



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۰۱- اگر α عدد گنگ باشد، در این صورت کدام یک از اعداد زیر ممکن است گنگ نباشد؟

(۲) $\frac{2}{\alpha}$

(۱) $\sqrt{3\alpha+2}$

(۴) $\alpha^2 + 4\alpha$

(۳) $\frac{\alpha-1}{2\alpha+3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- مجموعه‌های $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-1| > -3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |2x-3| < 2\}$ را در نظر بگیرید. اگر

مجموعه‌ی $A \cap B$ یک همسایگی متقارن به شعاع r باشد، مقدار r کدام است؟

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{5}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- دنباله ی $\left\{ \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} \right\}$ کدام وضعیت زیر را دارد؟

(۱) صعودی و کران دار

(۲) نزولی و کران دار

(۳) غیریکنوا و کران دار

(۴) غیریکنوا و بی کران

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر $a_n = \frac{2n \tan^{-1}(-n)}{\pi n + 5}$ باشد، آن گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 + a_{n+1} + 2a_{2n})$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۴

(۳) ۳

(۴) ۳۶

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- کدام دنباله واگرا به $+\infty$ است؟

(۱) $\{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}\}$

(۲) $\{\sqrt{5n+1} - \sqrt{3n+2}\}$

(۳) $\{\sqrt{n^2 + 5n} - n\}$

(۴) $\{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- حد دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = n^2(\ln(n^2 + 2) - \ln n^2)$ وقتی $n \rightarrow +\infty$ کدام است؟

$$(\ln x = \log_e^x)$$

(۲) e^2

(۱) e

(۴) 2

(۳) 1

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $(n \geq 4)$ $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$ و $f(x) = x \left[\frac{2}{x} \right]$ آن گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ کدام است؟ ([])، علامت جزء

صحیح است.

(۲) 1

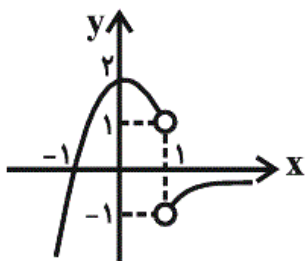
(۱) صفر

(۴) وجود ندارد.

(۳) 2

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$ کدام است؟



(۲) 1

(۱) 2

(۴) صفر

(۳) -1

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- در بازه‌ی $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ همواره $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} \leq \frac{\tan \pi x}{1-x} \leq g(x)$ است، اگر $\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) - \frac{\tan \pi x}{1-x}) = 0$ باشد، آن‌گاه

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{\pi+1}{\pi-1}$

(۳) $\frac{\pi-1}{\pi+1}$ (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- مقدار حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot(\frac{\tan^{-1} x}{x})$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot(\frac{\tan^{-1} x}{x})$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(۱) $+\infty$ ، $+\infty$ (۲) $-\infty$ ، $-\infty$

(۳) $-\infty$ ، $+\infty$ (۴) $+\infty$ ، $-\infty$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = +\infty$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3bx-2}{x^2+ax}$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۱ (۴) $\frac{9}{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، حد ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & ; [x] \text{ فرد} \\ 3x-2 & ; [x] \text{ زوج} \end{cases}$ در چند نقطه‌ی صحیح حد دارد؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- تابع f در بازه‌ی $(0,2)$ پیوسته است. با توجه به اطلاعات جدول زیر، معادله‌ی $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ در

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-۱	۲	-۱

بازه‌ی $(0,2)$ حداقل چند جواب دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- به ازای چند مقدار برای a ، تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + ax}$ دارای ۲ مجانب قائم است؟

(۲) ۲

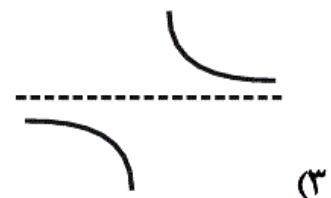
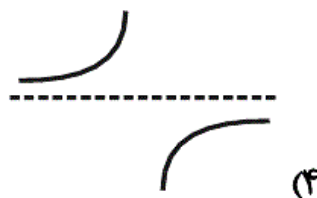
(۱) ۴

(۴) صفر

(۳) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- نمودار تابع $y = x \tan \frac{1}{x}$ در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر مجانب مایل $y = (3x + 1)\sqrt{\frac{ax + 1}{x + 2}}$ با خط $y = 2x + 5$ موازی باشد، مقدار عددی a کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{9}{4}$

(۳) $\frac{4}{9}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- کدام گزینه درباره‌ی پیوستگی توابع f و g با فرض $D_f = D_g = R$ همواره درست است؟

(۱) اگر f و g در $x = a$ پیوسته باشند، $f \circ g$ نیز در a پیوسته است.

(۲) اگر $f \circ g$ در $x = a$ پیوسته باشد، f و g نیز در a پیوسته هستند.

(۳) اگر f در $x = a$ پیوسته و g در $x = a$ ناپیوسته باشد، $\frac{g}{f}$ در a ناپیوسته است.

(۴) اگر f در $x = a$ پیوسته و g در $x = a$ ناپیوسته باشد، $\frac{f}{g}$ در a ناپیوسته است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر تابع $f(x) = (x^2 + 1)[2\sqrt{x}]$ در بازه‌ی $(k, 8)$ دارای دو نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، کمترین مقدار k

کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

(۲) $2/25$

(۱) 2

(۴) $2/75$

(۳) $2/5$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- تابع f بر بازه‌ی $[-2, 5]$ پیوسته و وارون پذیر است. اگر بدانیم $f(-2) = 4$ و $f(5) = -1$ ، آنگاه کدام

گزینه در مورد وارون تابع f صحیح است؟

(۱) بر بازه‌ی $[-1, 4]$ اکیداً صعودی و پیوسته است.

(۲) بر بازه‌ی $[-1, 4]$ اکیداً نزولی و پیوسته است.

(۳) لزوماً پیوسته نیست.

