داریم:

$$AB \times BP = BM \times BN$$

$$\Rightarrow a(3) = 2(a + 4) \Rightarrow a = 8$$

$$AC \times CQ = NC \times CM \Rightarrow a(x) = 4(2 + a)$$

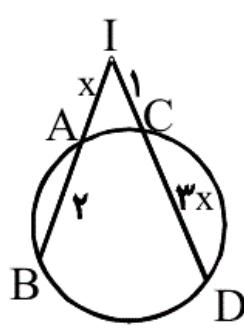
$$\xrightarrow{a=8} 8x = 4(10) \Rightarrow x = 5$$

(۷۴- هندسه‌ی ۲- صفحه‌ی ۷۶)

 ۱ ۲ ۳ ۴

-۷۴-

(مهوداد ملوندی)



$$IA \cdot IB = IC \cdot ID \Rightarrow x(x+2) = 1 \times (1+3x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 1 + 3x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} < 0 \text{ غیر قابل}$$

(۷۶- هندسه‌ی ۲- صفحه‌ی ۷۶)

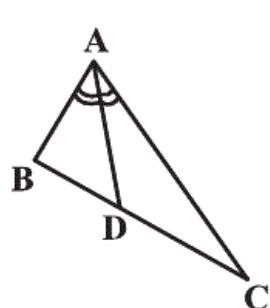
 ۱ ۲ ۳ ۴

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبرو را به نسبت دو ضلع

آن زاویه قطع می‌کند.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC, AB = \frac{2}{3}AC$$

از طرفی می‌دانیم:



$$\begin{aligned} AD^2 &= AB \cdot AC - DB \cdot DC \\ &= \left(\frac{2}{3}AC\right) \cdot AC - \left(\frac{2}{3}DC\right)DC \\ &= \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{3}DC^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DC &= \frac{1}{2}AC \Rightarrow AD^2 = \frac{2}{3}AC^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}AC^2 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC \end{aligned}$$

(هنرسه - ۲ - مساله‌ی ۳ - قسمت ب - صفحه‌ی ۷۱)

۱

۲

۳ ✓

۴

$$MT^2 = MA \times MB$$

$$MA = x, MB = 2R + x = 12 + x \text{ و } MT = \lambda$$

$$x(12+x) = 64 \Rightarrow x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$(x+16)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$$

(۷۷ هنرسه - ۲ - صفحه‌ی ۷)

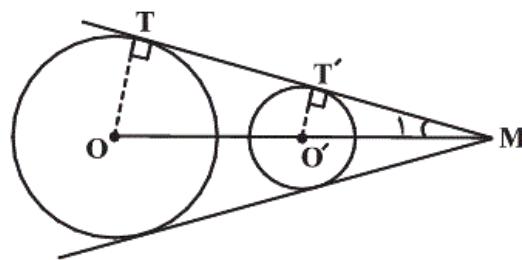
۱

۲

۳ ✓

۴ ✓

برای کمک به حل سؤال، شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



$$\hat{M}_1 = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ و } OT = 12 \text{ و } O'T' = 4$$

$$\hat{M}_1 = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{O'T'}{O'M} = \frac{1}{2} \Rightarrow O'M = 8 \\ \frac{OT}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow OO' = 24 - 8 = 16 = R + R'$$

يعنى دو دايره مماس بیرونی هستند، بنابراین کمترین فاصله‌ی نقاط روی دايره از يك دیگر برابر صفر است.

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳

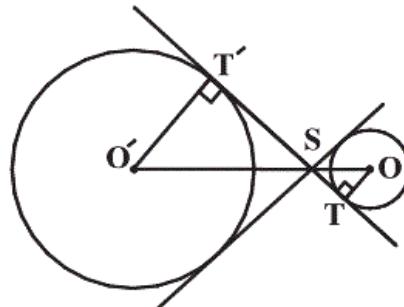
۲

۱ ✓

رياضي ، هندسي ۲ ، مماس مشترك دو دايره ، دايره - ۱۳۹۵۱۱۱۵

با رسم شعاع‌های گذرنده از نقاط تماس،

دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متشابه داریم:



$$\triangle TSO \sim \triangle T' SO' \Rightarrow \frac{O'S}{OS} = \frac{O'T'}{OT}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{O'S}{OS + O'S} = \frac{O'T'}{OT + O'T'} \\ & \Rightarrow \frac{O'S}{10} = \frac{5}{8} \Rightarrow O'S = 6 / 25 \end{aligned}$$

