سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

https://telegram.me/riazisara (@riazisara)

کانون فرهنگی آموزش قلم‌چی
دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۲۱- مجموع مربعات ۸ عدد طبیعی بر ۳ بخش‌پذیر است. حداقل چه تعداد از آن‌ها، مضرب ۳ می‌باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در اثبات حکم «عبارت n^3+11n به‌ازای تمامی مقادیر طبیعی n بر ۶ بخش‌پذیر است.» به روش استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی مورداستفاده قرار می‌گیرد؟

۱) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲) حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است.

۳) تفاضل مربعات دو عدد طبیعی متوالی، عددی فرد است.

۴) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در اثبات نامساوی $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطه‌ی بدیهی به‌دست آمده کدام است؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

۱) $(x+y)^2>0$ ۲) $x^2+y^2>0$

۳) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$ ۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- در اثبات حکم $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\leq 2\sqrt{x+1}$ به روش برهان خلف، تناقض پدید آمده کدام یک از نامساوی‌های زیر است؟

۱) $1>0$ ۲) $x>x$

۳) $\sqrt{x}<0$ ۴) $x<0$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر مجموع مربعات n عدد طبیعی متوالی با شروع از یک، برابر $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ باشد، حاصل $12^2+14^2+16^2+\ldots+30^2$ کدام است؟

۱) ۴۹۶۰ ۲) ۴۷۴۰

۳) ۱۵۴۰ ۴) ۲۰۲۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- اگر x عدد صحیح فرد و y عدد صحیح زوج باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $(x+y)^2 - 1$ همواره بـر آن بخش‌پذیر است، کدام‌یک از اعداد زیر می‌باشد؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، یک قضیه‌ی کلی است؟

۱) حاصل‌ضرب هر دو عدد اول بزرگ‌تر از ۳، به‌صورت $6k+5$ است.
۲) اگر $x+y$ گنگ باشد، آن‌گاه x و y گنگ هستند.
۳) از هر نقطه‌ی خارج یک خط در فضا، دقیقاً یک خط موازی با آن خط می‌توان رسم کرد.
۴) اگر توان دوم یک عدد حقیقی از خودش بزرگ‌تر باشد، آن عدد از یک بزرگ‌تر است.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- ۳۷ عدد حقیقی را به‌طور تصادفی در بازه‌ی $(0,4)$ انتخاب می‌کنیم. جزء صحیح حداقل چه تعداد از این اعداد انتخابی با هم برابرند؟

۱) ۱۱
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- فرض کنید A، مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۵ و بخش‌پذیر بر ۳ باشد. اگر هر زیر مجموعـه‌ی k عضوی از مجموعه‌ی A، دست کم دارای دو عضو با مجموع ۳۳ باشد، آن‌گاه کم‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- اگر ۱۷ نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع واحد انتخاب کنیم، در این‌صورت دست کم ۲ نقطه بین آنها وجود دارد که حداکثر فاصله‌ی آنها برابر x است. x کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
۳) $\frac{1}{16}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{16}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۱- اگر به ازای $x \in (0, 0/1)$ ، $\frac{\sin^2 x}{x^2} < f(x) + 2 < \frac{\sin x}{x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{x \to 0^+} [f(x)]$ کدام است؟

([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) -3
۳) -2
۴) -1

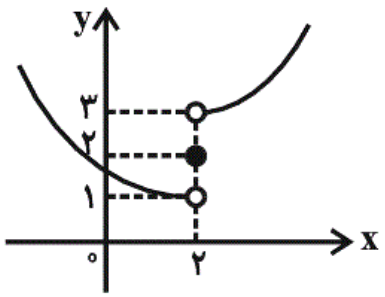
شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر f تابعی فرد باشد و داشته باشیم $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1$ ، حاصل $2\lim_{x \to (-2)^-} f(x) - \lim_{x \to (-2)^+} f(x)$ کدام است؟

۱) -1
۲) -5
۳) ۵
۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر نمودار تابع f به‌صورت شکل زیر باشد و $a_n = 2 + \frac{\tan(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})}{n+1}$ ، آن‌گاه $\lim_{n \to \infty} (f(a_n) + f(a_{n+1}))$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۸۴- حد کسر $\lim_{x \to 3^+} \frac{|9 - x^2|}{1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$
۲) $\frac{-1}{6}$
۳) -6
۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۵- حاصل $\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x - \tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $\sqrt{2}$

۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $-\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- حاصل حد $A = \lim_{x\to 0}(\tan 3x \cot x - \tan x \cot 3x)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{4}{3}$

۴) $\frac{8}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- اگر $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2\sin x}{mx^n} = 1$ باشد، آن‌گاه $m+n$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۸- اگر $\lim_{x\to 0}(\frac{ax-4}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x^2+x}) = 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x+\cot 2x}{\cot x-\tan x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $+\infty$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر $\lim_{x\to \frac{a}{2}}(x-b)\tan\frac{\pi x}{a}=\frac{4}{\pi}$ باشد، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

۱) ۴
۲) -4
۳) ۱
۴) -1

شما پاسخ نداده اید

۹۱- تابع $f(x)=(x^2-1)\begin{cases}\sin x & ; \quad x\in Q\\ \cos x & ; \quad x\notin Q\end{cases}$ در بازه $[-1,1]$ در چند نقطه حد دارد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) هیچ

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر $\lim_{x\to+\infty} xLn(1+\frac{k}{x})=\frac{4}{k}$ باشد، مقدار k کدام است؟ $(\ln x=\log_e^x)$

۱) $\pm e$
۲) ± 2
۳) ± 4
۴) $\pm 2e$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+a} & ; \quad x\geq -1\\ x^2+ax & ; \quad x<-1\end{cases}$ پیوسته است؟

۱) $\{1,\sqrt{2}\}$
۲) $\{1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$
۳) $\varnothing$
۴) R

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۴- تابع $f(x)=[x]-[\sin x]$ در کدام‌یک از نقاط زیر پیوسته است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $x=\pi$ ۲) $x=۰$

۳) $x=۲$ ۴) $x=۳$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^۳+x+۱ & , \quad x\notin Z\\ ۳x^۲+۱ & , \quad x\in Z\end{cases}$ در چند نقطه به‌طول صحیح پیوسته است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر تابع f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد و هر دو تابع در همسایگی a تعریف شده باشند، کدام تابع زیر حتماً در a ناپیوسته است؟

۱) $(f^۲+۱)g$ ۲) $\frac{f+۱}{g}$

۳) $f+|g|$ ۴) $\frac{f}{g^۲+۱}$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- تابع $y=[-\frac{۲}{x}]$ بر بازه‌ی $(\frac{۳}{۷}-k,\frac{۱}{۳})$ پیوسته است. حداکثر مقدار k کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$

۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۸- تابع f روی بازه‌ی $[-۱,۴]$ پیوسته است. با توجه به $\begin{array}{c|cccc} x & -۱ & ۰ & ۲ & ۴ \\ \hline f(x) & ۱۰ & ۱۲ & ۵ & ۳ \end{array}$، معادله‌ی $f(x)=۷$ در بازه‌ی $[-۱,۴]$ چند جواب دارد؟

۱) حداقل یک جواب
۲) فقط یک جواب
۳) حداقل ۲ جواب
۴) جواب ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۹۹- کدام معادله حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) $۲x^۴-۴x^۲+۳=۰$
۲) $۳x^۴-۳x^۲-x+۲=۰$
۳) $x^۵+x^۲-x+۱=۰$
۴) $x^۲+۲|x|+۱=۰$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- تابع $f(x)=x+[x]$ با دامنه‌ی $(-۲,-۱)$ را در نظر بگیرید. بزرگترین بازه‌ای که در آن $f^{-۱}(x)$ پیوسته است، کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $(-۵,-۳)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(-۴,-۲)$
۴) $(-۴,-۳)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، هندسه‌ی تحلیلي ، مقاطع مخروطي - ۱۳۹۵۱۰۰۳