(۴) لزوماً یکنوا نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- سه نقطه‌ی $A(2,0,-1)$ ، $B(1,1,-2)$ و M داده شده‌اند. اگر $3\overline{AM} = 4\overline{BM}$ ، آنگاه حاصل

$|\overline{AM}| + |\overline{BM}|$ چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۱۴ (۲)

۱۵ (۱)

۷ (۴)

۹ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- قرینه‌ی بردار $a = 3i + j - 4k$ نسبت به راستای بردار $b = i - j - k$ کدام بردار است؟

$i - 5j$ (۲)

$i + 5j$ (۱)

$4i + j - 3k$ (۴)

$4i - j + 3k$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- دو بردار a و b ، اضلاع یک متوازی الاضلاع هستند. اگر $|a| = 6$ ، $|b| = 4$ و زاویه‌ی بین دو قطر متوازی

الاضلاع 60° باشد، آنگاه مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

$20\sqrt{3}$ (۲)

$5\sqrt{3}$ (۱)

$15\sqrt{3}$ (۴)

$10\sqrt{3}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(1, 2, 1)$ نسبت به خط $D: (\frac{x+1}{3} = y + 2, z = 1)$ ، کدام نقطه است؟

(۱) $(-3, 1, 1)$ (۲) $(3, -4, 1)$

(۳) $(4, -3, 1)$ (۴) $(-1, 4, 1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(0, 0, 2)$ از صفحه‌ی $P: 2x + y - 2z = 5$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- طول عمود مشترک خط گذرا بر نقطه‌ی $A(1, -1, 2)$ و موازی بردار $u = (3, -2, 1)$ با محور x ها کدام

است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- نقطه‌ی A به طول ۲ و با عرض مثبت روی دایره‌ی $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 7 = 0$ قرار دارد. معادله‌ی

خط D که از نقطه A بگذرد و بر دایره‌ی C مماس باشد، کدام است؟

$$x + 4y - 6 = 0 \quad (2)$$

$$4x - y + 7 = 0 \quad (1)$$

$$x + 4y + 6 = 0 \quad (4)$$

$$4x - y - 7 = 0 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- معادله‌ی دایره‌ای که دو نقطه‌ی $A = (1, 2)$ و $B = (3, 0)$ دو سر قطری از آن هستند، کدام است؟

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 3 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = -3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- خروج از مرکز یک بیضی که نقاط $F(5, 22)$ و $F'(5, -3)$ کانون‌های آن بوده و از نقطه‌ی $M(-7, 6)$

می‌گذرد، چه قدر است؟

$$\frac{5}{7} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- کانون یک سهمی $F(2, -1)$ است. اگر این سهمی از نقطه‌ی $M(-1, 3)$ عبور کند، خط هادی کدام گزینه

نمی‌تواند باشد؟

(۲) $y = -2$

(۱) $x = 4$

(۴) $y = 8$

(۳) $x = -5$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۴۱- گرافی ساده از مرتبه‌ی ۸، دارای ۱۷ یال است. این گراف حداکثر چند رأس از درجه‌ی یک می‌تواند داشته

باشد؟

(۴) صفر

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- در گراف G ، $q = 21$ ، $\delta = 3$ و $\Delta = 9$ است. اگر تعداد رأس‌های این گراف، حداکثر مقدار ممکن باشد،

آن‌گاه تعداد صفرهای ماتریس مجاورت آن کدام است؟

(۴) ۱۰۰

(۳) ۱۲۷

(۲) ۱۵۴

(۱) ۱۰۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- در گراف ساده‌ی همبند فاقد دور G از مرتبه‌ی ۱۰، با اضافه کردن یک یال بین هر دو رأس دلخواه، فقط

دوری به طول ۳ ایجاد می‌شود. فاصله‌ی بین رئوس متمایز در این گراف، چند مقدار می‌تواند باشد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۴۴- اگر a ، b و c اعداد صحیح بوده و $a|b$ و $a|c$ ، آن گاه چه تعداد از گزاره های زیر همواره درست است؟

- | | |
|------------------------|-------------------|
| الف) $a b^2 + c$ | ب) $a^2 b + c$ |
| ج) $a a^2 + b^2 + c^2$ | د) $a^2 a^2 + bc$ |
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- اگر عدد a مضرب ۱۸ و عدد b مضرب ۱۲ باشد. باقی مانده تقسیم عدد a بر b ، همواره مضرب کدام عدد است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۵ (۱) | ۴ (۲) |
| ۶ (۳) | ۷ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- b یک عدد طبیعی بزرگتر از ۴ است. اگر $A = 2b^6 + 3b^4 + 4b^2$ ، آن گاه مجموع ارقام نمایش عدد A در مبنای b ، چند برابر مجموع ارقام نمایش A در مبنای b^2 است؟

- | | |
|-------|---------------|
| ۱ (۱) | $\frac{1}{2}$ |
| ۲ (۳) | ۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، اعداد اول ، نظریه ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۴۷- اگر $a, b \in \mathbb{N}$ آن گاه حاصل $(a^2, b^2).[a, b], a + b]$ کدام است؟

- | | |
|-------|-----------------|
| ۱ (۱) | $(a, b)(a + b)$ |
| ۳ (۳) | $ab(a + b)$ |
| ۲ (۲) | $[a, b](a + b)$ |
| ۴ (۴) | $(a, b)[a, b]$ |

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- اگر $5x = 7y + 1$ باشد، حاصل $(x - y, x + y)$ کدام است؟ $(x, y \in \mathbb{Z})$

- | | |
|-------------|-----------------|
| ۴ یا ۲ (۱) | ۲ فقط (۲) |
| ۳ فقط ۱ (۳) | ۴ یا ۲ یا ۱ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- عدد طبیعی n دارای ۱۲ مقسوم علیه مثبت است. اگر اعداد $2n$ و $3n$ به ترتیب دارای ۱۵ و ۱۶ مقسوم علیه باشند، آن گاه عدد $30n$ ، چند مقسوم علیه مثبت دارد؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۳۶ | (۲) ۴۰ |
| (۳) ۴۸ | (۴) ۶۰ |

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- چند جفت عدد اول مانند p و q وجود دارد به گونه‌ای که مجموع ارقام q ، سه برابر مجموع ارقام p باشد؟

- | | |
|---------|-------------|
| (۱) صفر | (۲) ۱ |
| (۳) ۲ | (۴) بی‌شمار |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، حد ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۲۱- اگر $A = 0.5243$ ، آن گاه $\frac{9}{10A-5}$ کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۲۷ | (۲) ۳۷ |
| (۳) ۳۸ | (۴) ۳۹ |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- به ازای چه مقادیری از n ، فاصله‌ی جمله‌های دنباله‌ی $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$ از حد دنباله، کوچکتر از $\frac{1}{100}$ خواهد

شد؟

- | | |
|-----------------|------------------|
| (۱) $n \geq 10$ | (۲) $n \geq 25$ |
| (۳) $n \geq 50$ | (۴) $n \geq 100$ |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با شرط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ کدام خاصیت را دارد؟

(۱) بی کران (۲) کراندار - نزولی

(۳) واگرا (۴) همگرا

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- حاصل ضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + \operatorname{sgn} x$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد

جزء صحیح است.