(هنرسه - ۲ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱

۳

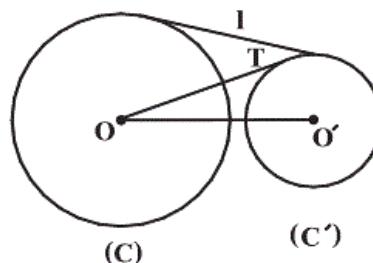
۲

۱ ✓

$$l = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} : \text{ طول مماس مشترک خارجی}$$

$$OT = \sqrt{d^2 - R'^2} : \text{ طول مماس بر دایره } C' \text{ از نقطه } O$$

طبق فرض: $OT = l$



$$\Rightarrow \sqrt{d^2 - R'^2} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow d^2 - R'^2 = d^2 - R^2 + 2RR' - R'^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 2RR' \Rightarrow R = 2R'$$

(هنرسه - ۲ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱

۳ ✓

۲

۱

$$(A - B)' \cap (A \cap B)' = (A \cap B')' \cap (A \cap B)'$$

$$= (A' \cup B) \cap (A' \cup B') = A' \cup (B \cap B') = A' \cup \emptyset = A'$$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دلاری و ابده - صفحه‌های ۵۰ تا ۵۴)

 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = [(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$A \cup B = A \Rightarrow B \subset A \Rightarrow A' \subset B' \Rightarrow A' \cap B' = A'$$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دلاری و ابده - صفحه‌های ۵۵ تا ۵۹)

 ۱ ✓ ۲ ۳ ۴

طبق تعریف ارائه شده، $A_1 = [0, 2]$ و $A_2 = [1, 3]$

$$A_1 \cup A_2 = [0, 4], A_1 \cap A_2 = \{2\}$$

هستند. داریم:

$$A_1 \Delta A_2 = [0, 4] - \{2\}$$

$$(A_1 \Delta A_2) \cup A_1 = [0, 4] \quad \text{و} \quad (A_1 \Delta A_2) \cap A_2 = [1, 3] - \{2\}$$

$$(A_1 \Delta A_2) \Delta A_2 = [0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4]$$

بنابراین مجموعه‌ی موردنظر شامل اعداد صحیح ۰، ۲ و ۴ است.

(ببرواهتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه- صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

۴

۳

۲

۱

(سامان اسپرینت)

-۸۴

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') = \{a, b, c, d\}$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup B') = \{a, b, c, d\} \Rightarrow A \cap U = \{a, b, c, d\}$$

$$\Rightarrow A = \{a, b, c, d\}$$

(ببرواهتمال- مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه- صفحه‌های ۵۰ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱

(یاسین هیرسرائی)

$$\begin{aligned}
 & [((A - B)' \cap C) \cup (B \cup A')] \cap (B \cup A) \\
 & = [((A \cap B')' \cap C) \cup (B \cup A')] \cap (B \cup A) \\
 & = \underbrace{[(A' \cup B) \cap C] \cup (A' \cup B)}_{\text{طبق قانون جذب}} \cap (A \cup B) \\
 & = (A' \cup B) \cap (A \cup B) = (A' \cap A) \cup B = \emptyset \cup B = B
 \end{aligned}$$

(پیرو احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سیدوهدیز ذوالقدری)

با توجه به این‌که تعداد عضوهای $A \Delta B$ از رابطه‌ی $|A| + |B| - 2|A \cap B|$ محاسبه می‌شود و در این فرمول مقدار $|A \cap B|$ نامعین است و بسته به شرایط مختلف ۷ مقدار متفاوت دارد

(تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه نهایتاً با تعداد اعضای مجموعه‌ی

کوچک‌تر برابر است، توجه کنید $A \cap B = \emptyset$ نیز یکی از حالت‌ها است).

(پیرو احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با توجه به نمودار حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ می‌توان دریافت که

مجموعه $B \times A$ برابر است با:

$$B \times A = \{(-2, 1), (-2, 2), (-1, 1), (-1, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

و با توجه به این که در حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ مولفه‌ی اول زوج‌های

مرتب اعضای B و مولفه‌های دوم اعضای A هستند می‌توان نتیجه گرفت

$$B = \{-2, -1, 1, 2\} \text{ و } A = \{1, 2\} \quad \text{که:}$$

که تنها مجموعه‌های A و B معروفی شده در گزینه‌ی «۲» چنین

اعضایی دارند.

