



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۸۱- بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی صفر و شعاع  $\frac{3}{\sqrt{2n+1}}$  شامل عدد  $\frac{1}{5}$  می‌باشد. در این صورت  $n$  چند مقدار

طبیعی می‌تواند داشته باشد؟

- ۱۲۱ (۱)      ۱۱۱ (۲)      ۱۱۰ (۳)      ۱۱۲ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۸۲- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی  $|x+a| - 4 < x^2$  بازه‌ی  $(-b, b)$  می‌باشد. مقدار  $a+b$  کدام است؟

- $\frac{\sqrt{17}+1}{2}$  (۱)       $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$  (۲)       $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$  (۳)       $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

۸۳- تابع  $f(x) = \min\{|x|, \frac{4}{|x|}\}$  مفروض است، ماکزیمم مقدار این تابع کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۴ (۳)      ۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، دنباله - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۸۴- کدام گزینه در مورد دنباله‌ی  $a_n = (-1)^n \cos n\pi$  صحیح است؟

- (۱) همگرا و کراندار      (۲) واگرا و بی‌کران  
(۳) واگرا و یکنوا      (۴) کراندار و غیریکنوا

شما پاسخ نداده اید

۸۵- حد دنباله‌ی  $a_n = \left(\frac{3-\delta n}{4-\delta n}\right)^{\frac{n+3}{4}}$  کدام است؟

- $e^{\frac{1}{5}}$  (۱)       $e^{-\frac{1}{5}}$  (۲)  
 $e^{\frac{1}{20}}$  (۳)       $e^{-\frac{1}{20}}$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

۸۶- کدام گزینه در مورد دنباله‌ی  $a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}$  صحیح است؟

- (۱) یکنوا - واگرا      (۲) یکنوا - همگرا      (۳) غیریکنوا - واگرا      (۴) غیریکنوا - همگرا

شما پاسخ نداده اید

۸۷- به ازای مقادیر  $n \geq M$ ، فاصله‌ی جملات دنباله‌ی  $\left\{ \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{3^n} \right\}$  از حد آن کمتر از  $\varepsilon$  است، کم‌ترین

مقدار طبیعی  $M$  کدام است؟ ( )، علامت جزء صحیح است.

- (۱)  $\left[ \log_{\frac{4}{3}} \varepsilon \right]$       (۲)  $\left[ \log_{\frac{4}{3}} \varepsilon \right]$   
 (۳)  $\left[ \log_{\frac{4}{3}} \varepsilon \right] - 1$       (۴)  $\left[ \log_{\frac{4}{3}} \varepsilon \right] - 1$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- به ازای  $n \geq M$  دنباله‌ی  $a_n = 3^{3n+4} - 3^{2n+5}$  همواره صعودی است. کوچکترین مقدار طبیعی  $M$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۹- اگر  $a_n = \frac{2n-5}{3n-2}$  باشد، آن‌گاه دنباله‌ی  $b_n = a_n a_{n+1}$  چند جمله‌ی منفی دارد؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) بی‌نهایت

شما پاسخ نداده اید

۹۰- به‌ازای کدام مقدار  $k$ ، دنباله‌ی  $\left\{ \log \frac{kn+1}{n+2} \right\}$  کراندار است؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳)  $n$       (۴)  $\frac{1}{n}$

شما پاسخ نداده اید

۹۱- اگر  $a_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n} & ; n \leq 10 \\ \frac{4n + \sin n}{2n^2 + 3} & ; n > 10 \end{cases}$  و  $b_n = n \cos \frac{(-1)^n}{n}$  باشد، آن‌گاه دنباله‌ی  $\{a_n b_n\}$  چگونه است؟

- (۱) همگرا به صفر      (۲) همگرا به ۲      (۳) همگرا به ۱      (۴) واگرا

شما پاسخ نداده اید

۹۲- به ازای چه مقادیری از  $a$  دنباله‌ی  $\left\{ \left( \frac{n+1}{na} \right)^n \right\}$  همگرا است؟

- (۱)  $R - \{0\}$       (۲)  $R - [-1, 1]$       (۳)  $[-1, 1]$       (۴)  $R - [-1, 1)$

شما پاسخ نداده اید

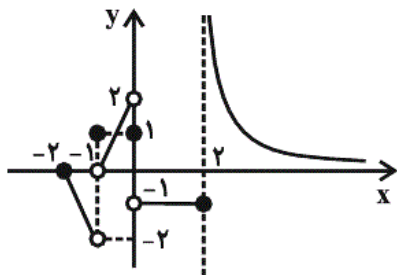
۹۳- اگر دنباله‌ای صعودی،  $\{b_n\}$  دنباله‌ای نزولی و برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $a_n \leq b_n$  باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ ( $a_n$  و  $b_n$  نامتناهی هستند.)

- (۱)  $\{a_n\}$  همگرا -  $\{b_n\}$  همگرا  
 (۲)  $\{a_n\}$  همگرا -  $\{b_n\}$  واگرا  
 (۳)  $\{a_n\}$  واگرا -  $\{b_n\}$  همگرا  
 (۴)  $\{a_n\}$  واگرا -  $\{b_n\}$  واگرا

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، حد، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۹۴- نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر است. حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f \circ f(x)$  کدام است؟



- (۱) ۱  
 (۲) ۲  
 (۳) صفر  
 (۴) -۱

شما پاسخ نداده اید

۹۵- با دو دنباله‌ی  $\{a_n\}$  و  $\{\frac{3-2n}{n+2}\}$  می‌توان نشان داد که تابع  $f(x) = \text{sgn}(x+2)$  در نقطه‌ی  $x = -2$  حد ندارد. کدام  $a_n$  می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\{\frac{5-2n}{n+2}\}$   
 (۲)  $\{\frac{-1-2n^2}{n^2+1}\}$   
 (۳)  $\{\frac{-2\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1}\}$   
 (۴)  $\{\frac{-2n^2+(-1)^{n^2+n}}{n^2}\}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر  $f$  تابعی فرد باشد و داشته باشیم  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ ، حاصل عبارت  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^2(x) - f(-x) + 1}{x^2 - 2x + 5}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$   
 (۲)  $\frac{3}{5}$   
 (۳)  $\frac{2}{5}$   
 (۴)  $\frac{3}{7}$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- در بازه‌ی  $(0, 2\pi)$  تابع  $y = [\sin x] \cdot [\cos x]$  در چند نقطه دارای حد نیست؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) صفر  
 (۲) ۱  
 (۳) ۲  
 (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x}$  باشد، مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ ( )

علامت جزء صحیح است.

- (۱) صفر - وجود ندارد.  
 (۲) ۱ - صفر  
 (۳) صفر - (-۱)  
 (۴) وجود ندارد - وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر  $a_n = \cos\left(\frac{n\pi + 1}{n + 2}\right)$  و  $f(x) = \tan\frac{x\pi}{2}$  آن گاه دنباله  $\{f(a_n)\}$  چه وضعیتی را دارد؟

- (۱) همگرا به صفر  
 (۲) واگرا به  $+\infty$   
 (۳) واگرا به  $-\infty$   
 (۴) واگرا و کراندار

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- برای اثبات عدم وجود  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$  کدام دنباله مناسب است؟

- (۱)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{4n\pi}\right)^2$   
 (۲)  $b_n = \left(1 - \frac{1}{2n\pi}\right)^2$   
 (۳)  $c_n = \left(1 - \frac{1}{n\pi}\right)^2$   
 (۴)  $d_n = \left(1 - \frac{2}{n\pi}\right)^2$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، بردار - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۱۱- فرض کنید اندازه‌ی بردارهای  $a''$  و  $b$  به ترتیب ۴ و ۳ و زاویه‌ی بین بردارهای  $a$  و  $a''$  برابر  $120^\circ$  باشد. اگر زاویه‌ی بین بردارهای  $a$  و  $b$ ، حاده باشد، آن گاه اندازه‌ی بردار  $a - 2b$  کدام است؟ (  $a''$  قرینه‌ی  $a$  نسبت به  $b$  است.)