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) -۱ (۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ ، وقتی $x \rightarrow -3$ آنگاه a کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۳

(۳) -۳ (۴) -۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - x \left[\frac{1}{x} \right] \right)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

(۲) -۱

(۱) ۱

(۴) وجود ندارد.

(۳) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) صفر

(۴) وجود ندارد.

(۳) $\sin \frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، پیوستگی ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۲۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} & , |x| > 1 \\ ax + b & , |x| \leq 1 \end{cases}$ همواره پیوسته است، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(۲) $(1, 0)$

(۱) $(0, 1)$

(۴) $(2, 0)$

(۳) $(0, 2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sin(x - [x])\pi$ روی بازه‌ی $(2, 6)$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد

جزء صحیح است.

۱ (۲)

(۱) صفر

۳ (۴)

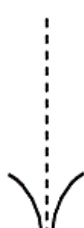
۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{-1 + \cos x}$ در مجاورت $x = 0$ شبیه کدام است؟



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۵۱- چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- کدام گزینه نمی‌تواند مرتبه‌ی گراف منتظمی باشد که اندازه‌ی آن ۹۰ است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- اگر A ماتریس مجاورت درخت T و حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A^2 برابر ۱۲۰ باشد، آنگاه

درخت T حداقل چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۵۴- مربع یک عدد طبیعی فرد به صورت $(5 \cdot ab)_8$ نوشته شده، $a + b$ کدام است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- $\overline{abb}$ یک عدد سه رقمی است. اگر عدد $\overline{abb} + \overline{baa}$ زوج باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a^2 - b^2$ بر ۴ کدام

است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۶- در یک تقسیم، مقسوم ۸۰۲ و خارج قسمت ۱۴ است. مقسوم‌علیه حداقل و حداکثر کدام مقدار می‌تواند باشد؟

۵۷ و ۵۵ (۴)

۵۸ و ۵۴ (۳)

۵۷ و ۵۴ (۲)

۵۸ و ۵۳ (۱)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، اعداد اول ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۵۷- عدد $40! - 41!$ در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

صفر (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۸- اگر $(a,b)=6$ و $ra+sb=96$ آنگاه (r,s) کدام می‌تواند باشد؟

۶ (۱)

۱۲ (۲)

۱۶ (۳)

۱۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۹- به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، دو عدد به صورت‌های $۲۵n+9$ و $۱۱n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

۸۶ (۱)

۸۷ (۲)

۸۹ (۳)

۹۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۶۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ و $ab+[a,b]=72$ ، حاصل $a+b$ کدام است؟

۲۸ (۱)

۱۴ (۲)

۷ (۳)

۲۱ (۴)

شما پاسخ نداده اید

- ۱۰۱

(فریدون ساعتی)

α عدد گنگی است. بنابراین $۳\alpha + ۲$ حتماً گنگ و جذر آن نیز گنگ است،
(گنگ = گویا + گنگ). در ضمن اگر عددی گنگ باشد، وارون آن نیز گنگ است.
پس گزینه‌ی ۲ همواره گنگ است.

گزینه‌ی «۳» نیز گنگ است. زیرا با استفاده از برهان خلف داریم:

$$\frac{\alpha - 1}{2\alpha + 3} \notin Q' \Rightarrow \frac{\alpha - 1}{2\alpha + 3} = x, x \in Q \Rightarrow 2\alpha x + 3x = \alpha - 1$$

$$\alpha(2x - 1) = -3x - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{-3x - 1}{2x - 1}$$

چون x گویا است، پس $\frac{-3x - 1}{2x - 1}$ گویا هست، پس α نیز گویاست که خلاف فرض

$\alpha \in Q'$ می‌باشد. پس $\frac{\alpha - 1}{2\alpha + 3}$ همواره گنگ است.

گزینه‌ی «۴» می‌تواند گویا باشد، زیرا $\alpha^2 + 4\alpha$ را می‌توان یک عدد گویا
فرض کرد که جواب‌های معادله‌ی حاصل اعداد گنگ باشند.

$$\alpha^2 + 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 \pm \sqrt{5}$$

که $-2 + \sqrt{5}$ و $-2 - \sqrt{5}$ اعداد گنگ‌اند.

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌ی ۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

نامعادله‌ی $-3 < |2x-1|$ به ازای تمام اعداد حقیقی برقرار است. پس

$$|2x-3| < 2 \Rightarrow |x-\frac{3}{2}| < 1 \Rightarrow r=1 \quad A \cap B = B \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

(ممد رضا شوکتی بیرق)

$$\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{n+1}-1}{1+\sqrt{n}}} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\sqrt{n}}}$$

با افزایش n ، کسر $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ کاهش و کسر $-\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ افزایش و عبارت

$$1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}} \quad \text{و در نتیجه عبارت} \quad \sqrt{1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}} \quad \text{افزایش می‌یابد. پس دنباله‌ی}$$

داده شده، صعودی است. از طرفی حد دنباله، برابر ۱ است، پس دنباله، همگرا و در

نتیجه، کران‌دار می‌باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۴

۳

۲

۱✓

(حبیب شفیعی)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \tan^{-1}(-n)}{\pi n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \tan^{-1}(-n)}{\pi}$$

$$= \frac{2\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{\pi} = -1$$

با توجه به تعریف زیر دنباله اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 + a_{n+1} + 2a_n) = -1 - 1 - 2 = -4$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ و ۳۷ و ۴۸ تا ۵۰)

۴

۳

۲✓

۱

$$\text{گزینه ی «۱» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

$$\text{گزینه ی «۲» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n+1} - \sqrt{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n} - \sqrt{3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{n}) = +\infty$$

$$\text{گزینه ی «۳» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 5n} - n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2}$$

$$\text{گزینه ی «۴» : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴

۳

۲✓

۱

$$a_n = n^2 (\ln(n^2 + 2) - \ln n^2) = n^2 (\ln(\frac{n^2 + 2}{n^2}))$$

$$= \ln(\frac{n^2 + 2}{n^2})^{n^2} = \ln(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}}$$

$$= \ln(\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}) = \ln e^2 = 2 \underbrace{\ln e}_1 = 2$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴✓

۳

۲

۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 4n} \times \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{n + \sqrt{n^2 - 4n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 + 4n}{n + \sqrt{n^2}} = \frac{4n}{2n} = 2$$

دقت کنید که $\sqrt{n^2 - 4n} < \sqrt{n^2} = n$ بنابراین $n + \sqrt{n^2 - 4n} < 2n$

پس دنباله‌ی مخرج یعنی $n + \sqrt{n^2 - 4n}$ از $2n$ کوچکتر است. پس دنباله‌ی

a_n با مقادیر بیشتر از ۲ به ۲ میل می‌کند. پس داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \left[\frac{2}{x} \right] = 2 \times \left[\frac{2}{2^+} \right] = 2 \times [1^-]$$

$$= 2 \times 0 = 0$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۶۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f \left(\frac{x-1+2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = f \circ f (1^-)$$

$$= f(f(1^-)) = f(1^+) = -1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(g(x) - \frac{\tan \pi x}{1-x} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{1-x}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1-x=t \Rightarrow x=1-t \\ (x \rightarrow 1) \Rightarrow (t \rightarrow 0) \end{array} \right) \quad \text{با تغییر متغیر } 1-x=t \text{ داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi(1-t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi - \pi t)}{t}$$

$$= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \pi t}{t} = \frac{-\pi t}{t} = -\pi$$

$$\xrightarrow[\text{فشرده‌گی}]{\text{طبق قضیه‌ی}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = -\pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (-\pi f(x) + \pi) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + \pi f(x)) = \pi - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi - 1}{\pi + 1}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۶ و ۷۷ و ۸۲ و ۸۳)

۴

۳✓

۲

۱

(رضا نیازی)

-۱۱۰

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos 3x} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-} = \infty - \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos 3x + \cos x}{\cos x \cos 3x} \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{جمع به}} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2(\cos 2x \cos x)}{\cos x \cos 3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{2 \cos 2x}{\cos 3x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

نکته: در رفع ابهام $\infty - \infty$ توابع کسری از مخرج مشترک گیری استفاده می‌کنیم.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۴

۳✓

۲

۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cot\left(\frac{\tan^{-1} x}{x}\right) = \cot\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right) = \cot(0^+) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cot\left(\frac{\tan^{-1} x}{x}\right) = \cot\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}\right) = \cot(0^+) = +\infty$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

(علی یوسفی)

- ۱۱۲

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+ax+b} = +\infty$$

چون حد صورت برابر ۳ است، برای اینکه حاصل حد $+\infty$ باشد، باید $x=1$

$$\Rightarrow x^2+ax+b = (x-1)^2 \quad \text{ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد.}$$

$$x^2+ax+b = x^2-2x+1 \Rightarrow a = -2, \quad b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{9}{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، حد ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

$$\Rightarrow 2n^2 - 1 = 3n - 2 \Rightarrow 2n^2 - 3n + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$n \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \stackrel{\text{زوج}}{=} \lim_{x \rightarrow n^+} 3x - 2 = 3n - 2 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \stackrel{\text{فرد}}{=} \lim_{x \rightarrow n^-} (2x^2 - 1) = 2n^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n^2 - 1 = 3n - 2 \Rightarrow 2n^2 - 3n + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \text{ زوج نیست} \\ n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس این تابع در $x = 1$ حد دارد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۵۱ تا ۶۴)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

(کالظم ابلالی)

-۱۱۷

تابع $g(x) = f(x) - \cos \frac{\pi}{x}$ را در نظر می‌گیریم. جدول مقادیر تابع به شکل

روبه‌روست:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	$g(\frac{1}{3})g(\frac{1}{2}) < 0$
	$\frac{1}{2}$	-۲	۳	$-\frac{1}{2}$	
g(x)	$\frac{1}{2}$	-۲	۳	$-\frac{1}{2}$	$g(\frac{1}{2})g(1) < 0$
	$\frac{1}{2}$	-۲	۳	$-\frac{1}{2}$	
					$g(1)g(\frac{3}{2}) < 0$

از آن‌جا که تابع g پیوسته است، پس تابع g در هر کدام از

بازه‌های $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ؛ $(\frac{1}{2}, 1)$ و $(1, \frac{3}{2})$ حداقل یک ریشه دارد. پس g در بازه‌ی

$(0, 2)$ حداقل ۳ ریشه دارد. در نتیجه $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$ حداقل ۳ جواب دارد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\mathbf{x}^r + \mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

$$\Rightarrow x(x^2 + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 : x = 0 & \Rightarrow \text{فقط یک ریشه} \\ a < 0 : x = 0, x = \pm\sqrt{-a} & \Rightarrow \text{منحرف سه ریشه دارد.} \end{cases}$$

$$\text{ریشه‌های صورت: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$a = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ دو مجانب قائم}$$

$$a = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \text{ دو مجانب قائم}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴

3

☒ 2 ✓

1

(جواد اسحاق)

-119

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$ چون $y = 1$ تابع افقی تابع $x = \infty$ است، محاسبه کنیم:

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x}=u} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که $u \rightarrow 0^+$ باشد، $\tan u > u$ است، پس عبارت از یک بیشتر است.

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\tan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{1}{x}=u} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\tan u}{u}$$

می‌دانیم که $u \rightarrow 0^-$ باشد، $\tan u < u$ است، پس:

$$\tan u < u \xrightarrow[u < 0]{\div u} \frac{\tan u}{u} > 1$$

از طرفی تابع از یک بیشتر است. پس تابع در $\pm\infty$ با مقادیر بیشتر از یک به آن نزدیک می‌شود.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۴)

۲

3

2

☒

وقتی مجانب مایل با خطی موازی است، یعنی شیب مجانب مایل با شیب خط برابر

است. شیب مجانب مایل هم که از رابطه‌ی $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ به دست می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)\sqrt{\frac{ax+1}{x+2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x\sqrt{a}}{x} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{a} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{9}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، پیوستگی، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

با فرض $D_f = D_g = R$ ، اگر تابع f در $x = a$ پیوسته و g ناپیوسته باشد،

توابع $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ ($f(a) \neq 0$) در a ناپیوسته ولی توابع $\frac{f}{g}$ و $f \times g$ ممکن

است پیوسته یا ناپیوسته باشد، پس گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مثال نقض گزینه‌ی «۱»: $f = [x + \frac{1}{2}]$ و $g = x - \frac{1}{2}$ در $x = 1$ پیوسته‌اند

ولی fog در $x = 1$ پیوسته نیست.