۱۱۱- اگر $F(\sqrt{۳},۰)$ یکی از کانون‌های بیضی افقی $x^۲+۴y^۲=m$ باشد، m کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

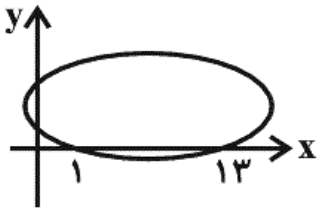
۱۱۲- طول قطر غیرکانونی در بیضی قائم گذرنده از نقطه‌ی $(۱۰,۱)$ با کانون‌های $F(۲,۵)$ و $F'(۲,-۳)$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) $۸\sqrt{۵}$
۳) ۸
۴) $۴\sqrt{۵}$

شما پاسخ نداده اید

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

۱۱۳- در شکل زیر، اگر $F(۱۳,۵)$ یکی از کانون‌های بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر F و F' کانون‌های بیضی به معادله‌ی $۳x^۲+۴y^۲+۱۲x-۲۴y=۰$ و O مبدأ مختصات باشد، حاصل $|OF'|+|OF|$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از نقطه‌ای به عرض ۲ روی محور عرض‌ها، نصف فاصله‌ی همین نقطه از خط $x=-۱$ است. در منحنی مکان هندسی نقطه‌ی M، طول بزرگترین قطر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- به ازای کدام مقدار m، خط $y=\frac{m}{۲}$، خط هادی سهمی $x^۲-۶x=۲y-۸$ است؟

۱) -۲

۲) ۲

۳) -۱

۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۴=۰$ بر سهمی $y^۲+۸x-۴y+m=۰$ و بر خط هادی آن مماس است. m کدام است؟

۱) -۴

۲) ۴

۳) -۸

۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- مکان هندسی نقطه‌ی $M(x,y)$ که فاصله‌اش از نقطه‌ی $(۰,۲)$، برابر فاصله‌اش از خط $x=-۲$ است،در دو نقطه‌ی A و B محور yها را قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۹- معادله‌ی سهمی‌ای که کانون آن در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات بوده و از نقطه‌ی $(-۱,۱)$ بگذرد و معادله‌ی خط هادی آن $x=-۴$ و معادله‌ی محور متقارنش $y=۲$ باشد، کدام است؟

۱) $(y-۲)^۲=۹(۲x-۱)$

۲) $(y-۲)^۲=۹x$

۳) $(y-۲)^۲=۹(۳x-۲)$

۴) $(y-۲)^۲=۹(۳-۲x)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- از کانون سهمی $x^۲-۴y-۲x=۳$، چند مماس می‌توان بر منحنی $۴x^۲+y^۲=۱۶$ رسم کرد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۱۰۰۳

۱۴۱- اگر a، b و c، سه عدد طبیعی باشند، آنگاه کدام گزاره‌ی شرطی زیر لزوماً صحیح نیست؟

۱) $(a,b)=(a,c)=۱\Rightarrow(a,bc)=۱$

۲) $a^n\mid b^n, n\in N\Rightarrow a\mid b$

۳) $c\mid a+b\Rightarrow(c,a)=(c,b)=۱$

۴) $(a,b)=۱, m,n\in N\Rightarrow(a^n,b^m)=۱$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- اگر a کوچکترین عدد طبیعی باشد که دارای ۱۵ مقسوم علیه مثبت است، آن‌گاه مجموع ارقام a کدام است؟

۱) ۵

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- مجموعه‌ی $A=\{۶m+۱۶n+۴۰\mid m,n\in Z\}$، چند عضو طبیعی کوچکتر از ۱۲۰دارد؟

۱) ۵۸

۲) ۵۹

۳) ۳۸

۴) ۳۹

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- جدول نردبانی زیر برای تعیین (a,b) استفاده شده است. $a+b$ چند است؟

خارج قسمت	۵	۱	x
a	b	۲۶	y
باقیمانده	z	۱۳	۰

۱) ۱۷۰

۲) ۱۳۰

۳) ۲۶۰

۴) ۱۴۳

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۵- اگر n عددی طبیعی و ب.م.م دو عدد $n+2$ و $9n-1$، عددی مخالف ۱ باشد، جمع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی n کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترک اعداد به صورت p^2+47 که در آن p عددی اول و دو رقمی باشد، کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- اگر p عددی اول باشد و در سمت راست عدد $n=2^2\times5^5\times6^2\times p^3$، چهار رقم صفر وجود داشته باشد، آن‌گاه حداقل تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد n کدام است؟

۱) ۱۴۴
۲) ۱۸۰
۳) ۳۶۰
۴) ۱۳۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- چند جفت عدد اول p و q وجود دارد که در رابطه‌ی $q^2-13p=16$ صدق کنند؟

۱) بی‌شمار
۲) دو
۳) یک
۴) هیچ

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- حاصل‌ضرب بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، برابر ۳۶ گردیده است. تفاضل این دو عدد، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۵
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- اگر b و a دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $3a=5b$ و $\frac{[a^2,b^2]}{5}+2ab=1200$، آن‌گاه حاصل (a,b) کدام است؟

۱) ۱
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۱- کدام‌یک از روابط زیر تابع نمی‌باشد؟

۱) $y=\sqrt{x^۲-۹}-\sqrt{۹-x^۲}$

۲) $|y|=-x^۲+۲x-۱$

۳) $x^۲+y^۲+۲x+۴y+۵=۰$

۴) $x^۳+xy=۰$

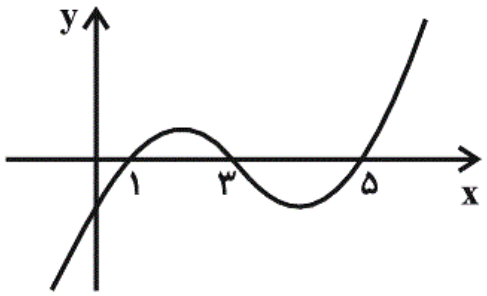
شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+a}$ مفروض است. اگر $f(x)\times f(-\frac{۱}{x})=-۱$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) ۲ ۴) −۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنه‌ی $y=\frac{۴}{\sqrt{(x^۲-۵x+۴)f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(۴,+\infty)$

۲) $(-\infty,۱)$

۳) $(۱,۳)\cup(۵,+\infty)$

۴) $(۳,۴)\cup(۵,+\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- برد تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}+۴\sqrt[۳]{x}+۵$ کدام است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[-\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۳) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر رابطه‌ی $f=\{(۱,n),(m,n+۲),(۱,m^۲-۲),(m,n^۲)\}$ یک تابع باشد، آن‌گاه کدام گزینه نمی‌تواند صحیح باشد؟

۱) $mn=-۱$ ۲) $mn=۱$ ۳) $mn=-۴$ ۴) $mn=۴$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- مستطیلی را که دو رأس آن بر روی نیم بیضی به معادله‌ی $y=\frac{۲}{۳}\sqrt{۹-x^۲}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ها باشد را در نظر بگیرید، مساحت این مستطیل به‌صورت تابعی از x کدام است؟

۱) $S=\sqrt{x^۲+\frac{x^۴}{۹}}$

۲) $S=\sqrt{۲x^۲-\frac{۲}{۹}x^۴}$

۳) $S=\sqrt{۴x^۲-\frac{۴}{۹}x^۴}$

۴) $S=\sqrt{۱۶x^۲-\frac{۱۶}{۹}x^۴}$

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۷- برای رسم نمودار $y=\sqrt{-\frac{1}{3}x+1}$ از روی نمودار $f(x)=\sqrt{x}$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را یک واحد به‌طرف راست می‌بریم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

۲) ابتدا نمودار f را یک واحد به طرف چپ می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم و در انتها در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم.

۳) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها آن را یک واحد به طرف چپ می‌بریم.