- (۱)  $2\sqrt{19}$  (۲)  $2\sqrt{7}$  (۳) ۷ (۴)  $5\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر  $a = (1, 2, -1)$  و  $b = i + k$ ، حجم چهار وجهی‌ای که بر بردارهای  $a$ ،  $b + j$  و  $b - j$  بنا می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- دو خط  $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$  و  $d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+y-12=0 \end{cases}$  صفحه‌ی  $xOz$  را به ترتیب در نقاط  $A$  و

$B$  قطع می‌کنند، مساحت مثلث  $OAB$  کدام است؟ (  $O$  مبدأ مختصات است.)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- فاصله‌ی نقطه‌ی  $A = (1, 2, 3)$  از خط  $L: \begin{cases} \frac{x-1}{2} = y \\ \frac{y+2}{3} = \frac{z}{6} \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{5}$  (۲)  $5\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(-1, 2, 3)$  تا خط  $d: \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$  در صفحه‌ی  $P$  با فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  تا

صفحه‌ی  $P$  یکسان است، صفحه‌ی  $P$  محور  $x$  ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- خطی که از مبدأ مختصات به موازات عمود مشترک دو خط متنافر  $L_1: \begin{cases} x+y=3 \\ z=4 \end{cases}$  و  $L_2: \begin{cases} x-2z=2 \\ y=1 \end{cases}$

رسم شود، بر کدام صفحه عمود است؟

- (۱)  $x - y + 2z = 3$  (۲)  $2x + 2y - 4z = 5$   
(۳)  $-2x + 2y + 4z = 3$  (۴)  $x + y + 2z = 5$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه غیرمتقاطع  $P_1: 2x - 3y + 4z + b = 0$  و

$P_2: -4x + 6y + az + 2 = 0$  به یک فاصله‌اند، از نقطه‌ی  $A(2, -1, 1)$  می‌گذرد،  $a - b$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱۳ (۴) ۲۳

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۱۸- کدام یک از عددهای زیر می‌تواند اندازه‌ی وتری از دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 4x - 10 = 0$  باشد که از نقطه‌ی

$A(4, 1)$  می‌گذرد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۸  
دانلود از سایت ریاضی سرا [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر دایره‌های  $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0$  و  $C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$  مماس درون باشند، آن‌گاه  $m$  کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره به معادله‌ی  $(2a-1)x^2 - 3y^2 + 12y + a - 5 = 0$ ، از محور  $x$  ها کدام است؟

- (۱)  $2 + \sqrt{6}$  (۲) ۴ (۳)  $4 - \sqrt{2}$  (۴)  $2 + \sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۳۱- گرافی با ۷ رأس دارای ۱۸ یال است. حداقل  $\delta$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- گراف بازه‌ای  $G$  با بازه‌های  $(5,9)$ ،  $(3,5)$ ،  $(0,1)$ ،  $(4,7)$ ،  $(-2,2)$  و  $(x,y)$  از اعداد حقیقی، یک درخت می‌باشد. حداکثر مقدار  $y - x$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در یک درخت از مرتبه‌ی  $p$  و اندازه‌ی  $q$ ،  $2q + p = 19$  است. اگر در این درخت  $\Delta = 5$  باشد، آن‌گاه چند مسیر به طول ۳ در آن وجود دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- اگر  $A$  ماتریس مجاورت یک گراف ساده بوده و درایه‌های روی قطر اصلی مربع  $A$  به صورت

$1, 3, 2, 3, 2, 3, 2$  باشند، تعداد صفرهای ماتریس  $A$  کدام است؟

- |        |        |
|--------|--------|
| ۴۱ (۱) | ۳۳ (۲) |
| ۲۶ (۳) | ۲۹ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم‌پذیری ، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۳۵- بزرگترین عدد صحیحی که وقتی بر ۳۴ تقسیم شود، باقی‌مانده هفت برابر خارج قسمت باشد، کدام است؟

- |         |         |
|---------|---------|
| ۱۳۳ (۱) | ۱۳۲ (۲) |
| ۱۶۴ (۳) | ۲۰۵ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زوج  $a$  بر ۲۳ برابر ۹ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $\frac{a}{۲}$  بر ۲۳ کدام است؟

- |        |        |
|--------|--------|
| ۹ (۱)  | ۱۱ (۲) |
| ۱۶ (۳) | ۱۷ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- اگر  $a^3 | a+b$  ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست نیست؟ ( $a, b \in \mathbb{N}$ )

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| $a^6   b^2 - a^2$ (۱) | $a^3   b^3 - a^3$ (۲) |
| $a^3   b^3 + a^3$ (۳) | $a^6   b^2 + a^2$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- حاصل  $(110)_۲ - (1100101)_۲$  کدام است؟

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| $(101111)_۲$ (۱)  | $(1011011)_۲$ (۲) |
| $(1010111)_۲$ (۳) | $(1000111)_۲$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی در مبنای ۵ که بر ۹ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

- |        |        |
|--------|--------|
| ۱۲ (۱) | ۱۳ (۲) |
| ۱۴ (۳) | ۱۱ (۴) |

شما پاسخ نداده اید



۱۴۰- اگر  $(24)_y = (12)_x$  باشد، آنگاه کمترین مقدار  $x$  کدام است؟

- ۱۲ (۱)  
۱۰ (۲)  
۸ (۳)  
۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، مثلثات - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۰۷- جواب معادله  $\cos^3 x \cos x + \sin^3 x \sin x = \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$ ، چند نقطه روی دایره مثلثاتی را

نشان می‌دهد؟

- ۲ (۱)  
۴ (۲)  
۸ (۳)  
۱۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- جواب کلی معادله  $\frac{1 + \cos x}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$  کدام است؟

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  (۱)  
 $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$  (۲)  
 $\frac{3k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$  (۳)  
 $\frac{4k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- معادله  $\sin^3 x - \sin x = \cos^3 x + \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- ۶ (۱)  
۲ (۲)  
۳ (۳)  
۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- مجموع ریشه‌های معادله  $\sin x - \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

- $\pi$  (۱)  
 $\frac{3\pi}{2}$  (۲)  
 $2\pi$  (۳)  
 $\frac{5\pi}{2}$  (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۰۱- به ازای کدام مقدار  $m$ ، معادله  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^3 - mx + m - 3} = 0$  فقط یک ریشه دارد؟

- (۱) ۶  
(۲) -۶  
(۳) ۱۲  
(۴) -۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- معادله  $\frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} + \frac{3x + 3}{2x^2 + x + 1} = 4$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر  
(۲) یک  
(۳) دو  
(۴) سه

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- مجموعه جواب معادله  $|5 + x|(x - 2) = |x - 2|(5 + x)$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۸  
(۲) ۷  
(۳) ۳  
(۴) بی شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر مجموعه جواب نامعادله  $|x - 2| - |x - 1| + x \geq 4$  به صورت  $[a, +\infty)$  باشد، حاصل  $2a - 3$  کدام است؟

- (۱) -۵  
(۲) -۷  
(۳) ۷  
(۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- در کدام بازه، نمودار تابع  $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  زیر منحنی  $y = |x + 1| - 2$  قرار دارد؟

- (۱)  $(1 + \sqrt{2}, 3]$   
(۲)  $(1 - \sqrt{3}, 3)$   
(۳)  $(1, 1 + \sqrt{2})$   
(۴)  $(1, 1 + \sqrt{3})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- معادله  $\sqrt{x + 3} - 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 8} - 6\sqrt{x - 1} = 1$  دارای چند ریشه صحیح است؟

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) بی شمار

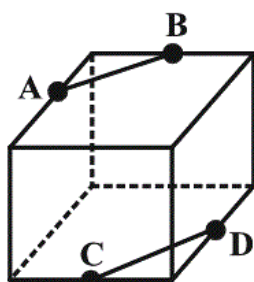
شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، مربعی به قطر  $2\sqrt{2}$  است. اگر سطح جانبی مکعب مستطیل برابر  $16\sqrt{2}$  باشد، حجم این مکعب مستطیل چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳)  $\frac{16}{3}$  (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- نقاط A، B، C و D در شکل وسط یال‌های مکعب‌اند. مساحت صفحه‌ای به صورت شش ضلعی منتظم گذرنده از پاره‌خط‌های AB و CD و محدود به مکعب، برابر  $\sqrt{6}$  واحد سطح است. مساحت کل مکعب کدام است؟



- (۱)  $8\sqrt{2}$  (۲)  $\frac{32}{13}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{16}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- مساحت جانبی یک منشور منتظم مثلث القاعده که همه‌ی یال‌های آن برابرند، با مساحت کل یک مکعب برابر است. نسبت حجم منشور به حجم مکعب کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- مستطیل ABCD به اضلاع  $AB = 3\sqrt{3}$  و  $BC = 3$ ، قاعده‌ی هرمی با رأس S و به حجم  $18\sqrt{3}$  واحد مکعب است. اگر چهار یال جانبی هرم مساوی باشند طول هر یک چند واحد است؟

- (۱)  $3\sqrt{3}$  (۲)  $4\sqrt{5}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $3\sqrt{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- در یک مخروط قائم، فاصله‌ی رأس از هر نقطه‌ی واقع بر محیط قاعده با قطر قاعده برابر است. اگر حجم مخروط  $9\sqrt{3}\pi$  باشد، مساحت قاعده کدام است؟

- (۱)  $6\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $18\pi$  (۴)  $36\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- محیط سطح مقطع حاصل از تقاطع یک صفحه با کره‌ای به شعاع R برابر  $6\pi$  است. اگر فاصله‌ی مرکز کره از این صفحه برابر ۴ واحد باشد، مساحت کره کدام است؟

- (۱)  $36\pi$  (۲)  $64\pi$  (۳)  $100\pi$  (۴)  $144\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۴ را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟

- (۱)  $14\pi$  (۲)  $15\pi$  (۳)  $16\pi$  (۴)  $32\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) یکی از دو قاعده‌ی منشور قائمی است که در آن  $AC = 3\sqrt{6}$  و  $CB = 4$ . این منشور را توسط صفحه‌ای عمود بر قاعده‌ها، به دو قسمت برابر چنان تقسیم می‌کنیم که از چسباندن آن‌ها به یکدیگر، مکعب مستطیلی به حجم ۸۰ واحد ساخته شود. ارتفاع این منشور کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{5}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- مساحت کل یک چهار وجهی که همه‌ی وجه‌های آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند، برابر با  $54\sqrt{3}$  واحد است. حجم این چهار وجهی، چند واحد است؟

- (۱)  $24\sqrt{3}$  (۲)  $27\sqrt{3}$  (۳)  $36\sqrt{3}$  (۴)  $45\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۲ و شعاع قاعده‌ی  $4\sqrt{2}$  در کوچک‌ترین نیم کره‌ی ممکن جای گرفته است. حجم محدود به این نیم کره و استوانه چند برابر  $\pi$  است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۷۸ (۳) ۸۰ (۴) ۷۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، بردار - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۲۱- در کدام حالت، حاصلضرب داخلی بردار غیرصفر  $a$  در مجموع دو بردار غیرصفر  $x$  و  $y$  صفر نیست؟  
(۱) بردار  $x$  قرینه‌ی بردار  $y$   
(۲) بردار  $a$  فقط بر یکی از دو بردار  $x$  یا  $y$  عمود.  
(۳) سه بردار دو به دو عمود برهم.  
(۴) بردار  $a$  بر صفحه‌ی دو بردار  $x$  و  $y$  عمود.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- دو بردار  $a = (1, 2, -1)$  و  $b = (2, 4, m)$  مفروضند. به ازای کدام مقادیر  $m$ ، حاصل  $(a + b) \cdot (a \times b)$  برابر صفر است؟

- (۱) فقط  $m = -2$   
(۲) فقط  $m = \pm 2$   
(۳) هیچ مقدار  $m$   
(۴) هر عدد حقیقی  $m$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، خط و صفحه - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۲۳- به ازای کدام مقدار  $a$  دو خط به معادلات  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+a}{2} = -z$  و  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$  متقاطع اند؟

(۱) -۵ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- کوتاه‌ترین فاصله بین دو خط به معادلات  $D: \begin{cases} x+y=2 \\ x-z=4 \end{cases}$  و  $D': \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲)  $\sqrt{5}$  (۳)  $\sqrt{6}$  (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- صفحه‌ی گذرنده بر خط به معادله‌ی  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$  و نقطه‌ی  $(0, 3, 0)$  محور  $z$  ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- مبدا مختصات، رأس یک هرم مثلث‌القاعده و معادله‌های سه ضلع قاعده‌ی آن  $\begin{cases} 2x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$  ،  $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$

و  $\begin{cases} 2z+y=2 \\ x=0 \end{cases}$  است. حجم این هرم، چند واحد مکعب است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{4}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- صفحه‌ی گذرا بر نقطه‌ی  $A(1, 4, 2)$  و فصل مشترک دو صفحه به معادلات  $3x - 2y + z = 0$  و  $2x + 3y - z - 6 = 0$ ، محور  $z$  ها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۲۸- نقطه‌ی  $O'(a, 2a)$  مرکز دایره‌ای است که از نقاط  $A(2, 1)$  و  $B(-1, 4)$  می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- دایره‌ای از دو نقطه‌ی  $(0, 2)$  و  $(4, 0)$  گذشته و بر محور  $x$ ها مماس است. این دایره محور  $y$ ها را در نقطه‌ی

دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن به طول  $-1$  و بر دو خط به معادلات  $y = x$  و  $y = x + 4$  مماس باشد، کدام

است؟

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$  (۲)

$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  (۱)

$x^2 + y^2 + 2x - y = 2$  (۴)

$x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۵۰۹۱۹

-۸۱

(فریدون ساعتی)

می‌دانیم بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی  $a$  و شعاع  $r$  به صورت  $(a-r, a+r)$  است. بنابراین:

$$\frac{1}{5} \in \left(0 - \frac{3}{\sqrt{2n+1}}, 0 + \frac{3}{\sqrt{2n+1}}\right) \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{5} < \frac{3}{\sqrt{2n+1}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-3}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{5} : \text{همواره برقرار است.} \\ \frac{3}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{2n+1}}{3} < 5 \Rightarrow \sqrt{2n+1} < 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n+1 < 225 \Rightarrow 2n < 224 \Rightarrow n < 112 \quad (2)$$

بنابراین ۱۱۱ عدد طبیعی وجود دارد که در نامساوی (۲) صدق می‌کند. بنابراین  $n$ ، ۱۱۱ عدد طبیعی مختلف می‌تواند داشته باشد.

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

۴

۳

۲

۱

چون مجموعه‌ی جواب نامعادله یعنی  $(-b, b)$  نسبت به صفر متقارن است و همچنین سمت چپ نامعادله نسبت به محور  $y$  ها متقارن است، پس سمت راست نیز باید نسبت به محور  $y$  ها متقارن باشد تا مجموعه‌ی جواب نامعادله نسبت به صفر متقارن شود. پس  $a = 0$  است.

$$|x| > x^2 - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0: x > x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 < 0 \\ \text{یا} \\ x < 0: x < -x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad (1) \\ \text{یا} \\ \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \xrightarrow{x < 0} \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < x < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} x \in \left( \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \Rightarrow b = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۶)

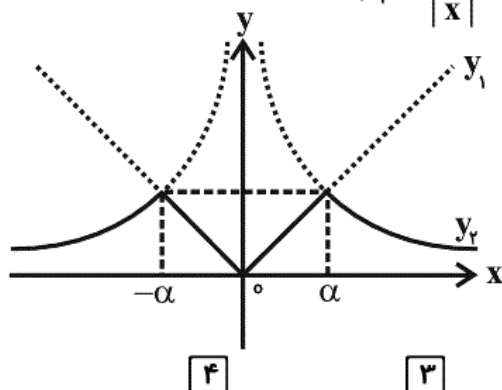
۴

۳

۲

۱ ✓

اگر نمودارهای دو تابع  $y_1 = |x|$  و  $y_2 = \frac{4}{|x|}$  را در یک دستگاه مختصات



رسم کنیم، داریم:

از طرفی تابع  $f$  یک تابع زوج است، پس نمودار آن نسبت به محور  $y$  ها متقارن است. بنابراین طبق شکل ماکزیمم تابع برابر است با  $f(\pm\alpha)$ .

۴

۳

۲ ✓

۱



(ممد مصطفی ابراهیمی)

$$a_1 = (-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$a_2 = (-1)^{2(1)} = (-1)^2 = 1$$

$$a_3 = (-1)^{3(-1)} = (-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

$$a_4 = (-1)^{4(1)} = (-1)^4 = 1$$

جملات دنباله یکی در میان برابر  $-1$  و  $1$  هستند. پس این دنباله کراندار، غیر یکنوا و واگرا است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴ و ۳۸ تا ۴۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سعید مدیرفراسانی)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 - \Delta n}{4 - \Delta n} \right)^{\frac{n+3}{4}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3 - \Delta n + 1 - 1}{4 - \Delta n} \right)^{\frac{n+3}{4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4 - \Delta n - 1}{4 - \Delta n} \right)^{\frac{n+3}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-1}{4 - \Delta n} \right)^{\frac{n+3}{4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left[ \left( 1 + \frac{-1}{4 - \Delta n} \right)^{\frac{4 - \Delta n}{-1}} \right]^{\frac{-(n+3)}{4(4 - \Delta n)}}}_{e} = e^{-2.0} = e^{2.0}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مرتضی فهیم‌علوی)

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}, a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}, \dots$$

ملاحظه می‌شود که دنباله همواره نزولی هستند. از طرف دیگر تمام جملات این دنباله مثبت می‌باشند و طبق اصل تمامیت، دنباله نزولی و از پایین کراندار، همگرا می‌باشد، پس این دنباله نیز همگرا می‌باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

$$\Rightarrow 3^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M \geq [\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon}] + 1$$

$$\Rightarrow M \geq [\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon} + 1] \Rightarrow M \geq [\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{\varepsilon} + \log_{\frac{1}{3}} 3] \Rightarrow M \geq [\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\varepsilon}]$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فریدون ساعتی)

دنباله‌ی  $a_n$  صعودی است، هرگاه  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ . بنابراین:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (3^{3n+7} - 3^{2n+7}) - (3^{3n+4} - 3^{2n+5}) \\ &= (3^{3n+7} - 3^{3n+4}) - (3^{2n+7} - 3^{2n+5}) \\ &= 3^{3n+4}(3^3 - 1) - 3^{2n+5}(3^2 - 1) = 26(3)^{3n+4} - 8(3)^{2n+5} \\ &= \underbrace{2(3)^{2n+5}}_{\text{همواره مثبت}} (13(3)^{n-1} - 4) \geq 0 \Rightarrow 3^{n-1} \geq \frac{4}{13} \end{aligned}$$

نامساوی فوق به ازای هر  $n$  همواره برقرار است، پس این دنباله همواره به ازایهر  $n$  طبیعی صعودی است. بنابراین  $n \geq 1$  پس  $\min(M) = 1$ .