مثال نقض گزینه‌ی «۲»: اگر $f(x) = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ و

$g(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$ ، fog در صفر پیوسته است ولی f و g در صفر

پیوسته نیستند.

مثال نقض گزینه‌ی «۴»: $f = x - 2$ در $x = 2$ پیوسته و $g(x) = [x]$

ناپیوسته اما $\frac{f}{g}$ پیوسته است.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۹۳ تا ۹۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$f(x) = (x^2 + 1)[2\sqrt{x}]$$

$$k < x < 8 \Rightarrow \sqrt{k} < \sqrt{x} < \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{k} < 2\sqrt{x} < 4\sqrt{2}$$

۵/۶

بین $2\sqrt{k}$ و $4\sqrt{2}$ باید دو عدد صحیح داشته باشیم تا دو نقطه ناپیوستگی ایجاد شود بنابراین کمترین مقدار $2\sqrt{k}$ برابر ۳ می‌باشد.

$$2\sqrt{k} = 3 \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{9}{4} = 2.25$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌ی ۱۰۰)

۴

۳

۲✓

۱

(معمدمصطفی ابراهیمی)

-۱۱۶

با توجه به این که f بر بازه‌ی داده شده پیوسته و وارون‌پذیر است، بنابراین در

این بازه لزوماً اکیداً یکنواست. با توجه به این که $f(5) = -1 < f(-2) = 4$

بنابراین در بازه‌ی $[-2, 5]$ تابع f اکیداً نزولی است. می‌دانیم اگر تابع پیوسته

f در بازه‌ی $[a, b]$ نزولی اکید و پیوسته باشد، آن‌گاه f^{-1} در بازه‌ی

$[f(b), f(a)]$ نزولی اکید و پیوسته خواهد بود. پس وارون تابع f در بازه‌ی

$[f(5), f(-2)] = [-1, 4]$ اکیداً نزولی و پیوسته است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، بردار - ۱۳۹۵۱۰۲۴

نقطه‌ی مجهول را برابر با $M(x, y, z)$ می‌گیریم، حال باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x-2, y, z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x-1, y-1, z+2) \end{cases} \xrightarrow{3\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{BM}}$$

$$(3x-6, 3y, 3z+3) = (4x-4, 4y-4, 4z+8)$$

$$\longrightarrow (x, y, z) = (-2, 4, -5)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (-4, 4, -4) \\ \overrightarrow{BM} = (-3, 3, -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AM}| = 4\sqrt{3} \\ |\overrightarrow{BM}| = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{BM}| = 7\sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۷ تا ۱۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

ابتدا a' تصویر a را نسبت به راستای b تعیین می‌کنیم.

$$a \cdot b = (3, 1, -4) \cdot (1, -1, -1) = 3 - 1 + 4 = 6$$

$$|b| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{6}{(\sqrt{3})^2} b = 2b \Rightarrow a' = 2(1, -1, -1) = (2, -2, -2)$$

سپس، a'' قرینه‌ی بردار a را نسبت به راستای بردار b به دست می‌آوریم،

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a'' = 2(2, -2, -2) - (3, 1, -4) = (1, -5, 0)$$

$$\Rightarrow a'' = i - 5j$$

(هندسه تحلیلی - بردار؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳

۲✓

۱

قطرهای متوازی الاضلاع، بردارهای $a + b$ و $a - b$ هستند. بنابه فرض زاویه‌ی

بین آنها 60° است. پس:

$$\tan 60^\circ = \frac{|(a + b) \times (a - b)|}{(a + b) \cdot (a - b)}$$

$$\Rightarrow |a \times a - a \times b + b \times a - b \times b| = \sqrt{3}(|a|^2 - |b|^2)$$

$$|-2a \times b| = \sqrt{3}(|a|^2 - |b|^2) \Rightarrow |a \times b| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|a|^2 - |b|^2)$$

$$|a \times b| = \text{مساحت متوازی الاضلاع بنا شده روی } a \text{ و } b$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(|a|^2 - |b|^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(36 - 16) = 10\sqrt{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار؛ صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، خط و صفحه - ۱۳۹۵۱۰۲۴

$$\text{معادله‌ی پارامتری خط } D \text{ به صورت } \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ است. با در نظر گرفتن}$$

نقطه‌ی H روی این خط و با فرض این که H پای عمود رسم شده از A بر خط D باشد، داریم:

$$\overrightarrow{AH} \cdot \mathbf{u}_D = 0 \Rightarrow (3t - 2, t - 4, 0) \cdot (3, 1, 0) = 0$$

$$\Rightarrow 9t - 6 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$$

بنابراین تصویر A روی خط D ، نقطه‌ی $H(2, -1, 1)$ است. با فرض این که

A' قرینه‌ی A نسبت به خط D باشد، آن گاه:

$$A' = 2H - A = 2(2, -1, 1) - (1, 2, 1) = (3, -4, 1)$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۴

۳

۲✓

۱

(علیرضا شریف فطیبی)

۱۳۵-

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P را با D نشان دهیم، آن گاه داریم:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(0) + 1(0) - 2(2) - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

۴

۳✓

۲

۱

بردار هادی خط مورد نظر، $u = (3, -2, 1)$ و بردار هادی محور X ها،

$i = (1, 0, 0)$ است. در این صورت بردار هادی عمود مشترک این دو خط برابر

است با: $u' = u \times i = (0, 1, 2)$

با در نظر گرفتن نقطه‌ی A روی خط و نقطه‌ی O (مبدأ مختصات) روی محور

X ها داریم:

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot u'|}{|u'|} = \frac{|0 - 1 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌ی ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

$$C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 17 \Rightarrow x=2, y>0 \Rightarrow (y+3)^2 = 16$$

$$y=1 \Rightarrow A(2,1)$$

$$\Rightarrow \text{مرکز دایره } O'(1, -3)$$

خط مماس D در نقطه A بر شعاع $O'A$ عمود است،

$$\Rightarrow \text{شیب } O'A: m = \frac{1+3}{2-1} = 4 \Rightarrow \text{شیب } D = -\frac{1}{4}$$

$$D: (y-1) = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow D: x + 4y - 6 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲✓

۱

(علیرضا سیف)

-۱۳۸

$$\text{مرکز} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1)$$

$$\text{شعاع} = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8} = \sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = -3$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳✓

۲

۱

$$M \begin{vmatrix} -7 \\ 6 \end{vmatrix} \quad F \begin{vmatrix} 5 \\ 22 \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} 5 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$c = 12/5 = |FF'| = 25 \Rightarrow c = 12/5$$

$$|MF| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

$$|MF'| = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = 15$$

$$|MF| + |MF'| = 2a \Rightarrow 2a = 20 + 15 = 35 \Rightarrow a = 17/5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12/5}{17/5} = \frac{12}{17}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

(کیوان دارابی)

-۱۴۰

فاصله‌ی M از کانون با فاصله‌ی M از خط هادی برابر است. بنابراین:

$$|MF| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

حال خط هادی نیز باید از M به فاصله‌ی ۵ باشد.