۴) ابتدا نمودار f را نسبت به محور yها انعکاس می‌دهیم، سپس آن را در امتداد محور xها با ضریب ۳ انبساط می‌دهیم و در انتها ۳ واحد به طرف راست می‌بریم.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- نمودار تابع $y=2|x+1|+3$ را ابتدا ۲ واحد به سمت راست و سپس ۴ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چه نقاطی تقاطع دارند؟

۱) $\{-2,-1\}$ ۲) $(-\infty,-2]$ ۳) $(-\infty,-1]$ ۴) $[1,+\infty)$

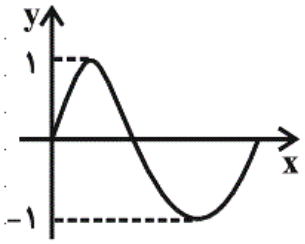
شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر دو تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ و $g(x)=\frac{x-2c}{x^3-5x^2+ax-b}$ مساوی باشند، آن‌گاه حاصل $a-b+2c$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل باشد، برد تابع $y=1+3f(\frac{x}{2})$ کدام است؟



۱) $[-2,2]$ ۲) $[2,4]$

۳) $[-2,0]$ ۴) $[-2,4]$

شما پاسخ نداده اید

ریاضي ، جبر و احتمال - گواه ، استدلال ریاضي - ۱۳۹۵۱۰۰۳

۱۳۱- با استفاده از کدام استدلال، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است؟

۱) شهودی ۲) تمثیلی ۳) استقرایی ۴) استنتاجی

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- در اثبات نامساوی $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2^n-1}<\frac{n}{2}\ (n\geq 3)$ با کمک استقرای تعمیم یافته از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟

۱) $2^k>k$ ۲) $2^{k+1}>2$

۳) $2^{k+1}>3$ ۴) $2^k>k^2-1$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- کدام گزینه به ازای تمامی مقادیر طبیعی n، همواره صحیح است؟

۱) $n! \leq ۲^n$

۲) $n! \leq ۳^n$

۳) $n! \leq (\frac{n}{۲} + \frac{۱}{n})^n$

۴) $n! \leq (\frac{n}{۲} - \frac{۳}{۲})^n$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در اثبات نامساوی $n! > ۲^{n+۱}$، به روش اصل استقرای تعمیم‌یافته، عدد m مناسب و رابطه‌ی بدیهی در گام بعدی حکم، برای $k \geq m$ کدام است؟

۱) $m = ۵$ و $k + ۱ > ۲$

۲) $m = ۶$ و $k + ۱ > ۲$

۳) $m = ۵$ و $(۲k + ۱) > ۴$

۴) $m = ۶$ و $(۲k + ۱) > ۴$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

۱) اگر n عددی صحیح و $n^۳$ فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

۲) اگر $n^۲$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه n نیز عددی صحیح است.

۳) اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه همواره $n^۲ \geq n$.

۴) اگر n عددی صحیح و $n^۲$ زوج باشد، آن‌گاه n نیز عددی زوج است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- کدام قضیه به صورت قضیه‌ی دو شرطی بیان نمی‌شود؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع برهم منطبق هستند.

۲) در مثلث قائم الزاویه عمود منصف اضلاع، بر روی وتر، متقاطع هستند.

۳) در مثلث قائم الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه‌ی ۹۰°، بزرگ‌ترین ضلع است.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم، تا به‌طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه‌اند. انتخاب شونده باید رأی بیش‌تر از سایرین داشته باشد، حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم‌رنگ باشند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷

شما پاسخ نداده اید

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۱- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر عدد طبیعی n مضرب ۳ نباشد، مربع آن به‌صورت $n^۲ = ۳k + ۱$ است. بنابراین، برای این‌که مجموع مربعات اعدادی که مضرب ۳ نیستند بر ۳ بخش‌پذیر باشد، باید تعداد آن‌ها مضرب ۳ یعنی ۰ یا ۳ یا ۶ یا ... باشد. در این صورت حداقل تعداد اعدادی که مضرب ۳ هستند برابر $۸ - ۶ = ۲$ خواهد بود.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۲- (امیرحسین ابومحبوب)

$P(۱) : ۱^۳ + ۱۱(۱) = ۱۲ = ۲ \times ۶$

فرض استقرا $P(k) : k^۳ + ۱۱k = ۶q \quad (q \in N)$

حکم استقرا $P(k+۱) : (k+۱)^۳ + ۱۱(k+۱) = ۶q' \quad (q' \in N)$

با ساده‌کردن عبارت حکم استقرا داریم: $k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ + ۱۱k + ۱۱$

$= (k^۳ + ۱۱k) + ۱۲ + ۳k(k+۱)$

با توجه به فرض $k^۳ + ۱۱k = ۶q$ و همین‌طور ۱۲ نیز مضرب ۶ است، پس کافی است داشته باشیم: $۳k(k+۱) = ۶t \Rightarrow k(k+۱) = ۲t$

یعنی حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

(جبرواحتمال- استدلال ریاضی: صفحه‌های ۵ تا ۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۲۳- (هومن نورائی)

$$\frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{\sqrt{y}} \geq \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \geq \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\xleftarrow{\times(\sqrt{xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^۲ \geq ۴\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x + y + ۲\sqrt{xy} \geq ۴\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x + y - ۲\sqrt{xy} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲ \geq ۰$$

با توجه به آن‌که تمامی روابط بازگشت‌پذیر هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

(جبرواحتمال- استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۲۴ (امیرحسین ابومحبوب)

بـــه روش برهـــان خلـــف، فـــرض مـــی‌کنـــیم حکـــم نادرســـت باشـــد؛ یعنـــی $\sqrt{x}+\sqrt{x+۲}>۲\sqrt{x+۱}$. در این صورت داریم:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{x+۲})^۲>(۲\sqrt{x+۱})^۲$$
$$\Rightarrow x+x+۲+۲\sqrt{x(x+۲)}>۴(x+۱)$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt{x(x+۲)}>۲(x+۱)\Rightarrow \sqrt{x(x+۲)}>x+۱$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲+۲x>x^۲+۲x+۱\Rightarrow ۰>۱$$

(جبرواحتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۸)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۲۵ (علی سعیدی‌زاد)

$$۱^۲+۲^۲+\ldots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$۱۲^۲+۱۴^۲+۱۶^۲+\ldots+۳۰^۲=۲^۲(۶^۲+۷^۲+\ldots+۱۵^۲)$$
$$=۴[(۱^۲+۲^۲+\ldots+۱۵^۲)-(۱^۲+\ldots+۵^۲)]$$
$$=۴[\frac{۱۵\times۱۶\times۳۱}{۶}-\frac{۵\times۶\times۱۱}{۶}]=۴۷۴۰$$

(جبرواحتمال- استدلال ریاضی- تمرین ۱ (الف)- صفحه‌ی ۱۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

$$x+y=(۲k+۱)+(۲k')=۲(k+k')+۱=۲t+۱\ (t\in Z)$$
$$(x+y)^۲-۱=(۲t+۱)^۲-۱$$
$$=۴t^۲+۴t=۴\underbrace{t(t+۱)}_{۲q}=۸q\quad (q\in Z)$$

توجه کنید که همواره حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است.

(جبرواحتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

---

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۲۷- (نوید مجیدی)

اگر $P > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $P = ۶k + ۱$ یا $P = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود؛ پس اگر هر دو عدد اول $P_۱$ و $P_۲$ به‌صورت $۶k + ۱$ یا $۶k + ۵$ باشند، حاصل ضربشان به فرم $۶q + ۱$ در خواهد آمد و اگر یکی از آن‌ها به فرم $۶k + ۱$ و دیگری به فرم $۶k + ۵$ باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها به فرم $۶q + ۵$ می‌شود. پس گزینه‌ی (۱) نادرست است و یک قضیه‌ی کلی نیست. حکم گزینه‌ی سوم یک قضیه‌ی کلی است، اما مثال نقض برای رد گزینه‌های ۲ و ۴ عبارتند از:

گزینه‌ی ۲) اگر چه $\sqrt{۲} + ۲$ گنگ است، اما $x = ۲$ و $y = \sqrt{۲}$ هر دو گنگ نیستند.