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مهد مصطفی ابراهیمی)

جملات دنباله‌ی  $a_n$  را پشت سر هم می‌نویسیم:

$$\frac{-3}{1}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{10}, \frac{5}{13}, \dots$$

مشخص است که دو جمله‌ی اول دنباله منفی و بقیه جملات مثبت هستند. دنباله‌ی

 $b_n$  برابر حاصل ضرب دو جمله متوالی دنباله‌ی  $a_n$  است. در دنباله‌ی  $a_n$  فقطحاصل ضرب جملات متوالی  $a_3$  و  $a_4$  منفی است و بقیه مثبت هستند. یعنی:

$$b_4 = a_4 \times a_3 = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = -\frac{1}{28}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مدرس مصطفی ابراهیمی)

$$\text{«۱» } k = 0 \Rightarrow a_n = \log \frac{1}{n+2}$$

حد دنباله برابر  $\log 0^+ = -\infty$  است و بی کران است.

$$\text{«۲» } k = 1 \Rightarrow a_n = \log \frac{n+1}{n+2}$$

حد دنباله برابر  $\log 1 = 0$  است و کراندار است.

$$\text{«۳» } k = n \Rightarrow a_n = \log \frac{n^2+1}{n+2}$$

حد دنباله برابر  $\log +\infty = +\infty$  است و دنباله بی کران است.

$$\text{«۴» } k = \frac{1}{n} \Rightarrow a_n = \log \frac{1+1}{n+2} = \log \frac{2}{n+2}$$

حد دنباله برابر  $\log 0^+ = -\infty$  است و دنباله بی کران است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

(شیب شفیع)

-۹۱

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n + \sin n}{2n^2 + 3} \times n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2} \left( n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cos \frac{(-1)^n}{n} = 2 \cos 0 = 2 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌ی ۴۸)

(ایمان نشستین)

-۹۲

می‌دانیم برای  $a \neq 0$ ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{na} = \frac{1}{a}$ ، بنابراین اگر  $|\frac{1}{a}| < 1$  یا  $|a| > 1$

باشد،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{na} \right)^n = 0$  و دنباله همگراست حال دو نقطه‌ی مرزی ۱ و

-۱ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \\ a = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{-n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \pm e \text{ واگراست.} \end{cases}$$

پس به ازای  $a \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$  دنباله همگراست، پس  $a \in \mathbb{R} - [-1, 1)$ .

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷ و ۴۵ تا ۴۷)

(ممد، رضا شوکتی بیرق)

چون دنباله‌ی  $\{b_n\}$  نزولی است، پس از بالا کران دار و  $b_1$  یک کران بالای آن خواهد بود. با توجه به نامساوی  $a_n \leq b_n$ ،  $b_1$  یک کران بالا برای دنباله‌ی  $\{a_n\}$  نیز می‌باشد. اما دنباله‌ی  $\{a_n\}$  صعودی و در عین حال از بالا کران دار است، پس طبق قضیه‌ی ویراشتراس دنباله‌ی  $\{a_n\}$  همگرا خواهد بود. به همین ترتیب با استفاده از همین قضیه که بیان می‌کند هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کران دار، همگراست، می‌توان نشان داد که دنباله‌ی  $\{b_n\}$  نیز همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۱ تا ۴۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، حد، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(میلاد منصوری)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

دقت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f \circ f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

در نتیجه:

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \operatorname{sgn}(0^+) = 1$$

دنباله‌ی  $a_n$  باید طوری باشد که جملات آن با مقادیر کمتر از  $-2$  به  $-2$  میل کند. در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{-2\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} + 1} \right\} = \left\{ \frac{-2\sqrt{n} - 2 - 1}{\sqrt{n} + 1} \right\} = \left\{ -2 + \frac{-1}{\sqrt{n} + 1} \right\}$$

$$\Rightarrow a_n < -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \operatorname{sgn}(0^-) = -1$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کیا مقدس نیاک)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \xrightarrow[\text{فرد است.}]{\text{تابع } f} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f^2(x) - f(-x) + 1}{x^2 - 2x + 5} = \frac{(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x))^2 - (\lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x)) + 1}{(\lim_{x \rightarrow 2^+} x)^2 - 2(\lim_{x \rightarrow 2^+} x) + 5}$$

$$= \frac{(1)^2 - (-1) + 1}{(2)^2 - 2(2) + 5} = \frac{3}{5}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه ۷۴)

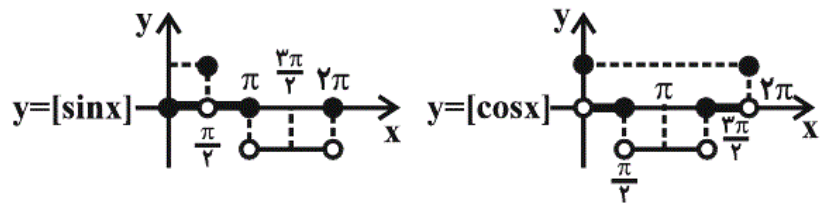
۴

۳

۲ ✓

۱

(کیا مقدس نیاک)



در بازه  $(0, 2\pi)$  نقاطی که دارای شرایط حد نداشتن می باشد را بررسی می کنیم:

$$x = \frac{\pi}{2} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} [\sin x][\cos x] = 0 \times (-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} [\sin x][\cos x] = 0 \times 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \pi : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} [\sin x][\cos x] = (-1) \times (-1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\sin x][\cos x] = 0 \times (-1) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} [\sin x][\cos x] = (-1) \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} [\sin x][\cos x] = (-1) \times (-1) = 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع در نقاط  $x = \pi$  و  $x = \frac{3\pi}{2}$  حد ندارد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه های ۶۶ و ۶۷ و ۷۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کالظم ایملالی)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos^2 x}{x} = 0 \quad \text{می دانیم:}$$

همچنین اگر  $x \rightarrow +\infty$  آن گاه  $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x} < 1$  و در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] \quad \text{ولی اگر } x \rightarrow -\infty \text{ آن گاه } -1 < \frac{\cos^2 x}{x} \leq 0 \text{ و در نتیجه}$$

وجود ندارد.

زیرا وقتی  $x \rightarrow -\infty$ ، مقدارهای  $f(x)$  گاهی صفر هستند که در این صورت  $[f(x)] = 0$  و گاهی مقدارهای  $f(x)$  در بازه  $(-1, 0)$  هستند که در این صورت

$[f(x)] = -1$ ، پس  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$  وجود ندارد. برای اثبات عدم وجود حد مورد

نظر می توانید دنباله های  $a_n = -2n\pi + \frac{\pi}{2}$  و  $b_n = -2n\pi$  را در نظر بگیرید.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فریدون ساعتی)

فرض کنید  $D$  زیر مجموعه ای از  $\mathbb{R}$  و  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد، اگر به ازای هر دنباله از اعضای  $D$  مانند  $\{a_n\}$  و  $a_n \neq a$  که به  $a$  همگراست دنباله ای  $\{f(a_n)\}$  واگرا به  $+\infty$  باشد، آن گاه می گوئیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{n\pi + 2\pi + 1 - 2\pi}{n + 2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi + \frac{1 - 2\pi}{n + 2}\right) = \cos \pi^- = (-1)^+$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$= \tan\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+ = -\infty$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی؛ صفحه های ۶۰ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

تمام دنباله‌ها به ۱ همگرا هستند.

$$(۱) \text{ گزینه‌ی } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{4n\pi})^2}} = \sin \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{4n\pi})}$$

$$= \sin 4n\pi = 0$$

$$(۲) \text{ گزینه‌ی } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{2n\pi})^2}} = \sin 2n\pi = 0$$

$$(۳) \text{ گزینه‌ی } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{1 - \sqrt{(1 - \frac{1}{n\pi})^2}} = \sin \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{n\pi})}$$

$$= \sin n\pi = 0$$

$$(۴) \text{ گزینه‌ی } \sin \frac{1}{1 - \sqrt{(1 - \frac{2}{n\pi})^2}} = \sin \frac{1}{1 - (1 - \frac{2}{n\pi})}$$

$$= \sin \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ یا } 0 \text{ یا } -1$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، بردار - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(علی ایمانی)

$$|a''| = |a|$$

$$2\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ, |a| = |a''| = 4, |b| = 3$$

$$|a - 2b|^2 = |a|^2 + 4|b|^2 - 4|a||b|\cos\theta$$

$$= 16 + 36 - 4(4)(3)\left(\frac{1}{2}\right) = 52 - 24 = 28$$

$$\Rightarrow |a - 2b| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

(رضا عباسی اصل)

$$b + j = (i + k) + j = (1, 1, 1)$$

$$b - j = (i + k) - j = (1, -1, 1)$$

$$(b + j) \times (b - j) = (2, 0, -2)$$

$$V = \frac{1}{6} |a \cdot ((b + j) \times (b - j))| = \frac{1}{6} |(1, 2, -1) \cdot (2, 0, -2)|$$

$$V = \frac{1}{6} |2 + 0 + 2| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