(ببر و اهمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$B = \{3k - 1 \mid k \in A\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots, 59\}$$

A و B ، هفت عضو مشترک دارند، پس از میان ۲۰ عضو B ، ۱۳ تای

آنها در A قرار ندارند:

$$|B^c - A \times B| = |(B - A) \times B| = |B - A| \times |B|$$

$$= 13 \times 20 = 260$$

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، جبر و احتمال، رابطه، مجموعه ضرب دکارتی و رابطه - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(همید گروسی)

-۸۹-

می‌دانیم هر زیرمجموعه از مجموعه A^2 ، یک رابطه روی A است.

پس با توجه به آن‌که A دارای ۳ و در نتیجه A^2 دارای ۹ عضو است،

پس $512 = 2^9$ رابطه روی مجموعه A قابل تعریف است.

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - مشابه تمرین ۲ - صفحه‌ی ۶۱۳)

۴✓

۳

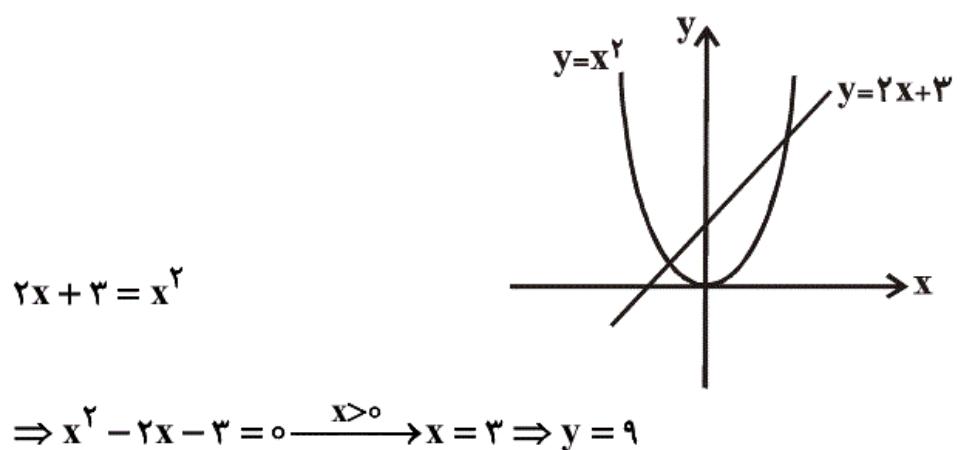
۲

۱

نمودارهای $y = x^2$ و $y = 2x + 3$ را رسم می‌کنیم:

بیشترین مقدار $x + y$ در نقطه‌ی بالا و سمت راست یعنی محل تلاقی

$y = x^2$ و $y = 2x + 3$ است:



پس بیشترین مقدار $x + y$ برابر ۱۲ است.

(بیرو احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه - صفحه‌های ۶۰ تا ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، حسابان-گواه ، توابع زوج و فرد ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

راه حل اول: تابع با دامنهٔ متقارن زمانی زوج است که

باشد، پس:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow |x+2| + a|x-2| = |-x+2| + a|x+2|$$

$$\Rightarrow |x+2| + a|x-2| = |x-2| + a|x+2|$$

$$\Rightarrow (a-1)|x+2| = (a-1)|x-2|$$

$$\Rightarrow (a-1)(|x+2|-|x-2|) = 0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$$

راه حل دوم: وقتی f زوج است، به ازای هر

است، پس:

$$f(1) = f(-1) \Rightarrow |1+2| + a|1-2| = |-1+2| + a|-1-2|$$

$$\Rightarrow 3+a=1+3a \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$$

راه حل سوم:

نکته: تابع با ضابطهٔ $f(x) = A|x-\alpha| + B|x+\alpha|$ وقتی

تابعی زوج است که $A=B$ باشد.

پس در این تست باید $a=1$ باشد.

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۷۶ تا ۸۵)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، حسابان-گواه، توابع صعودی و نزولی، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

فرض کنید f و g صعودی اکید باشند بنابراین:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

طرفین نامساوی را با هم جمع می‌کنیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$$

یعنی $f + g$ تابعی است صعودی.

در این تست، f صعودی و $x = y$ نیز صعودی اکید است. لذا جمع آنها

یعنی $(f + g)(x)$ نیز صعودی اکید است. پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

سعی کنید با مثال نقض گزینه‌های دیگر را رد کنید.