گزینه‌ی ۴) اگر $a = -\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $a^۲ = \frac{۱}{۴} > -\frac{۱}{۲}$؛ درصورتی‌که $a \not> ۱$.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۱۷ و ۲۸)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۸- (مائده کردستانی)

برای هر عدد حقیقی مانند a که $۰ < a < ۴$ طبق تعریف جزء صحیح داریم:

$[a] \in \{۰,۱,۲,۳\}$

پس اگر هر یک از اعداد صحیح $\{۰,۱,۲,۳\}$ را لانه و ۳۷ عدد را کبوتر در نظر بگیریم چون $۹ \times ۴ > ۳۷$ پس حداقل در یک لانه $۱۰ = ۱ + ۹$ کبوتر جای می‌گیرند.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۲۹- (نوید مجیدی)

مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که کوچک‌تر از ۳۵ هستند، برابر است با $A = \{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,۲۴,۲۷,۳۰,۳۳\}$. حال عدد ۳۳ را از A کنار می‌گذاریم، در این‌صورت مجموع جفت عددهای $\{۳,۳۰\}$، $\{۶,۲۷\}$، $\{۹,۲۴\}$، $\{۱۲,۲۱\}$، $\{۱۵,۱۸\}$ برابر ۳۳ است. اکنون اگر از هر کدام از این جفت اعداد، فقط یکی را انتخاب کنیم و عدد ۳۳ را به آن‌ها اضافه نماییم (روی هم می‌شوند $۶ = ۱ + ۵$ عدد)، آن‌گاه با انتخاب هر کدام از عضوهای باقی‌مانده در بین جفت اعداد مورد نظر، به‌طور حتم، یکی از جفت اعداد با مجموع ۳۳ وجود خواهد داشت. پس کم‌ترین تعداد عضوهای زیر مجموعه‌های k عضوی باید برابر با $۷ = ۱ + ۶$ باشد.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۳۰ (سیدمحسن فاطمی)

اگر هر ضلع مثلث را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنیم و سپس نقاط اتصال را به یکدیگر وصل کنیم، آن‌گاه ۱۶ مثلث همنهشت ایجاد می‌شود که طبق اصل لانه‌ی کبوتر، حداقل ۲ نقطه از میان ۱۷ نقطه‌ی انتخابی، داخل یکی از این مثلث‌ها قرار می‌گیرند و در نتیجه فاصله‌ی بین آن‌ها کوچکتر یا مساوی طول ضلع مثلث، یعنی برابر $\frac{۱}{۴}$ خواهد بود.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

ریاضي ، ديفرانسيل و انتگرال ، حد ، حد و پيوستگي - ۱۳۹۵۱۰۰۳

-۸۱ (میلاد منصوری)

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^۲ x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{x}=۱$$

با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim_{x\to ۰^+} f(x)+۲=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} f(x)=-۱$

اما دقت کنید که در همسایگی صفر، $\frac{\sin x}{x}<۱$ است، بنابراین $f(x)+۲<۱$.

بنابراین: $\lim_{x\to ۰^+}[f(x)]=[(-۱)^-]=-۲$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۷)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

-۸۲ (حبیب شفیعی)

اگر f تابعی فرد باشد، داریم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\lim_{x\to(-a)^-} f(x)\ ,\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\lim_{x\to(-a)^+} f(x)$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-(-۱)=۱\\ \lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=-\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱-۲(-۳)=۷$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۸۳ (فریدون ساعتی)

می‌دانیم $\cos n\pi = (-1)^n = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \tan(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n+1} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} (f(a_n) + f(a_{n+1})) = \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ زوج}} f(2^+) + f(2^-) = 3 + 1 = 4 \\ \xrightarrow{n \text{ فرد}} f(2^-) + f(2^+) = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

یعنی دنباله‌ی $\{f(a_n) + f(a_{n+1})\}$ همگرا به ۴ می‌باشد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌ی ۸۰)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۸۴ (آریان حیدری)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|9 - x^2|}{1 - \sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{|9 - x^2|}{1 - |x - 2|}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-(9 - x^2)}{1 - (x - 2)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 9}{3 - x} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = -6$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

-۸۵ (فریدون ساعتی)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x - \tan^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x(1 - \tan x)}{\sqrt{2\sin^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}(1 - \tan x)}{\sqrt{2}\,|\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \times (\frac{1 - \tan x}{-\sqrt{2}\cos x})$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{-\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۶- (میلاد منصوری)

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan x}-\frac{\tan x}{\tan 3x}=\frac{3x}{x}-\frac{x}{3x}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۸۷- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{mx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{mx^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x(1-\cos x)}{mx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x(2\sin^2\frac{x}{2})}{mx^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\times(2\times\frac{x^2}{4})}{mx^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{mx^n}$$

واضح است که باید داشته باشیم $m=-1$ و $n=3$، تا حد فوق برابر ۱ باشد.

$$m+n=-1+3=2$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۸۸- (کاظم اجلالی)

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-4}{x(x-2)}-\frac{x+2}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(ax-4)(x+1)-(x+2)(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x^2+(a-4)x}{x(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(a-1)x+a-4}{(x-2)(x+1)}=\frac{a-4}{-2}$$

بنابراین:

$$\frac{a-4}{-2}=1\Rightarrow a-4=-2\Rightarrow a=2$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۸۹- (محمدمصطفی ابراهیمی)

$$\tan 2x + \cot 2x = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x}$$

$$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + \cot 2x}{\cot x - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin 2x \cos 2x}}{2\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin 2x \cos 2x}}{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos^2 2x} = \frac{1}{2}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۹۰- (ایمان نشتین)

حاصل حد عبارت $\tan\frac{\pi x}{a}$ در $x = \frac{a}{2}$ برابر ∞ است. برای آن‌که حاصل حد عددی حقیقی شود باید $(x-b)$ به ازای $x = \frac{a}{2}$ صفر شود. پس

$$\frac{a}{2} - b = 0 \quad \text{یا} \quad a = 2b$$

$$\lim_{x\to \frac{a}{2}} (x-b)\tan\frac{\pi x}{a} = \lim_{x\to \frac{a}{2}} \frac{(x-\frac{a}{2})}{\cot\frac{\pi x}{a}} = \lim_{x\to \frac{a}{2}} \frac{x-\frac{a}{2}}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{a})}$$

با تغییر متغیر $x - \frac{a}{2} = t$ داریم:

$$\begin{cases} x - \frac{a}{2} = t \Rightarrow x = t + \frac{a}{2} \\ (x \to \frac{a}{2}) \Rightarrow (t \to 0) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{a}(t + \frac{a}{2}))} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan(\frac{-\pi t}{a})} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{-\pi t}{a}} = \frac{-a}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{\pi} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow a = -4$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۱- (فریدون ساعتی)

فرض می‌کنیم $g(x)=\begin{cases}\sin x & ; \quad x\in Q\\ \cos x & ; \quad x\notin Q\end{cases}$، تابع در نقاطی حد دارد که $\sin x=\cos x$ باشد، یعنی $\tan x=۱$. بنابراین تابع g در $[-۱,۱]$ فقط در $x=\frac{\pi}{۴}$ حد دارد. تابع $h(x)=x^۲-۱$ در همه‌ی نقاط R حد دارد ولی تابع $f(x)=h(x)g(x)$ در نقاطی حد دارد که هم g و هم h در آن نقاط حد داشته باشند و یا تابع $h(x)$ در این نقاط صفر باشد.