-۱۱۳

(ممدظاهر شعاعی)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{3} = -2 = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ z=-5 \end{cases}$$

پس  $A(-5, 0, -5)$  نقطه‌ی تلاقی خط  $d_1$  با صفحه‌ی  $XOZ$  است.

$$d_2 : \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+y-12=0 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} x-z=2 \\ x=12 \end{cases} \Rightarrow z=10$$

پس  $B(12, 0, 10)$  نقطه‌ی تلاقی خط  $d_2$  با صفحه‌ی  $XOZ$  است.

$$\overline{OA} \times \overline{OB} = (-5, 0, -5) \times (12, 0, 10) = (0, -10, 0)$$

$$S(AOB) = \frac{1}{2} |\overline{OA} \times \overline{OB}| = \frac{1}{2} \sqrt{100} = \frac{10}{2} = 5$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱

-۱۱۴

(سروش موثینی)

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = y \\ \frac{y+2}{3} = \frac{z}{6} \Rightarrow y = \frac{z}{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow d : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-4}{2}$$

با انتخاب نقطه‌ی  $A_0 = (1, 0, 4)$  روی خط  $d$  داریم:

$$\begin{cases} \overline{A_0A} = (0, 2, -1) \\ \overline{A_0A} \times \mathbf{u} = (5, -2, -4) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = (2, 1, 2) \text{ بردار هادی خط } L$$

$$L \text{ فاصله‌ی } A \text{ از خط } = \frac{|\overline{A_0A} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{25+4+16}}{\sqrt{4+1+4}} = \sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

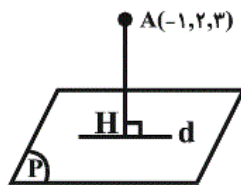
۴

۳

۲

۱





صفحه‌ی P با فاصله‌ی A تا صفحه‌ی P یکسان است پس شکل مسأله به صورت مقابل است. برای نوشتن معادله‌ی صفحه کافی است مختصات H را بیابیم.

$$M(x, 2x-1, 1), A(-1, 2, 3) \Rightarrow \overline{AM} = (x+1, 2x-3, -2)$$

$$\overline{AM} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \Rightarrow (x+1, 2x-3, -2) \cdot (1, 2, 0) = 0$$

$$\Rightarrow x+1+4x-6=0 \Rightarrow x=1$$

$$H = M = (1, 1, 1) \Rightarrow \overline{AH} = (2, -1, -2)$$

$$P: 2(x-1) - (y-1) - 2(z-1) = 0 \xrightarrow{y=z=0} 2x - 2 + 1 + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید عادل رضا مرتضوی)

۱۱۶-

راستای عمود مشترک برابر است با حاصل ضرب خارجی راستاهای دو خط  $L_1$  و  $L_2$ ، یعنی:

$$L_1: \begin{cases} x = -y + 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_1(1, -1, 0)$$

$$L_2: \begin{cases} x = 2z + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_2(1, 0, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\times(2)} (2, 0, 1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (-1, -1, 2)$$

چون راستای این خط بر صفحه عمود است، پس راستای این خط نقش نرمال صفحه را خواهد داشت. در بین گزینه‌ها، بردار نرمال صفحه در گزینه‌ی «۲» به صورت  $(2, 2, -4)$  است. که موازی بردار  $\mathbf{u}$  می‌باشد.

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(رضا عباسی اصل)

۱۱۷-

$$P_1 \parallel P_2 \Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = -8$$

با جایگذاری مقدار a و تقسیم معادله‌ی صفحه‌ی  $P_2$  بر عدد (-۲) داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1: 2x - 3y + 4z + b = 0 \\ P_2: 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

مکان هندسی تقاطعی از فضا که از  $P_1$  و  $P_2$  به یک فاصله باشند صفحه‌ای است، مانند E به

$$E: 2x - 3y + 4z + \frac{b-1}{2} = 0 \text{ : موازات آنها و به فاصله‌ی مساوی از آنها بنابراین داریم:}$$

$$A \in E \Rightarrow 2(2) - 3(-1) + 4(1) + \frac{b-1}{2} = 0 \Rightarrow b = -21$$

$$a - b = -8 + 21 = 13$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۵ و ۴۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مسئله مهم‌گیریمی)

می‌دانیم کوتاه‌ترین وتری که از نقطه‌ی A درون دایره می‌گذرد، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است.

$$x^2 + y^2 - 4x - 10 = 0$$

مرکز دایره O(2,0)

$$\text{شعاع دایره: } r = \frac{\sqrt{16+0+40}}{2} = \sqrt{14}$$

$$AO = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$AB = \sqrt{14-5} = 3 \Rightarrow BC = 6$$

پس وترهای گذرنده از A بزرگ‌تر یا مساوی 6 و کوچک‌تر یا مساوی  $2r = 2\sqrt{14}$  هستند. در بین گزینه‌ها، تنها عدد 7 در این بازه قرار دارد.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های 52 تا 55)

 4

 3

 2

 1


(رضا عباسی اصل)

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 - m$$

$$\Rightarrow O(2, -2), R = \sqrt{8 - m}$$

$$C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$$

$$\Rightarrow O'(2, -4), R' = 1$$

$$\text{دو دایره مماس درون‌اند} \Rightarrow OO' = |R - R'|$$

$$\sqrt{(2-2)^2 + (-2+4)^2} = |\sqrt{8-m} - 1| \Rightarrow |\sqrt{8-m} - 1| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-m} - 1 = 2 \Rightarrow 8-m = 9 \Rightarrow m = -1 \\ \sqrt{8-m} - 1 = -2 \Rightarrow \sqrt{8-m} = -1 \end{cases}$$

ریشه ندارد

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های 52 تا 55)

 4

 3

 2

 1

(نوید میبیدی)

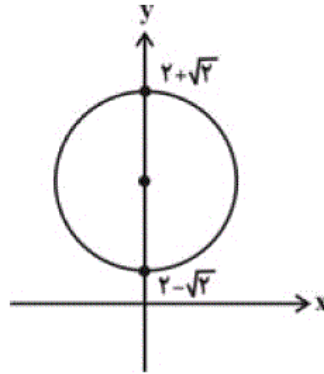
در آغاز، باید معادله‌ی دایره را با دسته‌بندی پیدا کنیم. برای این منظور باید ضرایب  $x^2$  و  $y^2$  با هم برابر باشند، داریم:

$$2a - 1 = -3 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -3x^2 - 3y^2 + 12y - 1 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 - 3y^2 + 12y - 6 = 0 \xrightarrow{\div(-3)} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 2 \quad (\text{معادله‌ی دایره‌ای به مرکز } (0, 2) \text{ و شعاع } \sqrt{2})$$

با توجه به شکل، روشن است که بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره تا محور  $x$  ها،  $2 + \sqrt{2}$  است.



(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(رضا پورحسینی)

$$q_{K_7} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

اگر گراف کامل باشد:

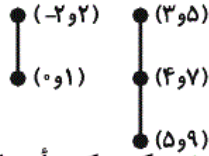
این گراف، ۳ یال از گراف کامل  $K_7$  کمتر دارد که برای حداقل شدن  $\delta$  باید هر سه یال را از یک رأس کم کنیم که در این صورت حداقل  $\delta$  برابر ۳ خواهد شد. (دنباله‌ی درجات چنین گرافی به صورت ۳، ۵، ۵، ۵، ۶، ۶ و ۶ خواهد بود.)

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

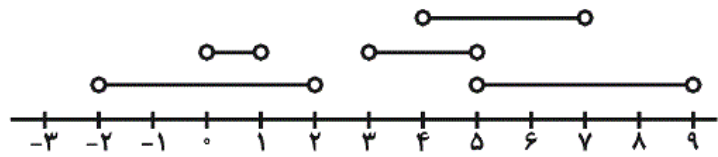
۱۳۲-

(علیرضا سیف)



گراف را بدون در نظر گرفتن  $(x, y)$  رسم می‌کنیم.

برای آن که درخت تشکیل شود باید  $(x, y)$  طوری انتخاب شود که یک رأس از سمت چپ به یک رأس از سمت راست وصل شود.