در گزینه‌ی ۳، فاصله‌ی نقطه‌ی $M(-1, 3)$ از خط $x = -5$ ، برابر ۴ است و در نتیجه شرط فوق برقرار نیست.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳✓

۲

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۱۰۲۴

می‌دانیم که بیش‌ترین اندازه در گراف از مرتبه‌ی p با توجه به نابرابری

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{با } 0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{برابر است که در گراف‌های}$$

کامل K_p پدید می‌آید. برای اینکه تعداد رأس‌های با درجه‌ی کم‌تر، بیش‌تر

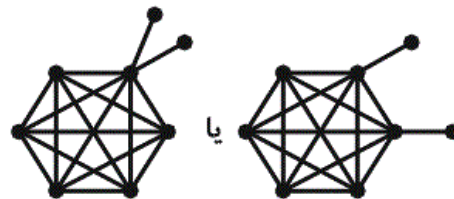
شود سعی می‌کنیم یک گراف کامل که اندازه‌ی آن بیش‌ترین نزدیکی را به تعداد

ثابت یال‌ها داشته باشد ایجاد کنیم و سپس تکلیف رأس‌های باقی‌مانده را روشن

می‌نماییم. در اینجا، بهتر است یک گراف K_6 که تعداد یال‌هایش

$$\frac{6(6-1)}{2} = 15 \quad \text{است ایجاد کنیم و سپس دو رأس باقی‌مانده را به یکی ازدو}$$

شکل زیر، از درجه‌ی یک رسم نماییم:



(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۴

۳

۲

۱✓

(مسین فزایی)

۱۴۲-

با توجه به رابطه‌ی $\sum \deg v_i = 2q$ ، این گراف می‌تواند ۱۱ رأس از درجه‌ی

$$3 \text{ و یک رأس از درجه‌ی } 9 \text{ داشته باشد.} \quad 11 \times 3 + 1 \times 9 = 42$$

بنابراین حداکثر مقدار p ، برابر ۱۲ است و داریم:

$$p^2 - 2q = 12^2 - 42 = 102 = \text{تعداد صفرهای ماتریس مجاورت}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف: صفحه‌های ۱۱، ۲۰ و ۲۱)

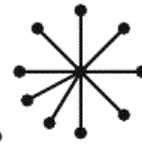
۴

۳

۲

۱✓

می‌دانیم گراف همبند فاقد دور، درخت است، از طرفی چون با اضافه کردن یک یال بین هردو رأس دلخواه در این درخت، فقط دوری به طول ۳ ایجاد می‌شود.



پس این درخت به شکل می‌باشد و در این حالت فاصله بین هر رأس درجه‌ی $\min$ با رأس درجه‌ی $\max$ برابر یک و فاصله‌ی بین هر ۲ رأس درجه‌ی $\min$ برابر با ۲ است. پس ۲ مقدار متمایز برای فاصله‌ی بین رئوس پیدا می‌شود.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف؛ صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

گزاره «الف»، «ج» و «د» درست هستند.

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a \mid b^2 \\ a \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid b^2 + c \quad \text{(الف)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a \mid b^2 \\ a \mid c \Rightarrow a \mid c^2 \\ a \mid a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{(ج)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 \mid bc \\ a^2 \mid a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 \mid a^2 + bc \quad \text{(د)}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$a = ۱۸k, b = ۱۲q$$

$$a = bq' + r \Rightarrow ۱۸k = ۱۲qq' + r$$

$$\Rightarrow r = ۱۸k - ۱۲qq' = ۶(۳k - ۲qq')$$

$$\Rightarrow r = ۶m \Rightarrow ۶ | r$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(مهمدر علی نادرپور)

$$A = ۲b^۶ + ۳b^۴ + ۴b^۲ = ۲b^۶ + ۰b^۵ + ۳b^۴ + ۰b^۳ + ۴b^۲ + ۰b + ۰$$

$$A = (۲۰۳۰۴۰۰)_b \Rightarrow$$

$$b \text{ در مبنای } A = \text{مجموع ارقام نمایش} = ۲ + ۰ + ۳ + ۰ + ۴ + ۰ + ۰ = ۹$$

$$A = ۲b^۶ + ۳b^۴ + ۴b^۲ = ۲(b^۲)^۳ + ۳(b^۲)^۲ + ۴(b^۲)^۱ + ۰$$

$$= (۲۳۴۰)_{b^۲}$$

$$\Rightarrow b^۲ \text{ در مبنای } A = \text{مجموع ارقام نمایش} = ۲ + ۳ + ۴ + ۰ = ۹$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، اعداد اول ، نظریه اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

$$(a', b') = ۱ \Rightarrow (\underbrace{a'b'}_c, \underbrace{a' + b'}_d) = ۱ \Rightarrow [c, d] = |cd|$$

$$\Rightarrow [a'b', a' + b'] = a'b'(a' + b') \Rightarrow d^۳[a'b', a' + b']$$

$$= d^۳a'b'(a' + b') = da'.db'.d(a' + b') = ab(a + b)$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ و ۴۵ و ۴۶)

۴

۳✓

۲

۱

$$5x = 7y + 1 \Rightarrow 5x - 7y = 1 \Rightarrow (x, y) = 1$$

بنابراین x و y هر دو نمی‌توانند زوج باشند. همچنین با توجه به رابطه‌ی $5x = 7y + 1$ ، بدیهی است که x و y هر دو فرد نیستند. پس از میان x و y ، یکی زوج و دیگری فرد است. در این صورت داریم: $(x - y, x + y) = 1$ تذکر: اگر $(x, y) = 1$ و $(x + y, x - y) = d$ ، آن‌گاه:

$$\left. \begin{array}{l} d \mid x + y \\ d \mid x - y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \mid 2x \\ d \mid 2y \end{array} \right. \Rightarrow d \mid 2(x, y) \Rightarrow d \mid 2$$

در حالتی که x و y هر دو فرد باشند، $d = 2$ و در غیراین صورت $d = 1$ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۴)

۴

۳✓

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد n را با $D(n)$ نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$D(n) = 12 = 6 \times 2 = 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 2$$

$$D(2n) = 15 = 5 \times 3$$

با توجه به مقدار $D(2n)$ و مقایسه‌ی آن با $D(n)$ می‌توان دریافت کرد که عدد ۲، یکی از عامل‌های اول عدد n است و عدد n را می‌توان به صورت $n = 2^3 \times p^2$ نوشت.

$$D(3n) = 16 = 8 \times 2 = 4 \times 4$$

از طرفی داریم:

با توجه به توضیحات قبلی، واضح است که حالت 8×2 امکان‌پذیر نیست و

$$p = 3 \text{ می‌باشد. یعنی } n = 2^3 \times 3^2.$$

$$D(3 \cdot n) = D(3 \cdot 2^3 \times 3^2) = D(2^4 \times 3^3 \times 5) = 5 \times 4 \times 2 = 40.$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳

۲✓

۱

اگر مجموع ارقام q ، سه برابر مجموع ارقام عدد اول p باشد، آنگاه q قطعاً بر ۳ بخش پذیر است، پس q عدد اول نیست. بنابراین هیچ دو عدد اولی با مشخصات مورد نظر وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۴

۳

۲

۱✓

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال - گواه، حد، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

۱۲۱-

(آزمون کانون ریاضی - ۸۷)

$$0.\overline{5243} = A \rightarrow 10 \cdot A = 5 + 0.\overline{243} \rightarrow 10 \cdot A - 5 = 0.\overline{243}$$

$$10 \cdot A - 5 = \frac{243}{999} = \frac{27}{111} \rightarrow \frac{1}{10 \cdot A - 5} = \frac{111}{27} \Rightarrow \frac{9}{10 \cdot A - 5} = \frac{111}{3} = 37$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳

۲✓

۱

(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)

۱۲۲-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} = .$$

بنابراین باید $\frac{1}{100} < |a_n - 0|$ باشد، پس:

$$\left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n}{n^2 + 1} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{n^2 + 1}{n} > 100$$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{n} > 100 \Rightarrow n \geq 100$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴✓

۳

۲

۱

در دنباله‌ی $\{a_n\}$ با شرط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ جملات متوالی آن

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

چنین‌اند:

اولاً با روش استقراء ریاضی برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_n < 2$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 2$$

زیرا:

$$a_k < 2 \rightarrow a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2 \times 2} = 2$$

پس دنباله کران‌دار است.

ثانیاً اعداد دنباله به ترتیب بزرگ می‌شوند:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}}$$

پس $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ و دنباله صعودی است. در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و

کران‌دار، یعنی همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۴۱)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

به‌طور غیر رسمی وقتی $x \rightarrow 0^+$ به جای x ، در تابع 0^+ قرار می‌دهیم، به طریق

مشابه وقتی $x \rightarrow 0^-$ به جای x ، در تابع 0^- قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^+] + \operatorname{sgn}(0^+) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^-] + \operatorname{sgn}(0^-) = -1 - 1 = -2$$

$$= (-2)(1) = -2 \text{ حاصل ضرب حد چپ و راست}$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۹ تا ۷۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} \quad (\text{حد ابهام } \frac{0}{0} \text{ دارد.})$$

صورت و مخرج را در مزدوج عبارت مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - (5x + 16)} \times \frac{1 + \sqrt{5x + 16}}{1}$$

۴ ✓

۳

۲

۱

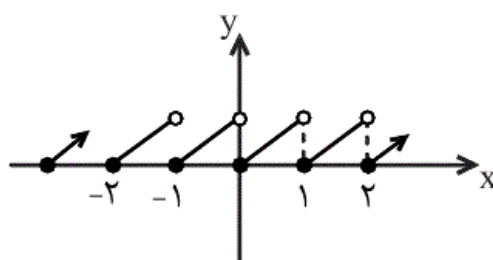
(کتاب آبی - سوال ۱۳۸۴)

-۱۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - x \left[\frac{1}{x} \right] \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right)$$

با فرض $\frac{1}{x} = t$ خواهیم داشت:

$$= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (t - [t])$$



با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x - [x]$ ، از آنجایی که این تابع متناوب است، لذا وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، حد وجود ندارد.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌ی ۱۶ - تمرین ۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

با استفاده از دستور $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$ خواهیم

داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$$

گویا شده‌ی کسر $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$ به صورت $\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$ است، چون

حد این کسر وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، برابر صفر است، پس حد سینوس آن نیز صفر بوده و

چون عبارت $\cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ کران‌دار است، پس حاصل حد برابر صفر

است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌ی ۱۲۰ - تمرین ۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، پیوستگی ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۱۰۲۴

ضابطه‌ی پایین چند جمله‌ای است، پس در دامنه‌ی خود پیوسته است، برای آن که تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد کافی است در مرز ناحیه‌ها یعنی $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته باشد.
در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 2 \Rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + b = a + b = f(1)$$

در $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (ax + b) = -a + b = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 2$$

$$\Rightarrow -a + b = 2 \quad (2)$$

از حل (1) و (2) با هم خواهیم داشت:

$$b = 2 \text{ و } a = 0 \Rightarrow (a, b) = (0, 2)$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

-۱۲۹

می‌دانیم تابع $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، لذا برای بررسی پیوستگی این تابع، باید پیوستگی تابع را در سه نقطه‌ی ۳، ۴ و ۵ بررسی کنیم. به عنوان مثال در $x = 3$ داریم:

$$f(3) = \sin(3 - [3])\pi = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin(x - [x])\pi = \sin(3^+ - [3^+])\pi = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sin(x - [x])\pi = \sin(3^- - [3^-])\pi = \sin \pi = 0$$

تابع در نقطه‌ای به طول ۳ پیوسته است، برای هر نقطه‌ی x که عددی صحیح باشد نیز تابع پیوسته خواهد بود، بنابراین تابع در بازه‌ی $(2, 6)$ پیوسته است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲ و ۱۰۰)

۴

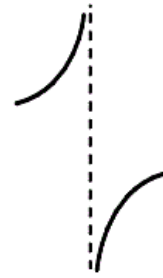
۳

۲

۱ ✓

$x = 0$ ریشه‌ی مخرج است، بنابراین باید حد تابع را در $x = 0$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{-x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x}$$



بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

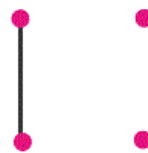
ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۱۰۲۴

(کتاب آبی - سؤال ۲۵۲)

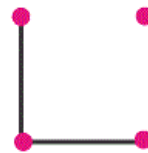
حالت‌های مختلف را رسم می‌کنیم.



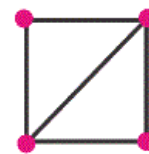
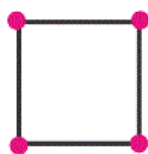
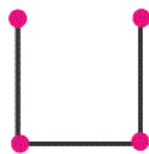
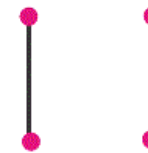
$q = 0$



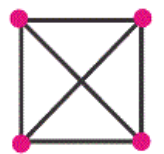
$q = 1$



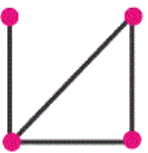
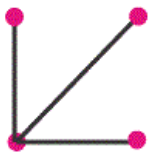
$q = 2$



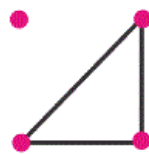
$q = 5$



$q = 6$



$q = 4$



$q = 3$

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی گراف: صفحه‌های ۵ تا ۷ و ۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

در هر گراف r - منتظم از مرتبه p و اندازه q ، رابطه $pr = 2q$ برقرار است که براساس فرض مسأله $q = 90$ و در نتیجه $pr = 180$ خواهد بود. پس 180 بر p بخش پذیر است. ضمن آن که r باید در شرط $0 \leq r \leq p-1$ صدق کند. اگر $p = 12$ باشد، آنگاه $r = 15$ خواهد بود که در شرط $0 \leq r \leq p-1$ صدق نمی کند. ولی به ازای مقادیر 15 ، 18 و 20 برای p ، مقادیر r به ترتیب 12 ، 10 و 9 به دست می آید که همگی قابل قبول هستند.

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف؛ صفحه های ۱۱ و ۱۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری ریاضی - ۸۴)

برای آن که درخت، حداقل رئوس درجه 1 را داشته باشد باید Δ را کم ترین مقدار در نظر بگیریم و تعداد رئوس درجه 2 را تا می توانیم زیاد کنیم پس:

$$120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times \dots \times 1$$

$$1 = 2 + 1 \times (5 - 2) + 1 \times (3 - 2) = 6 = \text{تعداد رئوس درجه } 1$$

(ریاضیات گسسته - نظریه گراف؛ صفحه های ۱۷ تا ۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، کلیات و تقسیم پذیری ، نظریه اعداد - ۱۳۹۵۱۰۲۴

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است پس $b = 1$

$$(5001)_8 \leq (50a1)_8 \leq (5071)_8$$

$$2561 \leq (50a1)_8 \leq 2617 \Rightarrow 2561 \leq (51)^2 = 2601 \leq 2617$$

$$\begin{array}{r} 2601 \\ 1 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 325 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 40 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 5 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 2601 = (5051)_8 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$\overline{abb} + \overline{baa} = 2k \Rightarrow a + b = 2k'$$

بنابراین a و b یا هر دو زوجند یا هر دو فرد.

$$a \text{ و } b \text{ هر دو زوج} : \begin{cases} a = 2t \\ b = 2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 \\ b^2 = 4t'^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q$$

$$a \text{ و } b \text{ هر دو فرد} : \begin{cases} a = 2t + 1 \\ b = 2t' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 + 4t + 1 \\ b^2 = 4t'^2 + 4t' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q''$$

پس باقی مانده‌ی $a^2 - b^2$ بر ۴، صفر است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱✓

(کتاب آبی - سؤال ۱۴۹۲)

۱۵۶-

$$802 = 14b + r \xrightarrow{0 \leq r < b} \begin{cases} r = 802 - 14b \geq 0 \Rightarrow b \leq 57 \\ r = 802 - 14b < b \Rightarrow b \geq 54 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 54 \leq b \leq 57$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، اعداد اول، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵/۰۲/۲۴

(آزاد ریاضی - ۷۲)

۱۵۷-

$$41! - 40! = 41 \times 40! - 40! = 40!(41 - 1) = 40! \times 40.$$

در سمت راست عدد $40!$ ، ۹ صفر وجود دارد، در سمت راست 40 نیز یک صفر

وجود دارد، پس در سمت راست $40 \times 40!$ ، ۱۰ صفر وجود دارد.

$$40 \mid \underline{5}$$

$$8 \mid \underline{5} \Rightarrow 8 + 1 = 9 : 40! \text{ سمت راست}$$

۱

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳✓

۲

۱

$$(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6a', b = 6b'$$

$$ra + sb = 96 \Rightarrow 6ra' + 6sb' = 96$$

$$\Rightarrow ra' + sb' = 16 \Rightarrow (r, s) | 16$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۱۶، مقسوم علیه ۱۶ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(سراسری ریاضی - ۱۹)

-۱۵۹

$$\left. \begin{array}{l} d | 25n + 9 \Rightarrow d | 25 \times 11n + 99 \\ d | 11n + 4 \Rightarrow d | 25 \times 11n + 100 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$$

پس همواره دو عدد نسبت به هم اول هستند و در نتیجه به ازای هر ۹۰ عدد طبیعی

دو رقمی، رابطه برقرار است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} = \frac{a'}{b'} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{(a',b')=۱} a' = ۳, b' = ۴$$

$$ab + [a, b] = ۷۲ \Rightarrow a'b'd^۲ + a'b'd = ۷۲$$

$$۱۲d^۲ + ۱۲d - ۷۲ = ۰ \Rightarrow ۱۲(d^۲ + d - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} d = -۳ \\ d = ۲ \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$a + b = d(a' + b') = ۲ \times ۷ = ۱۴$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ و ۴۶ و ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

www.kanoon.ir