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۹۲- (کاظم اجلالی)

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x=e$، بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty} xLn(۱+\frac{k}{x})=\lim_{x\to+\infty} Ln(۱+\frac{k}{x})^x=\lim_{x\to+\infty} Ln((۱+\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}})^k$$

$$=Lne^k=kLne=k\Rightarrow k=\frac{۴}{k}\Rightarrow k^۲=۴\Rightarrow k=\pm ۲$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌ی ۸۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۳- (عارف سمیعی)

برای این‌که تابعی در یک نقطه‌ی معین پیوسته باشد، باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در آن نقطه با یکدیگر برابر باشند. حالا این شرط را در مورد تابع داده شده بررسی می‌کنیم:

$$\text{مقدار تابع}: f(-۱)=\frac{۱}{a-۱}$$

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{x+a}=\frac{۱}{a-۱}$$

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} x^۲+ax=۱-a$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a-۱}=۱-a \Rightarrow \frac{۱}{a-۱}=-(a-۱)\Rightarrow (a-۱)^۲=-۱$$

که هیچ جوابی ندارد. پس به ازای هیچ مقدار a، تابع نمی‌تواند پیوسته باشد. در نتیجه $a\in\varnothing$.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۷ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۴- (فریدون ساعتی)

می‌دانیم اگر تابع f در $x=a$ پیوسته و تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد. آن‌گاه $f\pm g$ حتماً در $x=a$ ناپیوسته است.

بنابراین اگر $f_۱(x)=[x]$ و $f_۲(x)=[\sin x]$ باشد، آن‌گاه f در $x=\pi$، $x=۲$ و $x=۳$ به‌صورت مجموع یک تابع پیوسته با یک تابع ناپیوسته تعریف می‌شود که حتماً ناپیوسته خواهد بود، ولی در $x=۰$، $f_۱$ و $f_۲$ هر دو ناپیوسته‌اند ولی ممکن است $f_۱-f_۲$ در صفر پیوسته باشد. (حتماً باید بررسی شود.)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۹۵- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

فرض کنیم $k \in Z$، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to k} f(x) = \lim\limits_{x \to k} (2x^3 + x + 1) = 2k^3 + k + 1 \\ f(k) = 3k^2 + 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2k^3 + k + 1 = 3k^2 + 1 \Rightarrow 2k^3 - 3k^2 + k = 0$$

$$\Rightarrow k(k-1)(2k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \in Z \\ k = 1 \in Z \\ k = \frac{1}{2} \notin Z \end{cases}$$

پس تابع داده شده در دو نقطه به طول صحیح، پیوسته است.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌ی ۹۹)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۹۶- (حبیب شفیعی)

f پیوسته است، پس تابع $f^2 + 1$ نیز پیوسته است. چون در $x = a$، $f^2 + 1 \neq 0$ و تابع g ناپیوسته است پس ضرب آن‌ها نیز همواره ناپیوسته است.

مثال نقض گزینه‌ی «۲»: $f(x) = x$ و $g(x) = [x]$ در $x = -1$

مثال نقض گزینه‌ی «۳»: $f(x) = x$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$

مثال نقض گزینه‌ی «۴»: $f(x) = x$ و $g(x) = [x]$ در $x = 0$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۹۳ و ۹۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۹۷ (ایمان نشتین)

اگر $y=[-\frac{۲}{x}]$ بخواهد در یک بازه پیوسته باشد، باید $\frac{-۲}{x}$ بین دو عدد صحیح باشد، چون $y(\frac{۱}{۳})=[-۶]=-۶$ است، بنابراین باید $-\frac{۲}{x}=-۷$ باشد یعنی $x=\frac{۲}{۷}$. پس کم‌ترین مقدار $\frac{۳}{۷}-k$، هنگامی رخ می‌دهد که $\frac{۳}{۷}-k=\frac{۲}{۷}$ باشد:

$$\frac{۳}{۷}-k=\frac{۲}{۷}\Rightarrow k=\frac{۱}{۷}\Rightarrow Max(k)=\frac{۱}{۷}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌ی ۱۰۰)

۱ ✓۲ ۳ ۴

-۹۸ (فریدون ساعتی)

$$f(x)=۷\Rightarrow f(x)-۷=۰\Rightarrow g(x)=f(x)-۷$$

$$\left.\begin{matrix}g(-۱)=۱۰-۷=۳\\ g(۰)=۱۲-۷=۵\end{matrix}\right\}\Rightarrow g(-۱)g(۰)>۰$$

نمی‌توان گفت g در این بازه جواب دارد.

$$g(۲)=۵-۷=-۲\Rightarrow g(۰)g(۲)<۰\xrightarrow[g\text{ در این بازه حداقل یک جواب دارد.}]{\text{طبق قضیه‌ی بولتزانو}}$$

$$g(۴)=۳-۷=-۴\Rightarrow g(۲)g(۴)>۰$$

نمی‌توان گفت که تابع در این بازه جواب دارد. بنابراین معادله‌ی $g(x)=۰$ در بازه‌ی مورد نظر حداقل یک جواب دارد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

✓۱ ۲ ۳ ۴

-۹۹ (کاظم اجلالی)

هر چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد، حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. پس معادله‌ی $x^۵+x^۲-x+۱=۰$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۱ ۲ ✓۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

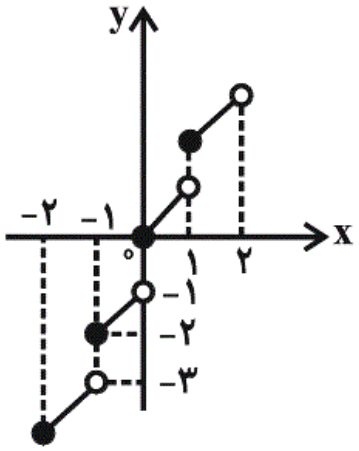
-۱۰۰ (فریدون ساعتی)

می‌دانیم اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد، آن‌گاه f^{-1} در $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است اما اگر بازه به‌صورت (a,b) شود، f^{-1} در بازه‌ی $(\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x))$ پیوسته و صعودی اکید است. تابع $f(x)=x+[x]$ در دامنه‌ی تعریفش یعنی $(-۲,-۱)$ صعودی اکید و در نتیجه یک به یک و معکوس‌پذیر است. پس f^{-1} در بازه‌ی زیر پیوسته و صعودی اکید است:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} = -۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} = -۴$$

$$\Rightarrow \text{بازه‌ی مورد نظر} = (-۴,-۳)$$



(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۱ ۲ ۳ ۴✓

ریاضي ، هندسه‌ی تحليلي ، مقاطع مخروطي - ۱۳۹۵۱۰۰۳

-۱۱۱ (رضا عباسی‌اصل)

$$x^۲+۴y^۲=m \Rightarrow \frac{x^۲}{m}+\frac{y^۲}{\frac{m}{۴}}=۱$$

$$\Rightarrow O(۰,۰)\ ,\ c^۲=a^۲-b^۲=m-\frac{m}{۴}=\frac{۳m}{۴}$$

$$OF=\sqrt{۳}=c \Rightarrow c^۲=\frac{۳m}{۴}=۳ \Rightarrow m=۴$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۱۲ (رضا عباسی‌اصل)

اگر F نقطه‌ای دلخواه از بیضی باشد، داریم: $|PF'|+|PF|=2a$

$$\sqrt{(10-2)^2+(1+3)^2}+\sqrt{(10-2)^2+(1-5)^2}=2a$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{80}=2a\Rightarrow a=4\sqrt{5}$$

از طرفی: $FF'=2c\Rightarrow 8=2c\Rightarrow c=4$

$$b^2=a^2-c^2=80-16=64\Rightarrow b=8$$

طول قطر غیرکانونی $=2b=16$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۱۳ (محسن محمدکریمی)

چون بیضی افقی است، کانون‌ها و مرکز هم عرض‌اند. پس:

$$\text{مرکز } O(\frac{13+1}{2},5)=(7,5)\Rightarrow F'(1,5)$$

$$2c=|FF'|=12\Rightarrow c=6$$

$$A(13,0)\in \text{بیضی}\Rightarrow |AF|+|AF'|=2a$$

$$2a=5+\sqrt{(12)^2+(5)^2}=5+13=18\Rightarrow a=9$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

-۱۱۴ (علی سعیدی‌زاد)