با توجه به نمودار بالا، حداقل  $x$  برابر ۱ و حداکثر  $y$  برابر ۴ خواهد بود.

$$y - x = 4 - 1 = 3$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۸، ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱

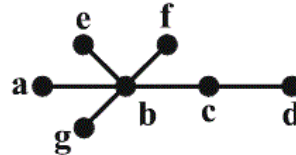
۱۳۳-

(سید عادل رضا مرتضوی)

در هر درخت، رابطه‌ی  $q = p - 1$  برقرار است.

$$2q + p = 19 \Rightarrow 2(p - 1) + p = 19 \Rightarrow 3p = 21 \Rightarrow p = 7$$

و با توجه به اینکه  $\Delta = 5$ ، شکل به صورت زیر می‌شود:



مسیرهای به طول ۳ در این درخت عبارتند از:  $abcd, ebcd, fbcd, gbcd$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳

۲

۱

۱۳۴-

(علی سعیدی زار)

تعداد صفرهای ماتریس مجاورت یک گراف ساده از رابطه‌ی  $p^2 - 2q$  به دست می‌آید. با توجه به این که دنباله‌ی درجات داده شده ۷ عضوی است و مجموع

$$p = 7, 2q = 16 \Rightarrow p^2 - 2q = 49 - 16 = 33$$

داریم: آن‌ها ۱۶ می‌باشد. داریم:  $p^2 - 2q = 49 - 16 = 33$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳

۲

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(علیرضا سیف)

$$\left. \begin{array}{l} a = 34q + r \\ r = 7q \end{array} \right\} \Rightarrow a = 34q + 7q = 41q \quad (q \in \mathbb{Z})$$

$$0 \leq r < 34 \Rightarrow 7q < 34 \Rightarrow q < \frac{34}{7} \Rightarrow q_{\max} = 4$$

$$a = 41 \times 4 = 164$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(رضا پورحسینی)

مطابق الگوریتم تقسیم داریم:  $a = 23k + 9$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). چون  $a$  زوج و  $9$  فرد است، پس  $23k$  عددی فرد و در نتیجه  $k$  فرد است، پس می‌توان  $k$  را به صورت  $2q + 1$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) نوشت. داریم:

$$a = 23(2q + 1) + 9 = 46q + 32 \Rightarrow \frac{a}{2} = 23q + 16$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$\left. \begin{array}{l} a^3 | a + b \Rightarrow a | a + b \xrightarrow{a|a} a | b \\ a^3 | a + b \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a | b - a \\ a^3 | a + b \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow a^4 | b^2 - a^2$$

$$\left. \begin{array}{l} a | b \Rightarrow a^3 | b^3 \\ a^3 | a^3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^3 | b^3 \pm a^3$$

اگر  $a = 2$  و  $b = 6$  را در نظر بگیریم، مثال نقضی برای گزینه‌ی «۴» می‌باشد. زیرا  $2^3 | 2 + 6$  ولی  $2^4 \nmid 2^2 + 6^2$ .

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰)

۴✓

۳

۲

۱

(علی سعیدی زاد)

روش اول: معادل دو عدد را در مبنای ۱۰ نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$(1100101)_2 - (110)_2 = (2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^0) - (2^2 + 2^1)$$

$$= 2^6 + \underbrace{2^5 - 1}_{31} = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (1011111)_2$$

روش دوم: مشابه روشی که برای عمل تفاضل دو عدد در مبنای ده استفاده می‌کنیم انجام می‌دهیم. با این تفاوت که ارزش مکانی هر رقم دو برابر رقم سمت راست خودش است بنابراین لزوم از یک رقم، یک واحد کم کرده و به ازای آن ۲ واحد به رقم سمت راستش اضافه می‌کنیم. (در مبنای ۱۰ با انجام این کار ۱۰ واحد اضافه می‌کنیم.)

$$\begin{array}{r} (1100101)_2 \\ - (110)_2 \\ \hline (1011111)_2 \end{array}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

- ۱ ✓       ۲       ۳       ۴

(محمود رضا اسلامی)

بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی در مبنای ۵ برابر است با:

$$(4444)_5 = 5^4 - 1 = 624$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۹ برابر ۳ است، پس عدد  $(4444)_5$  بر ۹ بخش‌پذیر است و داریم:

$$9 \text{ بر } (4444)_5 \text{ پس عدد } (4444)_5 = 4 + 4 + 4 + 1 = 13$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

- ۱       ۲ ✓       ۳       ۴

(امیرحسین ابومحبوب)

دو عدد را به مبنای ۱۰ می‌بریم. داریم:

$$(12)_x = (24)_y \Rightarrow 2 + x = 4 + 2y \Rightarrow x = 2(1 + y)$$

چون  $y \geq 5$  است (رقم ۴ در مبنای  $y$  به کار رفته است)، پس حداقل  $x$  برابر

$$\min(x) = 2(1 + 5) = 12$$

است با:

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۳ و ۳۴)

- ۱ ✓       ۲       ۳       ۴

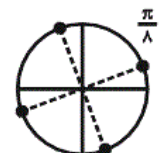
(سعید مدیرفراسانی)

$$\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos(3x - x) = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)



که ۴ نقطه را مشخص می‌کند.

- ۱       ۲ ✓       ۳       ۴

- ۱۰۸

(عمید ستاری)

ابتدا طرفین وسطین می‌کنیم، داریم:

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin x \cdot \cos \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x (\sin x - \cos \frac{x}{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \text{ غ ق } , \sin x - \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \cos \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \text{ غ ق } \end{cases}$$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

- ۱۰۹

(حبیب شفیعی)

$$2 \sin x \cos 2x = 2 \cos 2x \cos x \Rightarrow 2 \cos 2x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = \cos x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

پس معادله دارای ۴ جواب  $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  است.

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

- ۱۱۰

(امیرحسین ابومحبوب)

$$\sin x - \cos x + \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin x \cos x - \cos x) + (\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر است با:  $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

(مسئله‌ها - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱

ریاضی ، ریاضی پایه ، محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(فریدون ساعتی)

می‌دانیم مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که تک تک آن‌ها صفر باشند.

بنابراین ریشه‌های معادله  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 0$  را مشخص و در دیگری قرار می‌دهیم. مقداری از  $m$  که به ازای آن رادیکال دوم صفر باشد، جواب معادله خواهد بود.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{(1)^3 - m + m - 3} = \sqrt{-2} \text{ غیرممکن}$$

$$x = 3 \Rightarrow \sqrt{(3)^3 - 3(m) + m - 3} = 0 \Rightarrow 27 - 2m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m = 12$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت؛ صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹ و حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۱ ۲ ۳✓ ۴

(میلاد منصوری)

$$\text{با فرض } t = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} \text{ داریم:}$$

$$t + \frac{3}{t} = 4 \Rightarrow \frac{t^2 + 3}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 3$$

$$t = 1: \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = 1 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = x + 1 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t = 3: \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = 3 \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 3x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 2 = 0$$

که چون  $ac < 0$  لذا  $\Delta > 0$ ، دو جواب مخالف صفر دارد. بنابراین معادله ۳ جواب دارد.

(حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(سعید مدیرفراسانی)

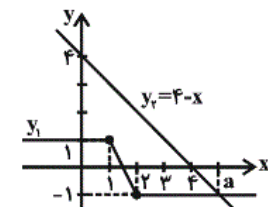
$$|5 + x|(x - 2) = |x - 2|(5 + x) \Rightarrow \frac{|5 + x|}{|x - 2|} = \frac{5 + x}{x - 2} \Rightarrow \frac{5 + x}{x - 2} \geq 0$$

شامل بی‌شمار عدد صحیح است.  $\Rightarrow (-\infty, -5] \cup [2, +\infty)$  = مجموعه جواب

(حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۰)

۱ ۲ ۳ ۴✓

(سعید مدیرفراسانی)



$$|x - 2| - |x - 1| + x \geq 4$$

$$\Rightarrow \overbrace{|x - 2| - |x - 1|}^{y_1} \geq \overbrace{4 - x}^{y_2}$$

مجموعه جواب نامعادله‌ی بالا بازه‌ای است که

نمودار  $y_1$  بالای نمودار  $y_2$  باشد.