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۷۴ تا ۸۵)

۴

۳ ✓

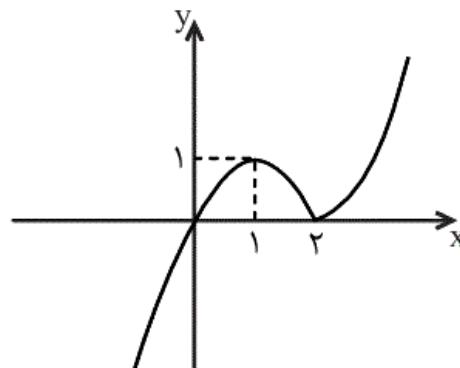
۲

۱

ریاضی ، حسابان-گواه ، توابع یک به یک و وارون ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۵

اگر نمودار تابع را رسم کنیم با ضابطه‌بندی خواهیم داشت:

$$y = x |x - 2| = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; \quad x < 2 \end{cases}$$



این تابع وقتی $2 \leq x \leq 1$ نزولی است که برد آن در این فاصله،

$y \leq 1$ خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع معکوس آن در این فاصله،

$x \leq 1$ است و ضابطه‌ی تابع معکوس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 1 - y$$

$$\xrightarrow{1 < x < 2} x - 1 = \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x} \quad (0 < x < 1)$$

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۷۴ تا ۹۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی ، حسابان-گواه ، توابع چند جمله‌ای و توابع متناظر ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

دوره‌ی تناوب تابع ۳ است پس:

$$f(x) = f(x + 3k) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = f(3 + 2 \times 3) = f(3) = 3 \\ f(11) = f(2 + 3 \times 3) = f(2) = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1) + f(11) = 5$$

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ریاضی ، حسابان-گواه ، تابع پله‌ای و تابع جزء صحیح ، تابع - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(سراسری تبریز فارج از کشور - ۸۸)

اگر $x^2 + x < 0$ باشد، آنگاه $-1 < x < 0$ - خواهد بود. لذا:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0$$

پس:

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

(حسابان - تابع - صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۳)

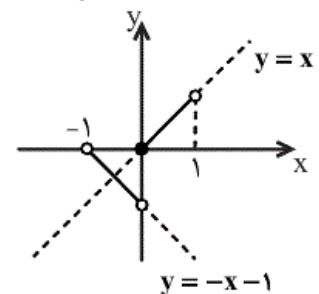
 ۴ ۳ ۲ ۱

با بازه‌بندی خواهیم داشت:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow |x| = -x, [x] = -1$$

$$\Rightarrow y = -x - 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow |x| = x, [x] = 0 \Rightarrow y = x$$



(مسابقات تابع - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی ، حسابان-گواه ، توابع تانژانت و کتانژانت ، مثلثات - ۱۳۹۵۱۱۱۵

(سراسری ریاضی - ۹۲)

تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

$$|a| = 2$$

ماکریم تابع برابر ۲ است، بنابراین:

اما $y(0) = 2$ ، پس:

$$y(0) = a \times \cos 0 = a \Rightarrow a = 2$$

از طرفی نمودار تابع در بازه‌ی $[-2/5, 3/5]$ سه بار تکرار شده، در نتیجه:

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

با توجه به رابطه‌ی دوره‌ی تناوب تابع کسینوسی خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

که هر دو مقدار قابل قبول است. با توجه به $\text{گزینه‌ها } ۲ = a \cdot b$ است.

(مسابقات مثلثات - صفحه‌های ۱۰۵ تا ۱۰۶)

(سراسری تبدیل - ۷۹)

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ g(x) = \tan x \end{cases}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \\ = |\cos x| \tan x = \frac{\sin x |\cos x|}{\cos x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

وقتی $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ، کمان در ناحیه دوم یا سوم (یا مرز دو ناحیه)

قرار دارد، در این نواحی، کسینوس منفی است، پس $|\cos x| = -\cos x$

و داریم:

$$(fog)(x) = \frac{-\sin x \cos x}{\cos x} = -\sin x$$

(حسابان-مثلثات-صفدهای ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\cot(25^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan(25^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ))}$$

از آنجایی که $\tan(45^\circ - \alpha) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ پس:

$$\cot(25^\circ - \alpha) = \frac{1 + \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 - \tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 7$$

(مسابان - مثیثات - صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

با استفاده از رابطه‌ی $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$ ، خواهیم داشت:

$$\tan x - \cot x = 6 \rightarrow -2 \cot 2x = 6 \rightarrow \tan 2x = \frac{-1}{3}$$

(مسابان - مثیثات - صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