نقطه‌ی $O(0,0)$ در معادله‌ی بیضی صدق می‌کند و طبق تعریف بیضی مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن برابر $2a$ می‌باشد. بنابراین:

$$|OF|+|OF'|=2a$$

$$3(x^2+4x)+4(y^2-6y)=0\Rightarrow 3(x+2)^2+4(y-3)^2=48$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{12}=1\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=4\Rightarrow 2a=8$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۲)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۱۵- (علی سعیدی‌زاد)

فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی $F(0,2)$ برابر نصف فاصله‌اش از خط $x=-1$ است. بنابراین:

$$MF=\frac{1}{2}MH \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\frac{1}{2}|x+1|$$

$$x^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}(x+1)^2 \Rightarrow 4(y-2)^2+3x^2-2x=1$$

$$\Rightarrow 4(y-2)^2+3(x-\frac{1}{3})^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{(x-\frac{1}{3})^2}{\frac{4}{9}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{3}}=1$$

مکان هندسی مورد نظر یک بیضی افقی است. پس طول بزرگ‌ترین قطر آن $2a$ می‌باشد.

$$a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow 2a=\frac{4}{3}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۶۴)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۱۶- (عباس اسدی‌امیرآبادی)

$$x^2-6x+9=2y-8+9 \Rightarrow (x-3)^2=2(y+\frac{1}{2}) \Rightarrow O(3,-\frac{1}{2})$$

$$4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

معادله خط هادی: $y=-a+\beta=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1 \Rightarrow \frac{m}{2}=-1 \Rightarrow m=-2$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

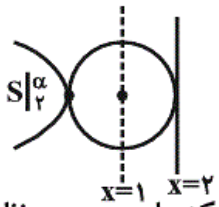
۱✓ ۲ ۳ ۴

۱۱۷- (محسن محمدکریمی)

$$x^2-2x+y^2-4y=-4$$

$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=-4+1+4$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$



پس مرکز دایره‌ی مورد نظر، نقطه‌ی $(1,2)$ است و شعاع آن برابر ۱ می‌باشد.

$$y^2-4y=-8x-m \Rightarrow y^2-4y+4=-8x-m+4$$

$$(y-2)^2=-8(x+\frac{-m+4}{-8}) \Rightarrow 4a=-8 \Rightarrow a=-2$$

چون قطر دایره‌ی داده شده برابر اندازه‌ی a سهمی است. برای این‌که دایره هم بر سهمی و هم بر خط هادی آن مماس باشد باید مطابق شکل، در رأس سهمی مماس باشد. پس:

$$\alpha=0 \Rightarrow \frac{-m+4}{-8}=0 \Rightarrow m=4$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

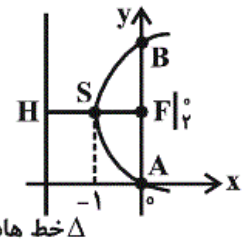
۱۱۸- (داریوش ناظمی)

مطابق تعریف سهمی، مکان هندسی مورد نظر، یک سهمی افقی به کانون $F(۰,۲)$ و خط هادی $x=-۲$ است. در نتیجه رأس سهمی، نقطه‌ی $S(-۱,۲)$ بوده و $a=۱$ است، پس معادله‌ی سهمی عبارت است از:

$$(y-۲)^۲=۴(x+۱)$$

$$x=۰\Rightarrow y=۰\,,\,۴$$

$$\Rightarrow A\Big|_{۰}^{۰}\,,\,B\Big|_{۴}^{۰}\Rightarrow AB=۴$$



(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴ | ۳ ✓ | ۲ | ۱

۱۱۹- (علی سعیدی‌زاد)

چون $y=۲$ محور تقارن است و کانون روی محور تقارن قرار دارد. پس $F(m,۲)$ کانون سهمی است و طبق تعریف سهمی، فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۱,-۱)$ تا کانون برابر با فاصله‌اش تا خط $x=-۴$ یعنی ۵ واحد می‌باشد.

$$\sqrt{(m-۱)^۲+۳^۲}=۵\Rightarrow m-۱=\pm ۴\Rightarrow m=۵ \text{ یا } m=-۳$$

چون کانون در ناحیه‌ی اول قرار دارد، $m=۵$ قابل قبول است. پس $F=(۵,۲)$

کانون است. $|MF|=|MH|\Rightarrow \sqrt{(x-۵)^۲+(y-۲)^۲}=|x+۴|$

$$x^۲-۱۰x+۲۵+(y-۲)^۲=x^۲+۸x+۱۶$$

$$\Rightarrow (y-۲)^۲=۱۸x-۹\Rightarrow (y-۲)^۲=۹(۲x-۱)$$

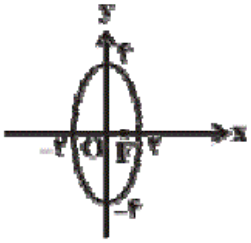
(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴ | ۳ | ۲ | ۱ ✓

۱۲۰- (علیرضا شریف‌خطیبی)

$$(x-۱)^۲=۴y+۴\Rightarrow (x-۱)^۲=۴(y+۱)\Rightarrow S(۱,-۱), a=۱$$

$$\xrightarrow{\text{سهمی قائم}} \text{کانون سهمی } F=(۱,۰)$$



$$۴x^۲+y^۲=۱۶$$

$$\xrightarrow{\div ۱۶}\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱\Rightarrow \text{معادله‌ی بیضی قائم است}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۲\\ O(۰,۰)\end{cases}$$

چنانچه ملاحظه می‌شود نقطه‌ی $F(۱,۰)$ داخل بیضی قائم است، پس از این نقطه هیچ مماسی نمی‌توان بر منحنی مفروض رسم کرد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۷۰)

۴ | ۳ | ۲ | ۱ ✓

---

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۱- (امیرحسین ابومحبوب)

گزاره‌ی شرطی بیان شده در گزینه‌ی ۳، همواره نمی‌تواند برقرار باشد به عنوان مثال، $۶+۴ \mid ۲$، در حالی که $(۲,۶) = ۲ = (۲,۴)$.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: مشابه تمرین‌های ۶ تا ۸، صفحه‌ی ۴۷)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۲- (علیرضا شریف‌خطیبی)

از آن‌جا که $(۱+۲)(۴+۱) = ۳ \times ۵ = ۱۵$ است، پس عدد a باید حداکثر دارای دو عامل اول باشد، که یکی دارای توان ۴ و دیگری دارای توان ۲ است. کوچکترین عدد به این فرم، عبارت است از:

$$a = ۲^۴ \times ۳^۲ = ۱۶ \times ۹ = ۱۴۴ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۹$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۳- (علی ایمانی)

از آن‌جا که $(۶,۱۶) = ۲$، پس داریم:

$$۶m + ۱۶n + ۴۰ = ۲k + ۴۰ = ۲(k + ۲۰) = ۲k'$$

برای این‌که عددی به فرم $۲k'$، طبیعی و کوچکتر از ۱۲۰ باشد، لزوماً $۱ \le k' \le ۵۹$ است و در نتیجه ۵۹ عضو از اعضای مجموعه‌ی A، دارای ویژگی مورد نظر هستند.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ و ۴۱)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۴۴- (سیدمصطفی سیدحسینی)

مطابق روش نردبانی $z = ۲۶$، $y = ۱۳$ و $x = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$ می‌باشد. با بازگشت به سمت چپ جدول، داریم:

$$b = ۱ \times ۲۶ + ۱۳ = ۳۹$$

$$a = ۵ \times ۳۹ + ۲۶ = ۲۲۱$$

بنابراین حاصل $a + b$ برابر است با:

$$۲۲۱ + ۳۹ = ۲۶۰$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: مشابه مثال ۴، صفحه‌ی ۴۲)

---

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

-۱۴۵ (سروش موئینی)

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 9n-1 \\ d \mid n+2 \xrightarrow{\times 9} d \mid 9n+18 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 19$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19 \xrightarrow{d \neq 1} d = 19$$

$$19 \mid n+2 \Rightarrow n+2 = 19q \Rightarrow n = 19q-2$$

$$\xrightarrow[n \geq 100]{q=6} n_{min} = 112$$

پس جمع ارقام این عدد برابر ۴ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$p^2 + 47 = 24q + 48 = 24(q+2) = 24q' \Rightarrow 24 \mid p^2 + 47$$