مجموعه جواب  $[a, +\infty)$

برای پیدا کردن عدد  $a$  دو معادله را مساوی هم قرار می‌دهیم  $|x - 2| - |x - 1| = 4 - x$

$$\xrightarrow{a > 4} x - 2 - x + 1 = 4 - x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a - 3 = 7$$

(حسابان - مسابقات پیری، معادلات و نامعادلات؛ صفحه‌های ۳۳ تا ۴۲)

۱ ۲ ۳✓ ۴



(ایمان نستین)

$$\sqrt{-x^2 + 2x + 3} < |x+1| - 2$$

$$\text{دامنه} \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad (1) \\ |x+1| - 2 > 0 \Rightarrow |x+1| > 2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 2 \\ x+1 < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 < x \leq 3 \xrightarrow[\substack{x > 1 \\ |x+1| = x+1}]{} \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < (x+1) - 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x + 3} < x - 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x^2 + 2x + 3 < x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 4x - 2 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - 2 > 0$$

۴

۳

۲

۱ ✓

(کیا مقدس نیاک)

$$\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} = |\sqrt{x-1}-2|$$

$$\sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3|$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

$$A = \sqrt{x-1}-2 \Rightarrow |A| + |A-1| = 1$$

با حل معادله‌ی فوق، وقتی  $0 \leq A \leq 1$  باشد بر خط  $y=1$  منطبق می‌شود. پس:

$$0 \leq \sqrt{x-1}-2 \leq 1 \Rightarrow 5 \leq x \leq 10 \Rightarrow 6 \text{ جواب صحیح}$$

(مسایان - تناسبات فیبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۲۸ تا ۴۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه ۱، هندسه‌ی فضایی (هندسه‌ی ۱)، هندسه‌ی فضایی - ۱۳۹۵۰۹۱۹

(معمور مموری)

فرض کنیم  $a$  اندازه‌ی یال قاعده و  $h$  ارتفاع مکعب مستطیل باشد. داریم:

$$a\sqrt{2} = \text{اندازه‌ی قطر قاعده} \Rightarrow a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 2$$

$$16\sqrt{2} = 4a \times h \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی مکعب مستطیل}$$

$$\xrightarrow{a=2} h = 2\sqrt{2}$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = a^2 h = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۲)

۴

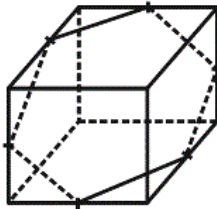
۳

۲ ✓

۱

-۱۴۲

(سیرامیر ستوده)



فرض کنیم طول ضلع شش ضلعی منتظم  $x$  باشد.

بنابراین مساحت آن  $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$  است و از طرفی مساحت آن برابر  $\sqrt{6}$  است.

پس  $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \sqrt{6}$  و در پی آن  $x^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ، پس مساحت یک وجه

مکعب برابر  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  است و مساحت کل مکعب  $6 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$  می‌شود.

(هندسه ۱ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

-۱۴۳

(معمرداهر شعاعی)

مساحت جانبی منشور منتظم مثلث القاعده برابر  $3a^2$  (طول یال منشور)  $6b^2$  مساحت کل مکعب برابر  $6b^2$  است. داریم:

$$3a^2 = 6b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = b\sqrt{2}$$

$$\frac{V_{\text{منشور}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \times a}{b^3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(هندسه ۱ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۲)

۴

۳

۲

۱

-۱۴۴

(معمربراهیم گیتی زاده)

(ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده)  $\frac{1}{3} =$  حجم هرم

$$S = 3\sqrt{3} \times 3 = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \cdot h = 18\sqrt{3} \Rightarrow h = 6$$

چون چهار یال جانبی با هم مساوی‌اند، نقطه‌ی  $O$  پای ارتفاع وارد از رأس  $S$  بر صفحه‌ی قاعده، نقطه‌ی وسط قطر مستطیل است.

$$AC = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $SOC$  داریم:  $SO = h = 6$ ،  $OC = \frac{AC}{2} = 3$

$$\Rightarrow SC^2 = SO^2 + OC^2 = 6^2 + 3^2 = 45 \Rightarrow SC = 3\sqrt{5}$$

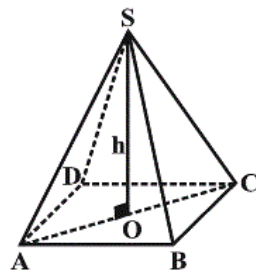
(هندسه ۱ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۴

۳

۲

۱



۱۴۵-

(معمردضا دلاورنژاد)

$$OA = h, \hat{OAB} = \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{R}{L} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 30^\circ \Rightarrow \tan \theta = \frac{R}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = R\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2 (R\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3 = 9\sqrt{3}\pi$$

$$\Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3 \Rightarrow S_{\text{قاعده}} = \pi R^2 = 9\pi$$

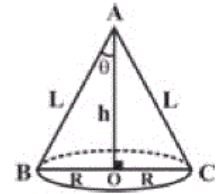
(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۴

۳

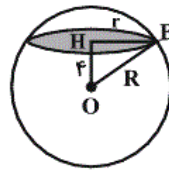
۲ ✓

۱



۱۴۶-

(رضا عباسی اصل)



شعاع دایره‌ی سطح مقطع را  $r$  می‌نامیم، داریم:

$$\text{محیط سطح مقطع} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow 6\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 3$$

بنابه قضیه فیثاغورس در مثلث  $OBH$  داریم:

$$R^2 = r^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow R = 5$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 5^2 = 100\pi$$

حال:

(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۳۶ تا ۱۴۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۴۷-

(معمرمهری مسس زاده طبری)

دو مخروط یکسان پدید می‌آید که شعاع قاعده‌ی هر یک از مخروط‌ها برابر با

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  بوده و ارتفاع هر مخروط نیز برابر  $\frac{a}{2}$

$$V = 2 \times \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V = 2 \times \frac{1}{3}\pi (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 16\pi$$

(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۴

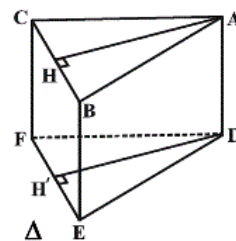
۳ ✓

۲

۱

۱۴۸-

(نویر میری)



برای این که یک مکعب مستطیل ساخته شود، باید صفحه‌ی عمود بر قاعده‌های منشور، شامل ارتفاع وارد بر قاعده‌ی  $BC$  در مثلث  $ABC$  باشد تا مکعب مستطیل شکل زیر به دست آید. که ارتفاعش با ارتفاع منشور برابر است. حال داریم:

$$\Delta AHC \text{ در مثلث: } AH = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - 2^2}$$

$$\Rightarrow AH = 5\sqrt{2}$$

$$\text{حجم مکعب مستطیل} = AH \times CH \times AD$$

$$= 5\sqrt{2} \times 2 \times AD = 10$$

$$\Rightarrow AD = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

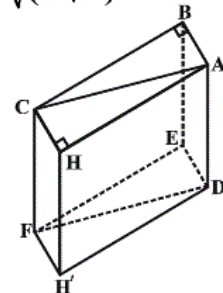
(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۱۷ تا ۱۲۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



۱۴۹-

(نوید میری)

اگر  $a$  اندازه‌ی ضلع هر کدام از مثلث‌های متساوی الاضلاع باشد، آن‌گاه داریم:

$$4 \times \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3} \Rightarrow 54\sqrt{3} = a^2 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

اما ارتفاع وارد بر قاعده‌ی این چهار وجهی، برابر با  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$  است. در نتیجه خواهیم

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times h = \frac{1}{3} \times \left( \frac{54\sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{3\sqrt{6} \times \sqrt{6}}{3} = 27\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۲۹ تا ۱۳۵)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱۵۰-

(مهدی طاهر شعاعی)

استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۲ و شعاع قاعده‌ی  $4\sqrt{2}$  مفروض است. بنابه فرض  $h = 2$  و  $r = 4\sqrt{2}$  در نتیجه:

$$OA^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4\sqrt{2})^2$$

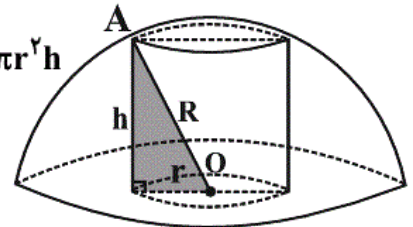
$$= 4 + 32 = 36 \Rightarrow R = 6$$

$$\text{حجم بین استوانه و نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3 - \pi r^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi \times 6^3 - \pi \times (4\sqrt{2})^2 \times 2$$

$$= \frac{2}{3} \pi \times 216 - \pi \times 32 \times 2 = 144\pi - 64\pi = 80\pi$$

(هندسه ۱ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۲۶ و ۱۳۶ تا ۱۴۱)



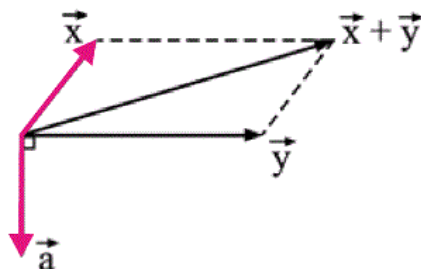
۱ ۲ ۳✓ ۴

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، بردار - ۱۳۹۵۰۹۱۹

۱۲۱-

(سراسری ریاضی - ۸۶)

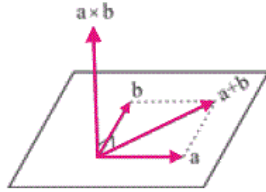
در بین گزینه‌ها، باید حالتی را بیابیم که  $a \cdot (x + y) \neq 0$ ، یعنی به عبارت دیگر بردار  $a$  نباید بر بردار غیر صفر  $(x + y)$  عمود باشد. در گزینه‌ی «۲»، اگر بردار  $a$  فقط بر یکی از بردارهای  $x$  یا  $y$  عمود باشد، دلیلی ندارد که بر بردار  $x + y$  نیز عمود باشد، پس  $a \cdot (x + y) \neq 0$ . شکل زیر را در نظر بگیرید.