تذکر: حاصل عبارت $3k^2 \pm k$، به ازای جمیع مقادیر صحیح k، عددی زوج است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۷ (علی ایمانی)

$$n = 2^2 \times 5^5 \times 2^2 \times 3^2 \times p^3 = 2^4 \times 3^2 \times 5^5 \times p^3$$

چون سمت راست n چهار تا صفر دارد، پس توان ۲، برابر چهار است و $p \neq 2$.

$$p = 3 \Rightarrow n = 2^4 \times 3^5 \times 5^5$$

تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n $= (4+1)(5+1)(5+1) = 180$

$$p = 5 \Rightarrow n = 2^4 \times 3^2 \times 5^8$$

تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n $= (4+1)(2+1)(8+1) = 135$

$$p \neq 3,5 \Rightarrow n = 2^4 \times 3^2 \times 5^5 \times p^3$$

تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n $= (4+1)(2+1)(5+1)(3+1) = 360$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

---

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

-۱۴۸ (نوید مجیدی)

$$q^2 - 13p = 16 \Leftrightarrow q^2 - 16 = 13p \Leftrightarrow (q-4)(q+4) = 13p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q-4 = 13 \\ q+4 = p \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q+4 = 13 \\ q-4 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = 17 \\ p = 21 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} q = 9 \\ p = 5 \end{cases}$$

پس هیچ دو جفت از اعداد اول با ویژگی گفته شده وجود ندارد.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌ی ۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴ ✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۴۹- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و M کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b باشند، آنگاه: $Md = ۳۶ \Rightarrow a'b'd^۲ = ۳۶$

اگر $d = ۱$ باشد، آنگاه $a'b' = ۳۶$

یکی از جواب‌های معادله‌ی فوق عبارتست از:

$$a' = ۹, b' = ۴ \Rightarrow a - b = (۹ - ۴) \times ۱ = ۵$$

اگر $d = ۲$ باشد، آنگاه $a'b' = ۹$

$$a' = ۹, b' = ۱ \Rightarrow a - b = (۹ - ۱) \times ۲ = ۱۶$$

اگر $d = ۳$ باشد، آنگاه $a'b' = ۴$

$$a' = ۴, b' = ۱ \Rightarrow a - b = (۴ - ۱) \times ۳ = ۹$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰، ۴۵ و ۴۶)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۵۰- (سیدوحید ذوالفقاری)

با فرض $(a,b) = d$، داریم $a = a'd$، $b = b'd$ و $(a',b') = ۱$

$$۳a = ۵b \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \begin{cases} b' = ۳ \\ a' = ۵ \end{cases}$$

با توجه به آن‌که $[a^۲,b^۲] = [a,b]^۲ = (a'b'd)^۲$، داریم:

$$۲ab + \frac{[a^۲,b^۲]}{۵} = ۲a'db'd + \frac{(a'b'd)^۲}{۵}$$

$$= ۲a'b'd^۲ + \frac{a'^۲b'^۲d^۲}{۵} = ۱۲۰۰ \Rightarrow ۲ \times ۱۵ \times d^۲ + \frac{۱۵ \times ۱۵d^۲}{۵} = ۱۲۰۰$$

$$\Rightarrow ۳۰d^۲ + ۴۵d^۲ = ۱۲۰۰ \Rightarrow d^۲ = ۱۶ \Rightarrow d = ۴$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰، ۴۵ و ۴۶)

۱ ۲✓ ۳ ۴

ریاضي ، ریاضي پایه ، تابع ریاضي ۲ - ۱۳۹۵۱۰۰۳

۱۰۱- (فریدون ساعتی)

گزینه‌ی «۱»: $y = \sqrt{x^۲ - ۹} - \sqrt{۹ - x^۲} \Rightarrow D_y = \{-۳, ۳\}$

$\Rightarrow \{(-۳,۰),(۳,۰)\}$ تابع است.

گزینه‌ی «۲»: $|y| = -(x^۲ - ۲x + ۱) = -(x-۱)^۲ \le ۰$

$\Rightarrow |y| \le ۰ \Rightarrow y = ۰$ تابع است.

گزینه‌ی «۳»: $(x^۲ + ۲x + ۱) + (y^۲ + ۴y + ۴) = ۰$

$(x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱, y = -۲ \Rightarrow \{(-۱,-۲)\}$ تابع است.

گزینه‌ی «۴»: $x(x^۲ + y) = ۰ \xrightarrow{\text{اگر } x=۰}$ به ازای هر مقدار y برقرار است.

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴ و حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۲- (نگین یغمایی)

$$f(x)=\frac{x+1}{x+a}\Rightarrow f(-\frac{1}{x})=\frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a}=\frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}}=\frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x)\times f(\frac{-1}{x})=-1\Rightarrow \frac{x+1}{x+a}\times\frac{(x-1)}{ax-1}=-1\Rightarrow a=-1$$

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۴۹ تا ۵۴ و حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۰۳- (جمال‌الدین حسینی)

برای به‌دست آوردن دامنه کافی است نامعادله $(x^2-5x+4)f(x)>0$ را بررسی کنیم.

$$x^2-5x+4=0\Rightarrow (x-1)(x-4)=0$$

حال با توجه به نمودار تابع، جدول زیر را رسم می‌کنیم.

x		1		3		4		5	
x^2-5x+4	+	۰	−	‖	−	۰	+	‖	+
$f(x)$	−	‖	+	‖	−	‖	−	‖	+
$f(x)(x^2-5x+4)$	−	‖	−	‖	+	‖	−	‖	+

$$\Rightarrow D_y=(3,4)\cup(5,+\infty)$$

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶ و حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۴- (حبیب شفیعی)

برای محاسبه برد، عبارت را به‌صورت مربع کامل تبدیل می‌کنیم: $f(x)=(\sqrt[3]{x}+2)^2+1$

بنابراین کمترین مقدار تابع به ازای $x=-8$ است که حاصل آن ۱ می‌شود و بیشترین مقدار آن به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین $R_f=[1,+\infty)$.

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶ و حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۵- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

چون عضو اول زوج‌های $(1,n)$ و $(1,m^2-2)$ برابرند، باید عضو دوم آن‌ها نیز برابر باشند، یعنی باید: $m^2-2=n$ به‌همین ترتیب در زوج‌های (m,n^2) و $(m,n+2)$:

$$n^2=n+2\Rightarrow\begin{cases}n=-1\Rightarrow m=\pm1\\ n=2\Rightarrow m=\pm2\end{cases}$$

$n=-1,m=1\Rightarrow\{(1,-1),(1,1)\}$ تابع نیست

$n=-1,m=-1\Rightarrow\{(1,-1),(-1,1)\}$ تابع است $\Rightarrow mn=1$

$n=2,m=2\Rightarrow\{(1,2),(2,4)\}$ تابع است $\Rightarrow mn=4$

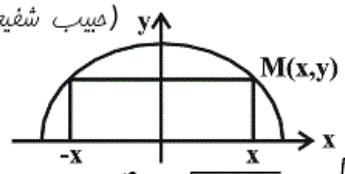
$n=2,m=-2\Rightarrow\{(1,2),(-2,4)\}$ تابع است $mn=-4$

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۲۶ تا ۳۴)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۶- (حبیب شفیعی)



مطابق شکل مقابل، اگر طول مستطیل $2x$ و عرض آن y فرض شود، آن‌گاه داریم:

$$S = 2xy = \frac{4}{3}x\sqrt{9-x^2} = \sqrt{\frac{16}{9}x^2(9-x^2)} = \sqrt{16x^2 - \frac{16}{9}x^4}$$

(حسابان - تابع؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۰۷- (سعید مدیرخراسانی)