(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

۱ ۲✓ ۳ ۴

۱- برای هر دو بردار دلخواه مانند  $a$  و  $b$ ، بردار  $a + b$  در صفحه‌ی دو بردار  $a$  و  $b$  قرار می‌گیرد.



۲- برای هر دو بردار دلخواه مانند  $a$  و  $b$ ، بردار  $a \times b$  بر صفحه‌ی دو بردار  $a$  و  $b$  عمود است.

۳- حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.

نتیجه این که برای هر دو بردار دلخواه  $a$  و  $b$ ، بردار  $a + b$  بر بردار  $a \times b$  عمود است، یعنی همواره  $(a + b) \cdot (a \times b) = 0$  و در این سؤال به ازای هر عدد حقیقی  $m$ ، رابطه برقرار است.

(هندسه تحلیلی - بردار: صفحه‌های ۱۷ و ۲۵ تا ۲۸)

۴

۳

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی - گواه، خط و صفحه - ۱۳۹۵۰۹۱۹

$$L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow L_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$$

$$L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+a}{2} = -z$$

$x$ ،  $y$  و  $z$  را برحسب معادلات پارامتری خط  $L_1$  در معادلات متقارن خط  $L_2$

$$\frac{(2t-1)-3}{1} = \frac{(-t+2)+a}{2} = -2t \Rightarrow \text{قرار می‌دهیم:}$$

$$2t-4 = \frac{-t+(a+2)}{2} = -2t \Rightarrow \begin{cases} 2t-4 = \frac{-t+(a+2)}{2} \quad (1) \\ 2t-4 = -2t \Rightarrow t=1 \end{cases}$$

$t=1$ ، باید در معادله‌ی (۱) صدق کند:

$$2t-4 = \frac{-t+(a+2)}{2} \xrightarrow{t=1} a = -5$$

(هندسه تحلیلی - خط و صفحه: صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱)

۴

۳

۲

۱

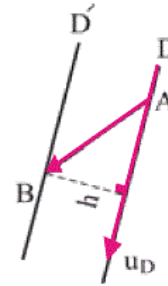
(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸)

$$D: \begin{cases} x+y=2 \Rightarrow x=-y+2 \\ x-z=4 \Rightarrow x=z+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D: x = -y + 2 = z + 4$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_D = (1, -1, 1)$$

$$D': \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \mathbf{u}_{D'} = (1, -1, 1)$$



دو خط  $D$  و  $D'$  موازیند (زیرا  $\mathbf{u}_D \parallel \mathbf{u}_{D'}$ )، نقطه‌ی  $A = (0, 2, -4)$  را روی خط  $D$  و نقطه‌ی  $B = (2, 0, 1)$  را روی خط  $D'$  در نظر می‌گیریم، برای بدست آوردن فاصله‌ی بین دو خط موازی  $D$  و  $D'$ ، کافیست فاصله‌ی نقطه‌ی  $B$  را از خط  $D$  بدست

$$h = \frac{|\overline{AB} \times \mathbf{u}_D|}{|\mathbf{u}_D|} = \frac{|(2-0, 0-2, 1+4) \times (1, -1, 1)|}{|(1, -1, 1)|} \quad \text{آوریم:}$$

$$= \frac{|(2, -2, 5) \times (1, -1, 1)|}{|(1, -1, 1)|} = \frac{|(3, 3, 0)|}{|(1, -1, 1)|}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + 3^2 + 0}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - فُظ و صفحه: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

(سراسری ریاضی - ۹۴)

-۱۲۵

نقطه‌ای روی خط داده شده و  $B(0, 3, 0)$  نقطه‌ی معلوم از صفحه‌ی مورد نظر است پس بردار نرمال صفحه‌ی  $P$  برابر است با  $\overline{AB} \times \mathbf{u}$  (یا موازی آن)

$$\overline{AB} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{n} = (1, -1, -1)$$

$$P: x - y - z = -3$$

معادله‌ی محور  $Z$  به صورت  $(x=0, y=0)$  است که از تلاقی آن با صفحه‌ی

$$P \text{ نتیجه می‌شود } Z = 3$$

(هندسه تحلیلی - فُظ و صفحه: صفحه‌های ۳۲ و ۳۳)

۴✓

۳

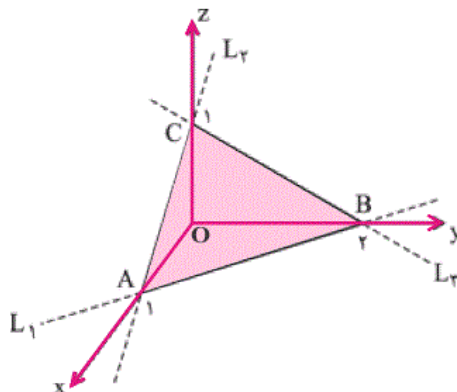
۲

۱

مطابق شکل، با رسم سه خط  $L_1: \begin{cases} 2x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$  و  $L_2: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$L_3: \begin{cases} 2z + y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ ، در دستگاه مختصات، درمی‌یابیم که حجم

هرم  $O-ABC$  مد نظر است.



با در نظر گرفتن  $OAB$  به عنوان قاعده و  $CO$  به عنوان ارتفاع این هرم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} CO = 1 \\ S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} (1)(2) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(O-ABC) = \frac{1}{3} S(\triangle OAB) \cdot CO = \frac{1}{3} (1)(1) = \frac{1}{3}$$

(هندسه تحلیلی - فُظ و صَفْهه: صَفْهه‌های ۳۲ تا ۴۷)

۱ ✓  ۲  ۳  ۴

$B(0, 6, 12)$  ;  $\overline{AB} = (-1, 2, 10)$  نقطه‌ای از فصل مشترک

$$u = n_1 \times n_2 = (2, 3, -1) \times (3, -2, 1) = (1, -5, -13)$$

$$n = u \times \overline{AB} = (1, -5, -13) \times (-1, 2, 10) = (-24, 3, -3)$$

$$\div 3 \\ \Rightarrow n = (-8, 1, -1)$$

$$\left. \begin{matrix} n = (-8, 1, -1) \\ A = (1, 4, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow -8x + y - z = -6 \xrightarrow{x=0, y=0} z = 6$$

(هندسه تحلیلی - فُظ و صَفْهه: صَفْهه‌های ۳۲ تا ۴۶)

۱  ۲  ۳  ۴

(سراسری ریاضی - ۱۴)

$$A, B \in \text{دایره} \Rightarrow |O'A| = |O'B| = R$$

$$\Rightarrow |O'A|^2 = |O'B|^2$$

$$\Rightarrow (a-2)^2 + (2a-1)^2 = (a+1)^2 + (2a-4)^2 \Rightarrow a=2$$

$$R = |O'A| = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = 3$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

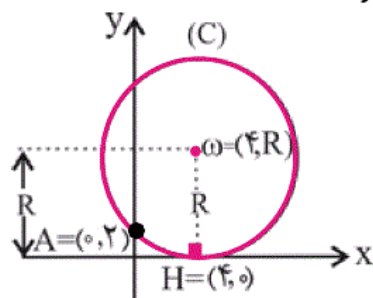
۳

۲

۱ ✓

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۱۵)

ابتدا با توجه به فرضیات مسأله، شکلی از آن ترسیم می‌کنیم. همان‌طور که در متن درس اشاره شده اگر دایره‌ای به شعاع  $R$  در بالای محور  $x$  ها بر آن مماس باشد، آنگاه عرض مرکز آن برابر  $R$  است.



$$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \xrightarrow{\omega(4, R)}$$

$$C: (x - 4)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

$$\xrightarrow{A(0, 2) \in C} (0 - 4)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 16 + (4 - 4R + R^2) = R^2$$

$$\Rightarrow 20 - 4R = 0 \Rightarrow R = 5$$

$$\Rightarrow C: (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$\xrightarrow{x=0} (0 - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25 \Rightarrow (y - 5)^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{تقاطع با محور } y \text{ ها} \\ \Rightarrow y - 5 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} y - 5 = 3 \Rightarrow y = 8 \\ y - 5 = -3 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱



مختصات مرکز دایره را به صورت  $\omega(\alpha, \beta)$  در نظر می‌گیریم، چون دایره بر دو خط به معادلات  $y - x = 0$  و  $y - x - 4 = 0$  مماس است، پس فاصله‌ی مرکز آن از این دو خط با هم برابر است:

$$\frac{|\beta - \alpha|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\beta - \alpha - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow |\beta - \alpha| = |\beta - \alpha - 4|$$

$$\xrightarrow{\alpha = -1} |\beta + 1| = |\beta - 3| \Rightarrow \begin{cases} \beta + 1 = +(\beta - 3) & \text{غیر قابل قبول} \\ \beta + 1 = -(\beta - 3) \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

و شعاع دایره، برابر با فاصله‌ی مرکز، از خط مماس بر دایره است، داریم:

$$\begin{cases} \omega(-1, 1) \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|-1 - 1|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲

۱ ✓