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

	مراحل	ضابطه‌ها
گزینه «۱»	$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$	
	$x \to x-1 \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-x+1}$	
	$x \to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1} \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x+1}$	
گزینه «۲»	$x \to x+1 \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{x+1}$	
	$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x+1} \to \sqrt{-x+1}$	
	$x \to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x+1} \to \sqrt{-\frac{1}{3}x+1}$	
گزینه «۳»	$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$	
	$x \to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-\frac{1}{3}x}$	
	$x \to x+1 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \to \sqrt{-\frac{1}{3}(x+1)} = \sqrt{-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}$	
گزینه «۴»	$x \to -x \Rightarrow \sqrt{x} \to \sqrt{-x}$	
	$x \to \frac{1}{3}x \Rightarrow \sqrt{-x} \to \sqrt{-\frac{1}{3}x}$	
	$x \to x-3 \Rightarrow \sqrt{-\frac{1}{3}x} \to \sqrt{-\frac{1}{3}(x-3)} = \sqrt{-\frac{1}{3}x+1}$	

(حسابان - تابع؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۱ ۲ ۳✓ ۴

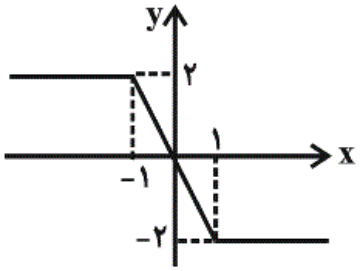
www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۰۸- (میلاد منصوری)

نمودار $y=۲|x+۱|+۳$ را به کمک انتقال $x \to x-۲$ دو واحد به راست حرکت می‌دهیم. یعنی: $y=۲|x-۱|+۳$

سپس ۴ واحد از آن کم می‌کنیم:

$$y=۲|x-۱|-۱$$



$$۲|x+۱|+۳=۲|x-۱|-۱$$

$$\Rightarrow |x-۱|-|x+۱|=۲$$

که با رسم نمودار داریم: $\Rightarrow x \in (-\infty,-۱]$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۴ ۳✓ ۲ ۱

۱۰۹- (فریدون ساعتی)

$$D_f=R-\{۱,۲\} \Rightarrow D_g=R-\{۱,۲\}$$

مخرج تابع g به ازای ۱ و ۲ باید برابر با صفر شود.

$$\begin{cases} x=۱ \Rightarrow (۱)^۳-۵+a-b=۰ \Rightarrow \\ x=۲ \Rightarrow (۲)^۳-۲۰+۲a-b=۰ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a=۸ \\ b=۴ \end{cases}$$

از طرفی باید مقدار دو تابع به ازای هر عضو از دامنه مشترک برابر باشد. یعنی:

$$f(۰)=g(۰) \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{-۲c}{-b} \Rightarrow b=۴c \Rightarrow c=۱$$

$$a-b+۲c=۸-۴+۲=۶$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

۴✓ ۳ ۲ ۱

۱۱۰- (محمدرضا شوکتی‌بیرق)

$$-۱ \le f(x) \le ۱ \Rightarrow -۱ \le f(\frac{x}{۲}) \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳f(\frac{x}{۲}) \le ۳$$

$$\Rightarrow -۲ \le ۱+۳f(\frac{x}{۲}) \le ۴ \Rightarrow -۲ \le y \le ۴$$

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۶ و حسابان - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)

۴✓ ۳ ۲ ۱

ریاضي ، جبر و احتمال - گواه ، استدلال ریاضي - ۱۳۹۵۱۰۰۳

۱۳۱- (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۵)

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷)

۴✓ ۳ ۲ ۱

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۲- *(سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۱)*

$$\text{فرض}: p(k): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}<\frac{k}{2}$$

$$\text{حکم}: p(k+1): 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}$$

دو طرف فرض را با $\frac{1}{2^{k+1}-1}$ جمع می‌کنیم. داریم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}$$

حال باید ثابت کنیم: $\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}$

$$\frac{k}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1}-1>2\Leftrightarrow 2^{k+1}>3$$

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۳- *(کتاب آبی ریاضیات گسسته و جبر و احتمال ـ سوال ۱۲)*

گزینه‌ی (۱): $n=4\Rightarrow 24\leq 16$ نادرست

گزینه‌ی (۴): $n=1\Rightarrow 1\leq -1$ نادرست

گزینه‌ی (۲): $n=7\Rightarrow 5040\leq 2187$ نادرست

گزینه‌ی «۳» برای همه‌ی مقادیر طبیعی n برقرار است. (با استقرا ثابت می‌شود.)

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۳۴- *(سراسری ریاضی- ۹۴)*

اولاً: استقراء به ازای $m=5$ شروع می‌شود: $5!>2^6$

ثانیاً: برای اثبات داریم: $\underbrace{k!>2^{k+1}}_{\text{فرض}}\Rightarrow\underbrace{(k+1)!>2^{k+2}}_{\text{حکم}}$

طرفین فرض یعنی $k!>2^{k+1}$ را در $k+1$ ضرب می‌کنیم.

$$(k+1)!>(k+1)2^{k+1}$$

کافی است ثابت کنیم که $(k+1)2^{k+1}>2^{k+2}$ در نتیجه $k+1>2$ که بدیهی است.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۱✓ ۲ ۳ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۵- *(کتاب آبی ریاضیات گسسته و جبر و احتمال، سوال ۳۳)*

گزینه‌ی ۲ مثال نقض دارد. $n = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2 \in Z$

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۶- *(سراسری ریاضی- ۷۸)*

قضیه‌ای را دو شرطی می‌نامیم که عکس آن نیز برقرار باشد.

در مورد گزینه‌ی (۴)، عکس برقرار نیست. زیرا در هر مثلث لزوماً زاویه‌ی روبرو به بزرگ‌ترین ضلع، 90° نیست، تمام مثلث‌های غیر قائم الزاویه مثال نقض برای این حکم هستند.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱ ۲ ۳ ۴✓

۱۳۷- *(سراسری ریاضی- ۹۲)*

اگر یک عدد طبیعی معادل توانی طبیعی از عدد ۲ باشد، نمی‌توان آن را به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت. با توجه به این که در گزینه‌ی دوم $2^6 = 64$ است پس ۶۴ را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی نوشت.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: مشابه مثال ۶، صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۳۸- *(سراسری ریاضی- ۹۳)*

بدبینانه‌ترین حالت ممکن این است که تمام اعداد غیرمرکب داخل کیسه را بیرون بیاوریم یعنی اعداد مجموعه $\{1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$ که همگی نسبت به هم‌اولند، گوی بعدی یعنی گوی ۱۲ام هر عددی که باشد مضرب یکی از اعداد اول این مجموعه است و به‌هم آنها بزرگ‌تر از یک می‌باشد.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۱۳۹- (سراسری ریاضی - ۸۸)

اگر ۴۰ نفر را تعداد کبوترها و ۷ نفر نامزد را تعداد لانه‌ها در نظر بگیریم، آنگاه طبق اصل لانه کبوتر (چون $۴۰ > ۵ \times ۷$) حداقل رأی هر نفر ۶ می‌باشد به بیان دیگر:

$$\left[\frac{۴۰-۱}{۷}\right]+۱=۵+۱=۶$$

بنابراین حالت ۵ و ۵ و ۶ و ۶ و ۶ و ۶ و ۶ ممکن است اتفاق بیافتد یعنی چند نفر با ۶ رأی وجود داشته باشند اما چون انتخاب شونده باید رأی بیش‌تر از سایرین داشته باشد لذا حداقل رأی $۶+۱=۷$ خواهد بود.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳✓ ۴

۱۴۰- (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

برای آن که دست کم ۶ گوی هم‌رنگ داشته باشیم، ابتدا ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۵ گوی آبی و ۵ گوی زرد برمی‌داریم و در آخر یک گوی دیگر بیرون می‌آوریم که تعداد گوی‌های آبی یا زرد، ۶ تا می‌شود. بنابراین حداقل ۱۹ گوی باید برداریم:

$$(۳+۵+۵+۵)+۱=۱۸+۱=۱۹$$

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۱ ۲✓ ۳ ۴

www.kanoon.ir

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا