



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

۹۱- اگر S و V به ترتیب مساحت کل و حجم یک مکعب باشند، ضابطه‌ی تابعی که V را به S وابسته می‌کند، کدام

است؟

$$V = \frac{S\sqrt{S}}{6} \quad (۲)$$

$$V = \frac{S}{6} \quad (۱)$$

$$V = 6S\sqrt{\frac{S}{6}} \quad (۴)$$

$$V = \frac{S\sqrt{6S}}{36} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{||x|-1}$ ، چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

۲ (۲)

۱ (۱)

بی‌شمار (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۳- چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد که تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a & ; x \geq 0 \\ x + 6 & ; x < 0 \end{cases}$ یک به یک نباشد؟

۳ (۲)

۲ (۱)

بی‌شمار (۴)

۵ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۴- برد تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{-2x - x^2}$ بازه‌ی $[a, b]$ است. $b - a$ کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۵- اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ 2x - 2, & x < 0 \end{cases}$ باشد، تابع $(g \circ f)(x)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

-۲ (۴)

۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۶- اگر $f = \{(2, 3), (-1, 2), (3, 1), (-2, -1)\}$ ، آنگاه تابع $f + f^{-1}$ ، شامل کدام زوج مرتب زیر نیست؟

$(-1, 0)$ (۲)

$(2, 2)$ (۱)

$(3, 3)$ (۴)

$(-2, 3)$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۷- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$ ، آنگاه $(f \circ f)(x)$ چگونه تابعی است؟

(۲) فقط زوج است.

(۱) فقط فرد است.

(۴) نه زوج و نه فرد است.

(۳) هم زوج و هم فرد است.

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$ باشد، معکوس این تابع کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- هرگاه f دارای دوره‌ی تناوب $T = 4$ باشد و در فاصله‌ی $[0, 4]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - x$ تعریف

شود، $f(23)$ کدام است؟

۲ (۲)

۱) صفر

۱۲ (۴)

۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 - [x] \leq 0$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

$$\{x \mid x = 0, 1\} \quad (۲)$$

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \quad (۱)$$

$$\{x \mid x \geq 1 \cup x \leq -1\} \quad (۴)$$

$$\{x \mid x > 1\} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۱- سه نقطه A ، B و C روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. مرکز این دایره، محل هم‌مرسی کدام دسته از اجزای مثلث ABC است؟

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| (۱) نیمسازهای داخلی | (۲) عمود منصف‌های اضلاع |
| (۳) میانه‌ها | (۴) ارتفاع‌ها |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع $2(a+1)$ و $2a$ و $a+2$ ، مجموع فواصل نقطه هم‌مرسی عمود منصف‌های مثلث از سه رأس آن کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| (۱) ۱۲ | (۲) ۱۵ |
| (۳) ۱۸ | (۴) ۲۱ |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در صفحه‌ی P ، نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۲ سانتی‌متر از خط d واقع است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی A و خط d به فاصله‌ی ۹ سانتی‌متر است؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (۱) دقیقاً ۱ نقطه | (۲) حداکثر ۱ نقطه |
| (۳) دقیقاً ۲ نقطه | (۴) حداکثر ۲ نقطه |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- دو خط متقاطع d و d' ، با یکدیگر زاویه‌ی 30° درجه می‌سازند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر d و d' مماس هستند، کدام است؟

- | | |
|---|----------------------|
| (۱) دو خط متقاطع با زاویه‌ی 30° درجه | (۲) دو خط عمود بر هم |
| (۳) دو خط متقاطع با زاویه‌ی 60° درجه | (۴) یک خط راست |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- چند مثلث ABC ، با معلومات $\hat{A} = 60^\circ$ و $BC = 9$ و طول میانه‌ی $AM = 4$ می‌توان رسم کرد؟

- | | |
|---------|-------------|
| (۱) ۱ | (۲) ۲ |
| (۳) هیچ | (۴) بی‌شمار |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- دو دایره‌ی $C(O, m+7)$ و $C'(O', m+4)$ با طول خط‌المركزین $OO' = d = 3m - 4$ مفروض‌اند. اگر این دو دایره متقاطع باشند، مجموعه‌ی مقادیر m کدام است؟

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| (۱) $\frac{7}{2} < m < 15$ | (۲) $\frac{7}{3} < m < 15$ |
| (۳) $\frac{7}{3} < m < 10$ | (۴) $\frac{7}{2} < m < 10$ |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- دایره‌ی $C(O, 10)$ و نقطه‌ی معلوم M به فاصله‌ی ۶ از مرکز O مفروض‌اند. از نقطه M وتر AB را با کوتاه‌ترین طول در دایره رسم می‌کنیم. اگر $ABDE$ ، مستطیل محاط در دایره‌ی C باشد، طول ضلع BD کدام است؟

- | | | | |
|--------|------------------|--------|------------------|
| (۱) ۱۲ | (۲) $12\sqrt{3}$ | (۳) ۱۶ | (۴) $16\sqrt{2}$ |
|--------|------------------|--------|------------------|

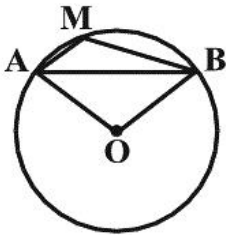
شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در دایره‌ای به شعاع ۵، بیشترین فاصله نقاط روی دایره از وتری به طول ۸ در این دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{2}$ (۲) ۷ (۳) $\frac{15}{2}$ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

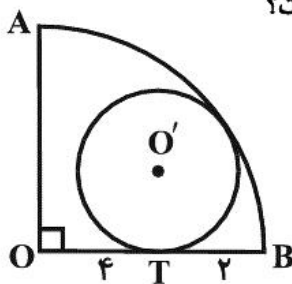
۱۲۹- در شکل زیر، $\widehat{AOB} = \widehat{AMB}$ و $\widehat{OAM} = 2\widehat{OBM}$ است. اندازه‌ی کمان AM چه قدر است؟



- (۱) 20°
(۲) 24°
(۳) 30°
(۴) 32°

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- دایره‌ای به مرکز O' و ربع دایره‌ای به مرکز O مماس درون‌اند. شعاع دایره کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۳۱- اگر $\{1, \{2\}\} = \{a, \{a-b\}\}$ آن گاه مجموعه‌ی $\{a, b, a^2, b^2\}$ چند عضوی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \emptyset\}$ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\{a, \{a\}\} \subseteq A$ (۲) $\{\{\}\} \subseteq A$
(۳) $\{\{a\}, \emptyset\} \in A$ (۴) $\{a, \{a\}\} \in A$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- اگر به مجموعه‌ی $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$ ، عضو $\{a, b\}$ را اضافه کنیم، آن گاه این مجموعه دارای چند زیر مجموعه‌ی شامل عضو a می‌باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۸
(۳) ۱۲ (۴) ۱۶

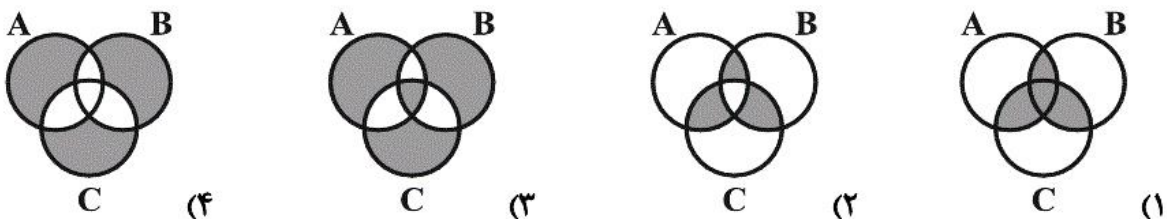
شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در کلاسی از ۳۵ دانش‌آموز، ۳ نفر عضو هیچ تیمی نیستند. اگر ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال باشند، چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار ون برای مجموعه‌ی $A \Delta (B \Delta C)$ است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- اگر $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} \leq x \leq n\}$ باشد، آن گاه $\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$ کدام است؟

- (۱) $[0, +\infty)$
(۲) $(0, +\infty)$
(۳) $(\frac{1}{2}, +\infty)$
(۴) $(\frac{1}{4}, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- برای دو مجموعه A و B ، اگر $B - A' \subseteq A' \cup B'$ باشد، آن گاه حاصل $(A - B) - (A' \cup B)$ همواره کدام است؟ (U مجموعه‌ی مرجع است.)

- (۱) \emptyset
(۲) A
(۳) B
(۴) U

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- حاصل $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) \emptyset
(۲) A
(۳) B
(۴) $A \cup B$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- اگر $A = \{7k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{8k + 1 \mid k \in \mathbb{A}\}$ باشد، $B - A$ شامل چند عضو سه رقمی است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱۵
(۳) ۱۶
(۴) ۱۷

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- از مجموعه‌ی $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ، به چند طریق می‌توان دو زیر مجموعه مانند A و B را انتخاب کرد

به طوری که $A \cap B = \emptyset$ باشد؟ (U مجموعه‌ی مرجع است.)

- | | |
|--------|--------|
| ۵۴ (۲) | ۱۶ (۱) |
| ۶۴ (۴) | ۸۱ (۳) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۰۱- اگر عدد $x + \sqrt{2}y$ وارون $-1 + \sqrt{2}$ باشد، در این صورت $x + y$ کدام است؟ ($x, y \in \mathbb{Q}$)

- | | |
|---------|-------|
| صفر (۲) | ۲ (۱) |
| -۱ (۴) | ۳ (۳) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر $\frac{3}{10} = \frac{a}{2b}$ باشد، b کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۶ (۲) | ۳ (۱) |
| ۷ (۴) | ۹ (۳) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- بازه‌ی $(\frac{b}{6}, 2a - 1)$ ، بازه‌ای متقارن به مرکز $\frac{7}{3}$ و بیش‌ترین شعاع ممکن، شامل ۴ عدد صحیح است. b کدام است؟

- | | |
|--------------------|--------|
| $\frac{31}{3}$ (۲) | ۳۴ (۱) |
| ۸ (۴) | ۲۸ (۳) |

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر $|y| < x$ باشد، کدام نامساوی همواره درست است؟

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{y} \quad (1)$$

$$x < -y \quad (2)$$

$$\frac{1}{x} < -y \quad (3)$$

$$x^4 > y^4 \quad (4)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-2| \leq |x^2-4|$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$\text{بی‌شمار} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اولین جمله‌ی مثبت در دنباله‌ی $a_n = \frac{n-120}{2n-1} + \frac{1}{10}$ کدام است؟

$$\text{صد و یکم} \quad (2)$$

$$\text{صد} \quad (1)$$

$$\text{صد و سوم} \quad (4)$$

$$\text{صد و دوم} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- دنباله‌ی $a_n = (-1)^n \frac{3n-5}{2n-17}$ در پنجاه جمله‌ی اول، چند جمله‌ی منفی دارد؟

$$24 \quad (2)$$

$$23 \quad (1)$$

$$26 \quad (4)$$

$$25 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- کدام دنباله فقط از پایین کران دار است؟

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\} \quad (۴)$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}\} \quad (۱)$$

$$\left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{n+1} \right\} \quad (۴)$$

$$\left\{ \frac{(-1)^n n+1}{n+2} \right\} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- کدام دنباله نزولی است؟

$$\left\{ n - \frac{1}{n} \right\} \quad (۴)$$

$$\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} \quad (۱)$$

$$\{(\sqrt{2}-1)^{-n}\} \quad (۴)$$

$$\{\sqrt{n} - n^2\} \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5, & n \text{ فرد} \\ \frac{5n-7}{n+1}, & n \text{ زوج} \end{cases}$$

در $n \geq M$ برای هر M نامساوی $|a_n - 5| < 0.1$ صدق می‌کنند. کوچک‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟

$$۵۱ \quad (۲)$$

$$۵۰ \quad (۱)$$

$$۱۲۰ \quad (۴)$$

$$۱۱۹ \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- مجموع مولفه‌های قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, 3, -1)$ ، نسبت به صفحه‌ی xy را m و مجموع مؤلفه‌های قرینه‌ی A ، نسبت به محور z ها را n می‌نامیم. کدام رابطه صحیح است؟

- (۱) $m - n = 0$
 (۲) $m + n = 0$
 (۳) $2m - 3n = 0$
 (۴) $2m + 3n = 0$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- مجموع مقادیر m که به ازای آن، نقطه‌ی $A(1, m-1, 1)$ از دو صفحه‌ی xy و xz به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) -۱
 (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- بردار جهت $a = (2, 3, b)$ ، به صورت $e_a = (m, n, 2m)$ است. حاصل $\frac{bn}{m}$ کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) $3\sqrt{2}$
 (۳) ۶
 (۴) $\sqrt{29}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- اگر زاویه‌ی بردار $c = (m, n-1, 5)$ با هر دو بردار $a = (3, 4, 0)$ و $b = (2, -2, 1)$ یکسان باشد. در این صورت حاصل $m + 2n$ کدام است؟ (بردارهای a ، b و c هم صفحه هستند.)

- (۱) ۵
 (۲) ۲۵
 (۳) -۵
 (۴) -۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- دو نقطه‌ی ثابت $A = (1, -3, -2)$ و $B = (-1, 3, 1)$ و نقطه‌ی متغیر M روی صفحه‌ی xy را در نظر می‌گیریم، اگر $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 4$ ، آن گاه مکان هندسی نقطه‌ی M کدام است؟

- (۱) یک خط گذرنده از مبدأ مختصات
 (۲) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۴
 (۳) دو خط گذرنده از مبدأ مختصات
 (۴) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $2\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- اگر بردارهای a و b ناصفر باشند و $|a+b| = |a| + |b|$ در این صورت زاویه بردارهای a و b کدام است؟

- (۱) صفر
 (۲) 60°
 (۳) 90°
 (۴) 180°

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴، با هم زاویه‌ی 60° می‌سازند، حاصل $(2a-b) \cdot (a+b)$ کدام است؟

- (۱) ۴۰
 (۲) ۳۴
 (۳) ۱۶
 (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

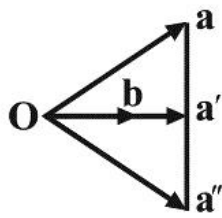
۱۴۸- بردار $a = (m, 3, m-4)$ مفروض است، اگر α ، β و γ زوایای این بردار با محورهای مختصات باشد، به طوری که $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه m کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- بردار $a'' = (4, 1, 0)$ مطابق شکل، قرینه‌ی بردار $a = (0, 1, -4)$ نسبت به راستای بردار معلوم b است. اگر

$$|b| = \frac{3}{2} \text{ ، کدام است } b?$$



(۲) $(\frac{1}{2}, 1, -1)$

(۱) $(1, \frac{1}{2}, -1)$

(۴) $(1, \frac{1}{2}, 1)$

(۳) $(1, -\frac{1}{2}, -1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- برای نقطه‌ی $A = (x, y, z)$ ، رابطه‌ی $x + \sqrt{2}y - z = 28$ برقرار است. کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ

مختصات کدام است؟

(۲) ۱۴

(۱) ۱۳

(۴) ۱۵

(۳) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۸۱- چند گراف ساده با مجموعه‌ی رئوس $v = \{a, b, c, d, e\}$ و اندازه‌ی ۶ وجود دارد که در آن درجه‌ی رأس a ،

برابر ۳ باشد؟

(۲) ۶۰

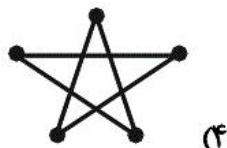
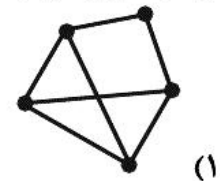
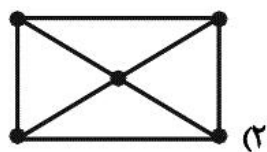
(۱) ۸۰

(۴) ۲۰

(۳) ۴۰

شما پاسخ نداده اید

۱۸۲- کدام گراف زیر، می‌تواند گراف بازه‌ها باشد؟



شما پاسخ نداده اید

۱۸۳- گرافی دارای یک رأس درجه‌ی ۱ و دو رأس درجه‌ی ۲ و ... و دوازده رأس درجه ۱۲ است. این گراف چند یال

دارد؟

(۲) ۱۴۴

(۱) ۵۰

(۴) ۲۷۵

(۳) ۳۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۸۴- در گراف ساده G ، اگر $q \geq 2p + 3$ ، آن گاه حداقل مقدار q کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۵ (۱) | ۱۰ (۲) |
| ۲۱ (۳) | ۶ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۸۵- یک گراف 2 -منتظم از کدام مرتبه، می تواند گراف بازه ها باشد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۵ (۱) | ۶ (۲) |
| ۷ (۳) | ۸ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۸۶- اگر G ، یک گراف r -منتظم از اندازه 12 باشد. به گونه ای که $p = 3r - 1$ ، آن گاه $p + r$ کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۹ (۱) | ۱۱ (۲) |
| ۱۳ (۳) | ۱۵ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۸۷- گراف ساده G از مرتبه 11 و دارای 47 یال است، بیش ترین مقدار $\delta - \Delta$ در این گراف کدام است؟

- | | |
|--------|-------|
| ۱۰ (۱) | ۹ (۲) |
| ۸ (۳) | ۷ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۸۸- در گرافی از مرتبه 6 و اندازه 12 ، $\delta = 4$ است. Δ چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۸۹- کلاسی 15 دانش آموز دارد. اگر 7 نفر آنان، هر کدام a دوست، 5 نفر هر کدام b دوست و 3 نفر هر کدام

c دوست در این کلاس داشته باشند، کدام یک از مقادیر زیر برای a ، b و c ، امکان پذیر است؟

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| $c = 1, b = 2, a = 4$ (۱) | $c = 1, b = 3, a = 5$ (۲) |
| $c = 2, b = 3, a = 4$ (۳) | $c = 3, b = 4, a = 5$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۹۰- فرض کنید G گرافی ساده از مرتبه 100 باشد که رأس های آن از شماره 1 تا 100 برچسب گذاری شده اند

و دو رأس i و j ($1 \leq i, j \leq 100$) با هم مجاورند اگر و فقط اگر $|i - j| = 8$ یا $|i - j| = 12$. این گراف، چند

بخش جدا از هم دارد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۸ (۱) | ۱۲ (۲) |
| ۲۵ (۳) | ۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۹۱- در مطالعه‌ی رنگ و وزن اتومبیل‌های یک مجتمع مسکونی نوع این متغیرها به ترتیب کدام است؟

- (۱) کیفی اسمی - کیفی اسمی
 (۲) کیفی اسمی - کمی گسسته
 (۳) کیفی اسمی - کمی پیوسته
 (۴) کمی پیوسته - کیفی اسمی

شما پاسخ نداده اید

۱۹۲- در کدام گزینه تمام متغیرهای کیفی اسمی، کیفی ترتیبی، کمی پیوسته و کمی گسسته وجود دارند؟

- (۱) سن، جنسیت، میزان تحصیلات، شغل
 (۲) وزن، تعداد فرزندان، جنسیت، شغل
 (۳) شدت آلودگی هوا، گروه خون، مراحل رشد، تعداد فرزندان
 (۴) تعداد تماس‌ها، مراحل تحصیل، رنگ چشم، گروه خون

شما پاسخ نداده اید

۱۹۳- اگر دامنه‌ی تغییرات داده‌های ۱۷، ۱۱، ۶، a و ۱۳ برابر ۱۵ باشد، حاصلضرب مقادیر ممکن a کدام است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۶۴ (۳) ۴۸ (۴) ۲۶

شما پاسخ نداده اید

۱۹۴- در جدول زیر، مقدار $x + 2y + z$ کدام است؟

حدود	۱-۴	۴-۷	۷-۱۰	۱۰-۱۳
فراوانی	۵	۲	x	y
فراوانی تجمعی	z	t	۱۰	۱۴

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳
 (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۹۵- اگر فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم از داده‌های دسته‌بندی شده در جدول زیر برابر ۳۰ باشد، تعداد کل داده‌ها

کدام عدد می‌تواند باشد؟

دسته‌ها	[۱,۲)	[۲,۳)	[۳,۴)	[۴,۵)	[۵,۶]
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۳	۰/۷	x	۱

- (۱) ۱۱۰
 (۲) ۹۵
 (۳) ۸۵
 (۴) ۷۰

شما پاسخ نداده اید

۱۹۶- در یک جدول توزیع فراوانی شامل ۹ طبقه، حد پایین دسته‌ی چهارم ۱۵ و مرکز دسته‌ی هفتم ۳۹/۵ می‌باشد.

دامنه تغییرات داده‌های این جدول، حداکثر کدام است؟

- (۱) ۶۳ (۲) ۵۷
 (۳) ۵۴ (۴) ۷۲

شما پاسخ نداده اید

۱۹۷- با توجه به جدول توزیع فراوانی زیر، اگر درصد فراوانی نسبی داده‌ی ۴، برابر ۲۰ و فراوانی تجمعی این داده

برابر ۱۷ باشد، y کدام است؟

داده‌ها	۱	۲	۳	۴	۵
فراوانی مطلق	۳	y	۵	x	۳

- (۱) ۳ (۲) ۴
 (۳) ۵ (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۹۸- داده‌های آماری در ۹ دسته با طول‌های مساوی طبقه‌بندی می‌شوند که دسته‌ی اول ۲۱-۲۵ است. اگر همین داده‌ها در ۱۲ دسته قرار گیرند مرکز دسته‌ی سوم کدام است؟

- ۲۲/۵ (۱) ۲۶/۵ (۲) ۲۸/۵ (۳) ۲۷/۵ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۹۹- در یک جدول توزیع فراوانی، کران بالایی دسته‌ی اول برابر ۶۶ و کران پایینی دسته‌ی پنجم برابر ۱۲۶ است. اگر تعداد دسته‌ها برابر ۸ باشد، آنگاه کدام یک از مقادیر زیر، می‌تواند دامنه‌ی تغییرات داده‌ها باشد؟

- ۹۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۲۰۰- ۵۰ داده‌ی آماری در ۵ دسته، طبقه‌بندی شده‌اند. فراوانی نسبی دسته‌ی آخر برابر ۰/۱ است. اگر ۳۰ داده‌ی دیگر کوچک‌تر از مرکز دسته‌ی وسط به آن‌ها افزوده شود فراوانی مطلق و فراوانی نسبی دسته‌ی آخر کدام است؟

- ۰/۱ و ۵ (۱) ۰/۰۶۲۵ و ۵ (۲) ۰/۱ و ۸ (۳) ۰/۰۶۲۵ و ۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۱ ، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۶۱- طول ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع $۳\sqrt{۳}$ واحد است، مساحت این مثلث چند واحد مربع است؟

- ۱۲ $\sqrt{۳}$ (۱) ۹ $\sqrt{۳}$ (۲) ۸ $\sqrt{۳}$ (۳) ۶ $\sqrt{۳}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۶۲- نسبت طول اضلاع زاویه‌ی قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ به ۴ است. اگر مساحت مثلث ۲۴ باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- ۲/۴ (۱) ۴/۸ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

شما پاسخ نداده اید

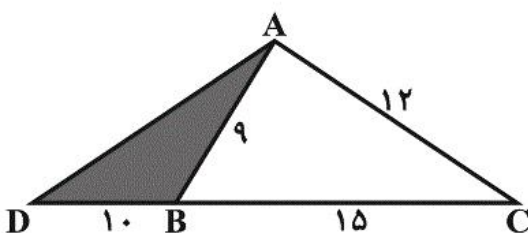
۱۶۳- در شش ضلعی منتظم ABCDEF، مساحت مثلث BEF برابر $۳۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است. محیط شش ضلعی کدام است؟

- ۴۸ (۱) ۴۵ (۲) ۴۲ (۳) ۳۹ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۶۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث ABD کدام است؟

- ۲۷ (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۰ (۴)



شما پاسخ نداده اید

۱۶۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) میانه‌ی نظیر رأس A بر میانه‌ی نظیر رأس B عمود است. اگر اندازه‌ی میانه‌های رأس A و رأس B به ترتیب $3\sqrt{2}$ و 6 واحد باشد. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟

- (۱) $2\sqrt{12}$ (۲) $2\sqrt{18}$ (۳) $4\sqrt{12}$ (۴) $4\sqrt{18}$

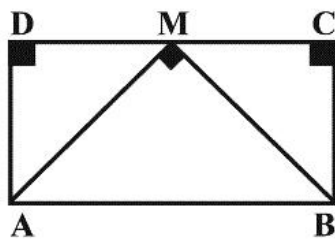
شما پاسخ نداده اید

۱۶۶- قطر مربعی که هشت ضلعی منتظم به ضلع $\sqrt{2}$ در آن محاط شده کدام است؟

- (۱) $4 + \sqrt{2}$ (۲) $2 + \sqrt{2}$ (۳) $2 + 2\sqrt{2}$ (۴) $4 + 2\sqrt{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۷- در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ مستطیل و مثلث MAB قائم‌الزاویه است. اگر حاصل ضرب دو پاره‌خط

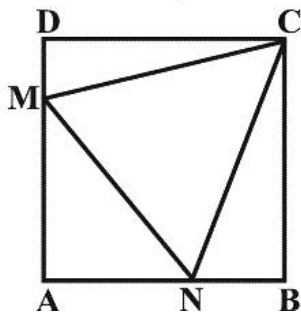


MD و MC برابر ۱۸ باشد، طول ضلع کوچک‌تر مستطیل کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۶۸- در شکل زیر، $ABCD$ یک مربع و CMN یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر مساحت مربع $ABCD$ برابر



یک باشد، مساحت مثلث CMN کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3} - 3$ (۲) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۹- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ ، فاصله‌ی پای ارتفاع نظیر وتر از ضلع متوسط کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{\sqrt{5}}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۷۰- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچک‌تر زاویه‌ی قائمه را در نقطه‌ی M

به فاصله‌ی ۲ واحد از رأس A قطع کرده است. اگر طول ضلع بزرگ‌تر زاویه‌ی قائمه، برابر ۶ باشد. اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) $-2 + 2\sqrt{10}$ (۲) $-2 + 2\sqrt{5}$ (۳) $-1 + \sqrt{10}$ (۴) $-1 + \sqrt{5}$

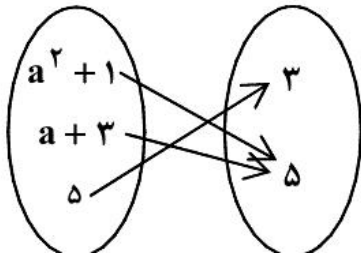
شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- اگر زوج‌های مرتب $(0, -x+y)$ و $(x^2+2y, -4)$ با هم برابر باشند، مقدار $x+y$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -۳ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر تابع زیر که به صورت نمودار ون نشان داده شده است یک‌به‌یک باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ۱
(۴) -۱

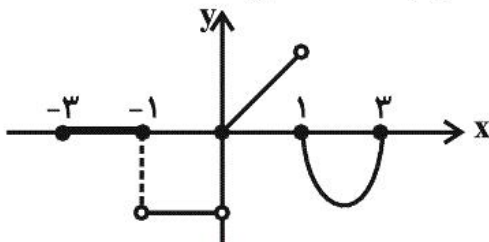
شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- به ازای چه حدودی از a ، نمودار تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 - 2ax + a - 3$ ، از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

- (۱) $a \geq 0$ (۲) $a < 3$ (۳) $a > 3$ (۴) $0 \leq a < 3$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه‌ی $y = \frac{1}{\sqrt{xf(x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) صفر
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $f(x) = 2x+1$ باشد، مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x^2) - f(2x) - 6 < 0$ کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 3$
(۲) $-3 < x < 1$
(۳) $x < -1$ یا $x > 3$
(۴) $x < -3$ یا $x > 1$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر معادله‌ی $x - 2\sqrt{x-2} + m = 4$ دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m \geq 2$ (۲) $m < 3$ (۳) $2 \leq m < 3$ (۴) هیچ مقدار m

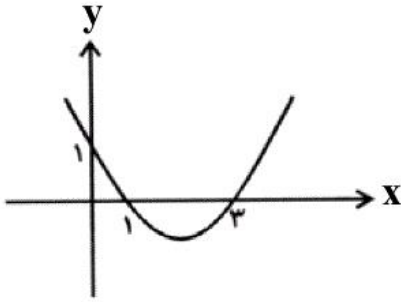
شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- چند عدد طبیعی در نامعادله‌ی $1 - \frac{2x}{x-1} \leq x$ صدق می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- نمودار تابع $y_1 = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. عبارت $y_2 = cx^2 + bx + a$ به ازای چه مقادیری از x منفی است؟



(۱) $x < \frac{4}{3}$ یا $x > 2$

(۲) $\frac{1}{3} < x < 1$

(۳) $\frac{4}{3} < x < 2$

(۴) $x < \frac{1}{3}$ یا $x > 1$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- در معادله $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ ، مجموع مربعات جوابها با ۴ برابر حاصل ضربشان برابر است، مقدار m کدام است؟

(۲) $\frac{9}{5}$

(۴) $\frac{2}{3}$

(۱) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{5}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر f تابع همانی باشد، آنگاه محل برخورد دو تابع $y_1 = f(3x-1)$ و $y_2 = f(2-2x)$ کدام نقطه است؟

(۲) $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$

(۴) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

(۱) $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$

(۳) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۱ - گواه ، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۷۱- در یک مستطیل، مقدار ثابتی از عرض آن کم می‌کنیم و همان مقدار را به طول آن می‌افزاییم تا مستطیل

جدیدی حاصل شود. تغییر مساحت و محیط مستطیل چگونه است؟

(۲) مساحت کم‌تر و محیط بیش‌تر

(۴) مساحت بیش‌تر و محیط ثابت

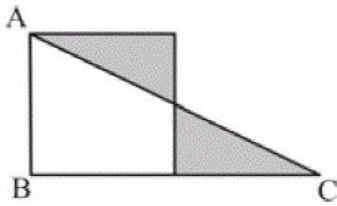
(۱) مساحت ثابت و محیط کم‌تر

(۳) مساحت کم‌تر و محیط ثابت

شما پاسخ نداده اید

۱۷۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، بر روی ضلع AB مربع ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه زده همنهشت باشند،

مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟



$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{5}{9}$ (۱)

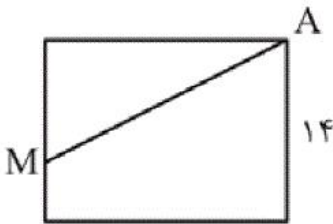
$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۳- در شکل زیر، پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{5}{9}$ تقسیم کرده است. اگر قطر

مستطیل ۲۵ واحد باشد، پاره خط AM چند واحد است؟



۲۱ (۱)

۲۳ (۲)

$9\sqrt{7}$ (۳)

$10\sqrt{6}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۴- در مثلث متساوی‌الساقین $AB = AC = 4$ و $BC = 2\sqrt{7}$ است. ضلع AC را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D

امتداد می‌دهیم ($AD = AC$). اندازه‌ی BD کدام است؟

$4\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۵- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب 10° و

۸ واحد باشند، اندازه قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟

۳/۲ (۲)

۲/۸ (۱)

۴/۲ (۴)

۳/۶ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۶- در مثلث ABC داریم $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$ و $\hat{A} = 90^\circ$ ، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده‌اند. مساحت مثلث

ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

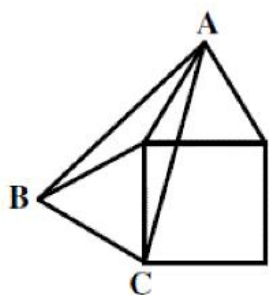
۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۷- در شکل زیر، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است.

مساحت مثلث ABC ، کدام است؟



$\sqrt{6}$ (۱)

$1 + \sqrt{3}$ (۲)

$2 + \sqrt{3}$ (۳)

۴ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۸- قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند

برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟

۲ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۷۹- در یک هشت ضلعی منتظم به ضلع ۶، وسط اضلاع را یک در میان به هم وصل می‌کنیم. مساحت مربع حاصل

چقدر است؟

$54 + 36\sqrt{2}$ (۲)

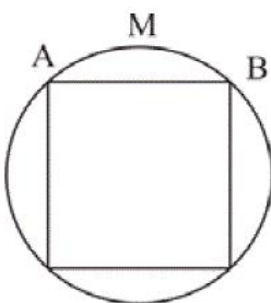
$108 + 6\sqrt{2}$ (۱)

$54 + 6\sqrt{2}$ (۴)

$27 + 18\sqrt{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۸۰- در شکل زیر ضلع مربع برابر ۲ واحد است، فاصله وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ (۲)

$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ (۱)

$\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی - گواه ، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

۱۵۱- بردارهای $(x-3, x, 1)$ و $(x+1, 4, x-1)$ به ترتیب مجموع و تفاضل دو بردار غیرصفر a و b هستند. اگر

زاویه‌ی بین دو بردار a و b منفرجه باشد، آنگاه حدود تغییرات x کدام است؟

$-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$ (۲)

$x < \frac{4}{3}$ (۱)

$-\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ (۴)

$x > -\frac{4}{3}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- اگر $V_1 = 2i + 3j + k$ و $V_2 = i - j + k$ باشد، حاصل $\frac{|V_1 - 2V_2|}{|V_1 + 2V_2|}$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{6}$
(۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- نقاط $A(5, -4, 1)$ ، $B(-1, 2, 4)$ و $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ، مقدار $|\overline{OM}|$ کدام

است؟

- (۱) $\sqrt{10}$
(۲) $\sqrt{11}$
(۳) $\sqrt{13}$
(۴) $\sqrt{14}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- اگر بردار $a = (m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ و دو بردار $a + b$ و $a - b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام

است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

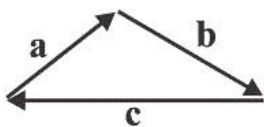
۱۵۵- اگر $|a| = 2\sqrt{6}$ ، $|b| = 5$ و $a \cdot b = 0$ ، اندازه‌ی بردار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۵۶- در شکل زیر اندازه‌ی بردارهای a ، b و c به ترتیب برابر ۳، ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار a و b

کدام است؟



- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۵۷- سه بردار a ، b و c با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ واحد، در رابطه‌ی $a + b + c = 0$ صدق می‌کنند. مقدار

$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ کدام است؟

- (۱) -۳۷
(۲) -۱۹
(۳) ۱۹
(۴) ۳۷

شما پاسخ نداده اید

۱۵۸- سه نقطه‌ی $A(2,1,0)$ ، $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$ ، رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۹- سه بردار $V_1 = (1,-1,a)$ ، $V_2 = (2,b,1)$ و $V_3 = (c,3,2)$ ، دو به دو عمود بر هم هستند. $a + b + c$ کدام است؟

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$8 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۶۰- قرینه‌ی بردار $a = (-2,0,1)$ نسبت به امتداد بردار $b = (1,2,-1)$ ، کدام بردار است؟

$$(-1, 2, 0) \quad (2)$$

$$(1, -2, 0) \quad (1)$$

$$(0, -2, 1) \quad (4)$$

$$(0, 2, 1) \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۱-

(هاری پلاور)

اگر a طول ضلع این مکعب باشد:

$$\begin{cases} S = 6a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{6}} & (1) \\ V = a^3 & (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow V = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}} = \frac{S\sqrt{6S}}{36}$$

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱

۹۲-

(نکین یغمایی)

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow ||x| - 1 = 0 \Rightarrow ||x| = 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq |x| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$$

دامنه‌ی تابع، شامل دو عدد صحیح ۱ و -۱ نمی‌شود.

(حسابان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷ و ۹۹ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱

۹۳-

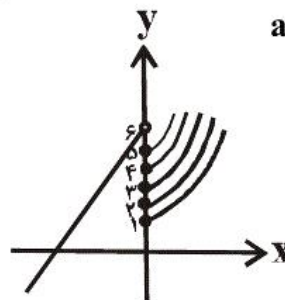
(عمید زرین‌کفش)

با دقت روی نمودار زیر متوجه می‌شویم برای این که تابع داده شده یک به یک

نباشد، باید عرض از مبدأ ضابطه‌ی اول یعنی $y = x^2 + 2a$ از ۶ کم‌تر باشد که

در این صورت مقادیر طبیعی‌ای که برای a وجود دارد تا تابع داده شده یک به

یک نباشد عبارت‌اند از: $a = 1, 2$



(حسابان - تابع: صفحه‌های ۱۸ تا ۱۸)

۴

۳

۲

۱

(هادی پلور)

$$y = \sqrt{-x^2 - 2x} = \sqrt{-(x^2 + 2x)}$$

$$= \sqrt{-(x^2 + 2x + 1 - 1)} = \sqrt{-(x+1)^2 + 1}$$

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x+1)^2 + 1 \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{-(x+1)^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

$$\Rightarrow R_y = [0, 1] \Rightarrow b - a = 1 - 0 = 1$$

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ x = -1 < 0 \end{cases} \text{ غ ق ق} \\ 2x - 2, & x < 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 > 0 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۵۰ و ۵۱ و ۶۹ تا ۷۶)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

(آرش ریمی)

$$f = \{(2, 3), (-1, 2), (3, 1), (-2, -1)\}$$

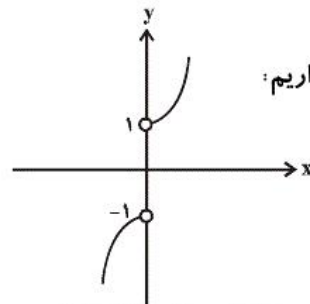
$$\Rightarrow f^{-1} = \{(3, 2), (2, -1), (1, 3), (-1, -2)\}$$

$$\Rightarrow f + f^{-1} = \{(2, 2), (-1, 0), (3, 3)\}$$

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹ و ۸۵ تا ۹۲)

۱ ۲ ۳ ✓ ۴

(عمید ستاری)



با رسم نمودار تابع داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ -x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$$

f فرد است $f \Leftarrow f(-x) = -f(x)$

چون f فرد است، پس داریم:

$$(fof)(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) \Rightarrow \text{fof فرد است.}$$

توجه داشته باشید که دامنه‌های دو تابع f و fof نسبت به محور y ها متقارن است.

(مسایان - تابع: صفحه‌های ۵۰ و ۵۱ و ۶۹ تا ۷۹)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

(عبدالرضا منتظری)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \quad (1) \\ x + 1, & x < 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1, & x \geq 0 \\ y = x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

$$(1) \text{ ضابطه‌ی } x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 1}$$

$$\frac{x \geq 0}{y \geq 1} \rightarrow x = +\sqrt{y - 1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \sqrt{x - 1}, \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ ضابطه‌ی } x = y - 1 \xrightarrow{x < 0, y < 1} x \leftrightarrow y$$

$$\Rightarrow y = x - 1, \begin{cases} x < 1 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عمید زرین‌کفش)

$f(c) = f(c + nT)$ اگر دوره‌ی تناوب T باشد، داریم:

$$23 = 4 \times 5 + 3 \Rightarrow f(23) = f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(امیر غلامی)

$$x^2 - [x] \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq [x]$$

چون $[x] \leq x$ ، پس کافی است جواب‌های بازه‌ی $[0, 1]$ (یعنی مجموعه جواب

$x^2 - x \leq 0$) را بررسی کنیم.

$$0 \leq x < 1: [x] = 0 \Rightarrow x^2 - [x] = x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 1: [x] = 1 \Rightarrow x^2 - [x] = 0 \leq 0 \text{ برقرار است}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \{0, 1\}$$

(مسئله‌ها - تابع: صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

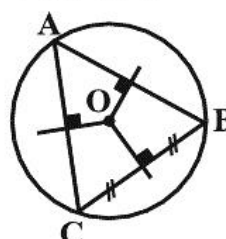
۴

۳

۲ ✓

۱

(ممدابراهیم کیتی زاده)



نقطه O از سه رأس مثلث به یک فاصله است. مکان

هندسی نقاط صفحه که از دو نقطه A و B به یک

فاصله باشند، عمودمنصف پاره خط AB است. بنابراین،

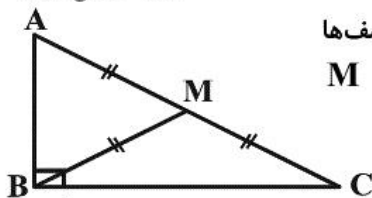
باید نقطه O روی عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC

قرار داشته، یعنی نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها باشد.

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌ی ۳۵، دایره: صفحه‌ی ۵۸)

۱۲۲-

(رضا عباسی اصل)



در مثلث قائم الزاویه، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها در وسط وتر واقع است. پس کافی است فاصله M از سه رأس مثلث را به دست آوریم.

$$\Delta ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow [2(a+1)]^2 = (a+2)^2 + (2a)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow AC = 2 \times 4 + 2 = 10$$

چون M پای میانه نظیر وتر است، داریم:

$$BM = \frac{AC}{2} = 5$$

حال:

$$MB + MA + MC = 5 + 5 + 5 = 15$$

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌های ۳۵)

۴

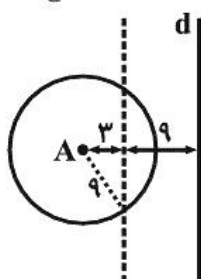
۳

۲ ✓

۱

۱۲۳-

(شروین سیاح‌نیا)



مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله‌ی ۹ هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۹ می‌باشد و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۹ قرار دارند، دو خط موازی در طرفین آن است و محل تلاقی این دو خط با دایره جواب مسأله است که در این‌جا دقیقاً دو نقطه می‌باشد.

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۲۴-

(مسن ممدگریمی)

مرکز این دایره‌ها نقاطی هستند که فاصله‌های آن‌ها تا d، با فاصله‌ی آن‌ها تا d' برابر است. بنابراین همان نیمسازهای زوایای حاصل از برخورد d و d' را تشکیل می‌دهند که به صورت دو خط عمود بر هم می‌باشند.

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

اگر $AM = m_a$ میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد، می‌دانیم:

$$\begin{cases} m_a < \frac{a}{2} \Leftrightarrow 90^\circ < \hat{A} \\ m_a = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 90^\circ = \hat{A} \\ m_a > \frac{a}{2} \Leftrightarrow 90^\circ > \hat{A} \end{cases}$$

حال در این سؤال داریم: $AM = m_a = 4 < \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$

پس باید $90^\circ < \hat{A}$ باشد، درحالی که $\hat{A} = 60^\circ$ است. پس چنین مثلثی قابل رسم نمی‌باشد.

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۳)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(مهدابراهیم کیتی زاره)

اگر دو دایره‌ی $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در دو نقطه متمایز متقاطع باشند، باید داشته باشیم:

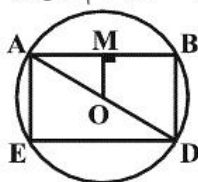
$$\begin{aligned} R - R' < d < R + R' \\ \Rightarrow (m + 7) - (m + 4) < 3m - 4 < (m + 7) + (m + 4) \\ \Rightarrow 3 < 3m - 4 < 2m + 11 \end{aligned}$$

$$7 < 3m < 2m + 15 \Rightarrow \begin{cases} 7 < 3m \Rightarrow \frac{7}{3} < m \\ 3m < 2m + 15 \Rightarrow m < 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3} < m < 15$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌ی ۵۴)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(مهدابراهیم کیتی زاره)



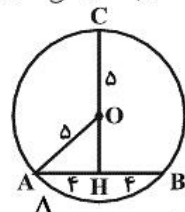
کوتاه‌ترین وتر و تری که از نقطه‌ی M در دایره رسم می‌شود آن است که بر MO عمود باشد. طول این وتر برابر است

$$\begin{aligned} AB &= 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{10^2 - 6^2} = 16 \text{ با:} \\ BD &= 12 \text{ طول ضلع } BD \text{ دو برابر طول } MO \text{ است.} \end{aligned}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(رضا عباسی اصل)



دایره $C(O, 5)$ و وتر AB به طول ۸ را در نظر می‌گیریم. از O بر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند. پس:

$$AH = BH = 4$$

$$OA^2 - OH^2 = AH^2 \Rightarrow 5^2 - 3^2 = 9 \Rightarrow OH = 3$$

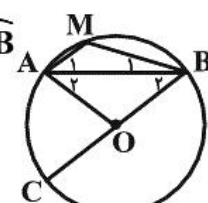
بیشترین فاصله نقاط دایره تا AB عبارت است از:

$$CH = CO + OH = 5 + 3 = 8$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۸ و ۴۹)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(امیرحسین ابومصوب)

$$\widehat{AOB} = \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 2\widehat{AMB}$$


$$\widehat{ACB} + \widehat{AMB} = 36^\circ$$

$$\Rightarrow 3\widehat{AMB} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AMB} = 12^\circ$$

$$\widehat{AMB} + \widehat{AC} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 6^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 3^\circ$$

با توجه به آن که $OA = OB = R$ ، پس مثلث OAB متساوی الساقین است و $\widehat{OAM} = 2\widehat{OBM} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 2(\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2)$ و $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 + 3^\circ = 2(\widehat{B}_1 + 3^\circ) \Rightarrow \frac{\widehat{BM}}{2} + 3^\circ = 2\left(\frac{\widehat{AM}}{2} + 3^\circ\right)$$

$$\times 2 \Rightarrow \widehat{BM} + 6^\circ = 2\widehat{AM} + 12^\circ \Rightarrow \widehat{BM} = 2\widehat{AM} + 6^\circ$$

$$\widehat{AMB} = 12^\circ \Rightarrow \widehat{AM} + \widehat{BM} = 12^\circ$$

$$\Rightarrow 3\widehat{AM} + 6^\circ = 12^\circ \Rightarrow \widehat{AM} = 2^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۴۷ و ۵۱)

- ۱ ✓ ۲ ۳ ۴

(رضا عباسی اصل)

چون دایره به مرکز O' و ربع دایره به مرکز O مماس درون‌اند امتداد OO' از نقطه تماس دو دایره یعنی E می‌گذرد. حال با توجه به شکل داریم:

$$OE = OB = 4 + 2 = 6 \Rightarrow OO' = 6 - r$$

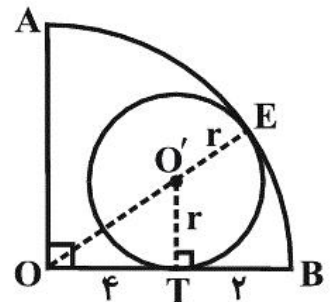
$$\Delta OO'T : OO'^2 = OT^2 + O'T^2$$

$$\Rightarrow (6 - r)^2 = 16 + r^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12r + r^2 = 16 + r^2$$

$$\Rightarrow 12r = 20 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$$

(هندسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)



- ۱ ۲ ۳ ۴

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

(سروش موثینی)

از شرط $\{1, \{2\}\} = \{a, \{a - b\}\}$ داریم:

$$a = 1, a - b = 2 \Rightarrow b = -1$$

حالا مجموعه‌ی جدید با مقادیر $b = -1$ و $a = 1$ ساخته می‌شود:

$$\{a, b, a^2, b^2\} = \{1, -1, 1, 1\}$$

که دارای ۲ عضو است.

(جبر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۶)

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۲-

(رضا پورعسینی)

گزینه‌ی «۱» صحیح است. زیرا یک زیر مجموعه‌ی دو عضوی از A شامل اعضای a و $\{a\}$ است.

گزینه‌ی «۲» صحیح است. زیرا یک زیر مجموعه‌ی تک عضوی از A شامل عضو \emptyset است.

گزینه‌ی «۳» نادرست است. زیرا عضو $\{\{a\}, \emptyset\}$ در A وجود ندارد.

گزینه‌ی «۴» صحیح است. زیرا $\{a, \{a\}\}$ عضوی از مجموعه‌ی A است.

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۳-

(علیرضا شریف‌فطیپی)

مجموعه‌ی جدید، ۵ عضوی می‌شود و 2^5 زیر مجموعه دارد و تعداد زیر مجموعه‌های شامل عضو a ، مطابق اصل ضرب برابر است با $2^4 = 16$ ، زیرا برای a ، یک حالت و برای هر کدام از اعضای b ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{a, b\}$ دو حالت وجود دارد.

(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۴-

(سروش موئینی)

تعداد عضوهای فوتبال و والیبال روی هم $38 = 20 + 18$ هستند. اما کلاً $32 = 35 - 3$ نفر ورزش می‌کنند. پس ۶ نفر در هر دو تیم مشترکند.

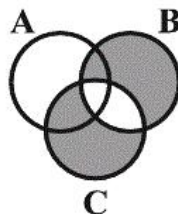
(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۴۴ تا ۵۰)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۵-

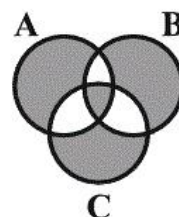
(سیرمسن فاطمی)

نمودار $B \Delta C$ عبارت است از:



$$A \Delta (B \Delta C) = [A - (B \Delta C)] \cup [(B \Delta C) - A]$$

در نتیجه نمودار $A \Delta (B \Delta C)$ برابر می‌شود با:



(ببر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۴۱ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴

(رضا پورعسینی)

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = [\frac{1}{2}, 2] \\ A_3 = [\frac{1}{3}, 3] \\ A_4 = [\frac{1}{4}, 4] \\ \vdots \\ A_n = [\frac{1}{n}, n] \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = (0, +\infty)$$

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷)

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$B - A' \subseteq A' \cup B' \Rightarrow B \cap A \subseteq (A \cap B)'$$

واضح است که یک مجموعه نمی‌تواند زیر مجموعه‌ی متمم خود باشد، مگر آن‌که آن مجموعه، تهی باشد.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B' \Rightarrow A \cap B' = A \\ B \subseteq A' \Rightarrow A' \cup B = A' \end{cases}$$

$$(A - B) - (A' \cup B) = (A \cap B') - (A' \cup B)$$

$$A - A' = A \cap A = A$$

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

(سروش موئینی)

$$\begin{aligned} [(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) &= ((A \cup B) \cap A') \cup (A \cap B) \\ &= \underbrace{[(A \cap A') \cup (B \cap A')]}_{\emptyset} \cup (B \cap A) = (B \cap A') \cup (B \cap A) \\ &= B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B \end{aligned}$$

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

(شروین سیاح‌نیا)

با توجه به اینکه در مجموعه B داریم: $B = \{8k + 1 \mid k \in A\}$ و اعضای A به صورت $7k + 1$ هستند، $B = \{8(7k + 1) + 1 \mid k \in N\}$ یا $B = \{56k + 9 \mid k \in N\}$. اعضای مجموعه A بر 7 باقی‌مانده‌ای برابر 1 دارند ولی اعضای مجموعه B بر 7 باقیمانده‌ای برابر 2 دارند، پس A و B هیچ عضو مشترکی ندارند. بنابراین تعداد اعضای سه رقمی $(B - A)$ همان تعداد اعضای سه رقمی B است، لذا خواهیم داشت:

$$100 \leq 56k + 9 \leq 999 \Rightarrow 91 \leq 56k \leq 990 \Rightarrow 2 \leq k \leq 17$$

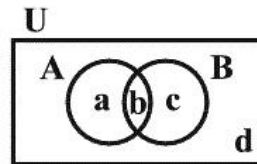
پس به ازای $k = 2$ تا $k = 17$ رابطه‌ی فوق برقرار است که این تعداد شامل 16 عدد است.

(بهر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۵۰ تا ۵۲)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(مهرداد عزیزی)

دو زیر مجموعه A و B را به صورت زیر با نمودار ون نمایش می‌دهیم:



حال قسمت‌های مختلف نمودار را شماره‌گذاری می‌کنیم:

برای اینکه $A \cap B = \emptyset$ شود نباید اعداد 1 و 2 و

3 و 4 در ناحیه‌ی وسط یعنی ناحیه‌ی b قرار گیرند

چون A و B در این ناحیه اشتراک دارند، بنابراین هر

عضو، دارای 3 مکان (a ، c یا d) برای قرار گرفتن

است، یعنی داریم: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

(بهر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

- ۱ ۲ ۳ ۴

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، - ۱۳۹۵۰۵۱۵

(جمال الدین حسینی)

در صورتی $x + \sqrt{2}y$ و $x + \sqrt{2}y - 1$ می‌باشد که:

$$(-1 + \sqrt{2})(x + \sqrt{2}y) = 1$$

$$\Rightarrow (-x + 2y) + (x - y)\sqrt{2} = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow x + y = 2$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۵ و ۶)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(قاسم کتابچی)

$$\cdot / \bar{2b} = \frac{\bar{2b} - 2}{90} = \frac{20 + b - 2}{90} = \frac{18 + b}{90} = \frac{3}{10}$$

$$18 + b = 27 \Rightarrow b = 9$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳✓

۲

۱

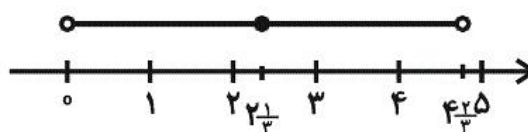
(هاری پلاور)

$$\text{مرکز} = \frac{2a - 1 + \frac{b}{6}}{2} = \frac{7}{3} \Rightarrow 2a + \frac{b}{6} = \frac{17}{3} \quad (1)$$

بازه‌ای به مرکز $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ اگر شامل چهار عدد صحیح باشد، این اعداد

به ترتیب عبارتند از ۲، ۳، ۴ و ۱. پس بیش‌ترین شعاع ممکن برای این بازه

مطابق شکل به صورت زیر است.



۴

۳✓

۲

۱

$$\left. \begin{array}{l} x > |y| \\ |x| \geq x \end{array} \right\} \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow x^4 > y^4$$

می‌دانیم

مثال نقض برای سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: $y = 1$ و $x = 2 \Leftarrow \frac{1}{2} > 1$ غ ق ق

گزینه‌ی «۲»: $y = 1$ و $x = 2 \Leftarrow -1 < 2$ غ ق ق

گزینه‌ی «۳»: $y = 1$ و $x = 2 \Leftarrow \frac{1}{2} < -1$ غ ق ق

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌ی ۱۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(مهری ملارمقانی)

از آن جا که $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ، نتیجه می‌شود که:

$$|x - 2||x + 2| - |x - 2| \leq 0$$

$$\Rightarrow |x - 2|(|x + 2| - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2 \\ |x + 2| - 1 \leq 0 \Rightarrow |x + 2| \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب شامل ۴ عدد صحیح است. $\Rightarrow x \in [-3, -1] \cup \{2\}$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌ی ۱۵ تا ۱۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$a_n = \frac{n-120}{2n-1} + \frac{1}{10} > 0 \Rightarrow \frac{n-120}{2n-1} > \frac{-1}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در } (2n-1) \text{ ضرب می‌کنیم}} n-120 > \frac{-2n+1}{10}$$

$$\Rightarrow 10n-1200 > -2n+1 \Rightarrow 12n > 1201 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 101$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(معمدرضا شوکتی بیرق)

$$\text{زوج } n \Rightarrow a_n = \frac{3n-5}{2n-17} < 0 \Rightarrow \frac{5}{3} < n < \frac{17}{2}$$

$$\xrightarrow{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{زوج } n}} n \in \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{فرد } n \Rightarrow a_n = \frac{5-3n}{2n-17} < 0 \Rightarrow n > \frac{17}{2} \text{ یا } n < \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{فرد } n}} n \in \{1, 9, 11, 13, \dots, 49\}$$

پس دنباله، در پنجاه جمله‌ی اول، در مجموع ۲۶ جمله‌ی منفی دارد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(هادی پلاور)

گزینه‌های (۲) و (۳) از بالا و پایین کران دار است. گزینه‌ی (۱) از بالا و پایین

بی‌کران است و گزینه‌ی (۴) فقط از پایین کران دار است.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

گزینه‌ی «۱»: با نوشتن چند جمله‌ی اول مشخص می‌شود که دنباله غیریکنوا

است.

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \nearrow \quad a_2 = 1 \quad \nearrow \quad a_3 = \frac{9}{8} \quad \searrow \quad a_4 = 1$$

۴ ۳ ۲ ۱

(علیرضا زواره)

-۱۱۰

$$n \text{ فرد باشد: } \left| \frac{1}{\sqrt{n+3}} + 5 - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+3} > 10 \Rightarrow \sqrt{n} > 7$$

$$\Rightarrow n > 49 \xrightarrow{n \text{ فرد}} n = 51, 53, 55, \dots$$

$$n \text{ زوج باشد: } \left| \frac{5n-7}{n+1} - 5 \right| < 0.1 \Rightarrow \left| \frac{5n-7-5n-5}{n+1} \right| < 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{12}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow n+1 > 120 \Rightarrow n > 119 \xrightarrow{n \text{ زوج}} n = 120, 122, 124, \dots$$

بنابراین شماره‌ی جمله‌هایی که در نامساوی مفروض، صدق می‌کنند به صورت

مقابل است: $51, 53, 55, \dots, 117, 119, 120, 121, 122, 123, \dots$

در نتیجه از جمله‌ی ۱۱۹م به بعد همگی در نامساوی گفته شده صدق می‌کنند.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌ی ۲۶)

۴ ۳ ۲ ۱

(رضا عباسی اصل)

اگر قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی xy را با A' و قرینه‌ی A نسبت به محور z را با A'' نمایش دهیم داریم:

$$\left. \begin{aligned} A' = (2, 3, 1) &\Rightarrow m = 6 \\ A'' = (-2, -3, -1) &\Rightarrow n = -6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m + n = 0$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۴، ۵ و ۱۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(رضا عباسی اصل)

تصویر A روی xz : $H(1, 0, 1)$ تصویر A روی xy : $H'(1, m-1, 0)$

بنابه فرض مسأله داریم:

$$\begin{aligned} AH = A'H &\Rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (m-1-0)^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{(1-1)^2 + [(m-1) - (m-1)]^2 + (1-0)^2} \\ &\Rightarrow |m-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 = 1 \Rightarrow m = 2 \\ m-1 = -1 \Rightarrow m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۶ و ۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(علیرضا سیف)

دو بردار a و e_a موازی یکدیگرند و داریم:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} &= \frac{n}{3} = \frac{2m}{b} \\ \frac{2m}{m} &= \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4 \\ \frac{n}{m} &= \frac{3}{2} \\ \frac{bn}{m} &= 4 \times \frac{3}{2} = 6 \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

بردار c در راستای نیمساز دو بردار a و b قرار دارد و از طرفی می‌دانیم در حقیقت بیانگر راستای نیمساز است، حال داریم:

$$\begin{cases} e_a = \frac{a}{|a|} \Rightarrow e_a = \frac{1}{\sqrt{9+16}}(3, 4, 0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \\ e_b = \frac{b}{|b|} \Rightarrow e_b = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}}(2, -2, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_a + e_b = \left(\frac{19}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right) \parallel (19, 2, 5)$$

از مقایسه‌ی بردار حاصل با بردار c داریم:

$$\begin{cases} m = 19 \\ n - 1 = 2 \Rightarrow n = 3 \end{cases}; m + 2n = 19 + 2(3) = 25$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

[۴] [۳] [۲]✓ [۱]

نقطه‌ی متغیر M روی صفحه‌ی xy را $(x, y, 0)$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= (x-1, y+3, 2), \overrightarrow{BM} = (x+1, y-3, -1) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} &= 4 \Rightarrow (x-1, y+3, 2) \cdot (x+1, y-3, -1) = 4 \\ \Rightarrow x^2 - 1 + y^2 - 9 - 2 &= 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16 \end{aligned}$$

بنابراین مکان هندسی، دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۴ است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۴، ۵ و ۲۰)

[۴] [۳] [۲]✓ [۱]

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (|a|+|b|)^2 \\ |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \\ \Rightarrow |a||b|\cos\theta &= |a||b| \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0 \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

[۴] [۳] [۲] [۱]✓

$$\begin{aligned} (2a-b) \cdot (a+b) &= 2a \cdot a + 2a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b \\ &= 2|a|^2 + a \cdot b - |b|^2 = 2(3)^2 + 3 \times 4 \times \frac{1}{2} - (4)^2 \\ &= 18 + 6 - 16 = 8 \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۲)

[۴]✓ [۳] [۲] [۱]

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

داریم:

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1 + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{m-4}{|a|} \Rightarrow 0 = \frac{m-4}{|a|} \Rightarrow m = 4$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۴

۳✓

۲

۱

(ممد ابراهیم گیتی زاره)

 a' تصویر بردار a روی بردار b است، پس داریم:

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a' = \frac{1}{2}(a + a'') = (2, 1, -2)$$

چون بردار b در راستای بردار a' است، پس می‌توان نوشت:

$$b = ma' = m(2, 1, -2) = (2m, m, -2m)$$

$$|b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{4m^2 + m^2 + 4m^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 9m^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 9m^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}(2, 1, -2) = (1, \frac{1}{2}, -1)$$

تذکر: چون بردارهای b و a' هم‌جهت هستند، پس مقدار m مثبت است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

(ممد طاهر شعاعی)

با فرض $u = (1, \sqrt{2}, -1)$ و $v = (x, y, z)$ با استفاده از رابطه برداری کوشی شوارتز داریم:

$$|u \cdot v| \leq |u| |v| \Rightarrow |x + \sqrt{2}y - z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{1+2+1}$$

بنابراین فرض $x + \sqrt{2}y - z = 28$ داریم:

$$28 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 14$$

بنابراین کم‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(x, y, z)$ از مبدأ مختصات برابر ۱۴ است.

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌ی ۲۴)

۴

۳

۲✓

۱

(سیدامیر ستوره)

چون رأس a ، دارای درجه‌ی ۳ است، پس با ۳ رأس دیگر مجاور است، یعنی کافی است از میان ۴ رأس غیر از a ، ۳ رأس انتخاب کنیم. چون اندازه‌ی گراف برابر ۶ است، پس با حذف رأس a ، گرافی که شامل ۴ رأس b ، c ، d و e است، باید ۳ یال داشته باشد. که انتخاب این ۳ یال از بین ۶ یال ممکن انجام می‌پذیرد. تعداد کل گراف‌های ساده‌ی ممکن برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80.$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ تا ۷، ۱۰ و ۱۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(رضا پورحسینی)

گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ هر یک دارای n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر هستند که نمی‌توانند گراف بازه‌ها باشند و تنها گزینه‌ی «۳» گراف بازه‌ای است.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(سروش موثینی)

مجموع درجات رئوس این گراف $1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 12 \times 12$ است:

$$\begin{aligned} \sum \deg v_i &= 1^2 + 2^2 + \dots + 12^2 \\ &= \frac{12(12+1)(2 \times 12 + 1)}{6} = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 2q \\ \Rightarrow q &= 13 \times 25 = 325 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۱)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(امیرحسین ابومصوب)

می‌دانیم در هر گراف ساده، $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ ، پس داریم:

$$2p + 3 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 2p + 3 \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 4p + 6 \leq p^2 - p$$

$$\Rightarrow p^2 - 5p - 6 \geq 0 \Rightarrow (p-6)(p+1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} p \geq 6 \\ p \leq -1 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$p_{\min} = 6 \Rightarrow q \geq 2(6) + 3 \Rightarrow q \geq 15$$

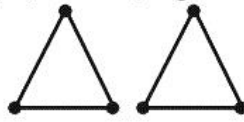
(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ و ۱۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

۱۸۵-

(رسول مفسنی منش)

گراف بازه‌ها، گرافی است که دارای n ضلعی ($n \geq 4$) بدون قطر نباشد.



گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۶ به صورت \triangleleft نیز قابل رسم است که گراف بازه‌ها می‌باشد. در سایر گزینه‌ها، نمی‌توان گراف را فقط به صورت چند مثلث رسم کرد.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۸ و ۱۲)

۴

۳

۲

۱

۱۸۶-

(امیرحسین ابومصوب)

با توجه به آن که در یک گراف r - منتظم، رابطه‌ی $2q = pr$ برقرار است،

$$2(12) = pr = (3r - 1)r \Rightarrow 3r^2 - r - 24 = 0 \quad \text{داریم:}$$

$$r = \frac{1 \pm 17}{6} \begin{cases} r = 3 \\ r = \frac{-8}{3} \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$r = 3 \Rightarrow p = 3(3) - 1 = 8 \Rightarrow p + r = 11$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۲)

۴

۳

۲

۱

۱۸۷-

(نویر مصیری)

گراف کامل از مرتبه‌ی ۱۱، یعنی K_{11} ، دارای $\frac{11 \times 10}{2} = 55$ یال است.

گراف G که ۴۷ یال دارد، ۸ یال از K_{11} کم‌تر دارد. برای اینکه $\Delta - \delta$ بیشترین مقدار باشد، باید Δ بزرگ‌ترین مقدار ممکن و δ کوچک‌ترین مقدار ممکن باشد. برای این کار کافی است تا هر ۸ یال را از یک رأس حذف کنیم تا δ پدید آید و $\Delta = 10$ در حداکثر مقدار خود باقی می‌ماند. در نتیجه $\Delta = 10$ و $\delta = 2$ ، پس $\Delta - \delta = 8$.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۲)

۴

۳

۲

۱

۱۸۸-

(رسول مفسنی منش)

دقت کنید که میانگین درجه‌ی رئوس در این گراف به صورت

$$\frac{2q}{p} = \frac{2(12)}{6} = 4 \quad \text{است. یعنی } \delta \text{ با میانگین درجه‌ی رئوس برابر است، لذا}$$

این گراف یک گراف 4 - منتظم از مرتبه‌ی ۶ است، پس ماکسیمم درجه‌ی رئوس نیز همان عدد ۴ است.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۱)

۴

۳

۲

۱

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر هر دانش آموز کلاس را به عنوان یک رأس گراف و هر رابطه‌ی دوستی را به عنوان یک یال گراف در نظر بگیریم، آن گاه مجموع درجات گراف، باید زوج باشد. برای هر کدام از گزینه‌ها داریم:

$$۱) \sum \deg v = ۷ \times ۴ + ۵ \times ۲ + ۳ \times ۱ = ۴۱ \text{ نادرست}$$

$$۲) \sum \deg v = ۷ \times ۵ + ۵ \times ۳ + ۳ \times ۱ = ۵۳ \text{ نادرست}$$

$$۳) \sum \deg v = ۷ \times ۴ + ۵ \times ۳ + ۳ \times ۲ = ۴۹ \text{ نادرست}$$

$$۴) \sum \deg v = ۷ \times ۵ + ۵ \times ۴ + ۳ \times ۳ = ۶۴ \text{ درست}$$

تنها گراف گزینه‌ی ۴، دارای ویژگی مورد نظر است.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۱)

 ۴

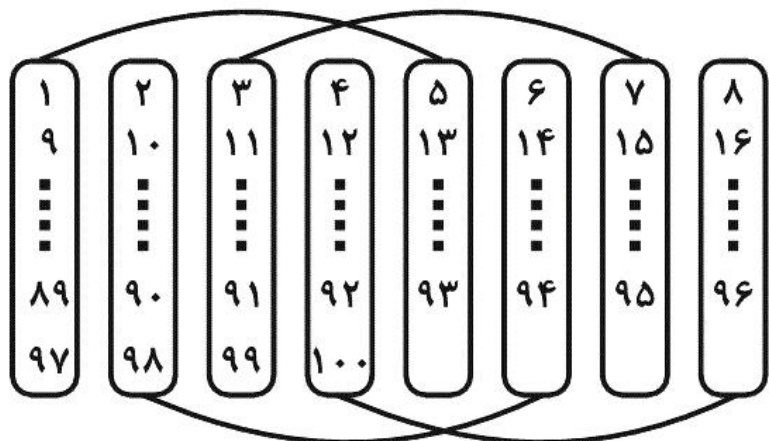
 ۳

 ۲

 ۱

(سیرامیر ستوده)

با تقسیم بندی رأس‌ها به گروه‌هایی به صورت $k + r$ ($k, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq ۷$)، ارتباط بخش‌های گراف با هم به صورت زیر خواهد بود:



با توجه به شکل فوق، گراف مورد نظر ۴ بخش جدا از هم دارد.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۵ تا ۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(رضا پورحسینی)

رنگ یک متغیر کیفی اسمی و وزن یک متغیر کمی پیوسته است.

(آمار و مدل‌سازی - متغیرهای تصادفی: صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

۱۹۲-

(سروش موثینی)

شدت آلودگی هوا کمی پیوسته، گروه خون کیفی اسمی، مراحل رشد کیفی ترتیبی و تعداد فرزندان کمی گسسته است.

(آمار و مدل سازی - متغیرهای تصادفی؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۹۳-

(آرش رحیمی)

$$R = \max - \min \begin{cases} 17 - a = 15 \Rightarrow a = 2 \\ a - 6 = 15 \Rightarrow a = 21 \end{cases}$$

حاصلضرب مقادیر ممکن $2 \times 21 = 42 =$

(آمار و مدل سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌ی ۴۷)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۹۴-

(آرش رحیمی)

فراوانی مطلق دسته اول = فراوانی تجمعی دسته اول

$$\Rightarrow z = 5 \Rightarrow t = 5 + 2 = 7$$

فراوانی مطلق = تفاضل فراوانی‌های تجمعی

$$\Rightarrow 10 - 7 = x \Rightarrow x = 3$$

$$\text{مجموع فراوانی‌های مطلق} = n \Rightarrow 5 + 2 + x + y = 14 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow x + 2y + z = 3 + 2(4) + 5 = 16$$

(آمار و مدل سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۹۵-

(باران رزمی)

با توجه به این که فراوانی تجمعی نسبی، صعودی است پس $0/7 \leq x \leq 1$. همچنین فراوانی نسبی هر دسته از تفاضل فراوانی تجمعی نسبی آن دسته و فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی قبل به دست می‌آید:

$$\text{فراوانی نسبی دسته‌ی چهارم} = x - 0/7 \Rightarrow 0 \leq x - 0/7 \leq 0/3$$

$$\text{فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم} = \frac{30}{n} \Rightarrow x - 0/7 = \frac{30}{n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{30}{n} \leq 0/3 \Rightarrow n \geq 100$$

تعداد کل داده‌ها بزرگ‌تر یا مساوی ۱۰۰ است.

(آمار و مدل سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

۱ ۲ ۳ ۴

اگر d طول دسته‌ها باشد، آنگاه:

$$3 + 5d = \text{حد پایین دسته‌ی چهارم} = \text{مرکز دسته هفتم}$$

$$39/5 = 15 + 3/5d \Rightarrow 3/5d = 24/5$$

$$d = \frac{24/5}{3/5} = 7$$

با توجه به تعداد دسته‌ها، داریم: $9 \times 7 = 63 \leq$ دامنه‌ی تغییرات

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فراوانی کل داده‌ها برابر است با $3 + 17 = 20$ (فراوانی تجمعی داده‌ی ۴ به

اضافه‌ی فراوانی مطلق داده‌ی ۵)

بنابراین داریم:

$$4 = \frac{x}{20} \times 100 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$$

با توجه به آن که فراوانی کل داده‌ها برابر $11 + x + y$ می‌باشد، داریم:

$$11 + 4 + y = 20 \Rightarrow y = 5$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۳ تا ۵۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

تعداد دسته‌ها برابر ۹ و طول هر دسته برابر ۴ است، پس دامنه‌ی تغییرات برابر

است با:

$$4 \times 9 = 36$$

اگر تعداد دسته‌ها به ۱۲ تغییر کند، آنگاه طول هر دسته برابر است با:

$$\frac{36}{12} = 3$$

بنابراین دسته‌ی اول به صورت ۲۱-۲۴ و دسته‌ی سوم به صورت ۳۰-۳۷ است،

یعنی مرکز دسته‌ی سوم برابر $28/5$ می‌باشد.

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۴۶ تا ۵۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

فاصله‌ی بین کران بالایی دسته‌ی اول و کران پایینی دسته‌ی پنجم، در واقع برابر مجموع طول دسته‌های دوم، سوم و چهارم است یعنی ۳ برابر طول یک دسته، پس داریم:

$$۲۰ = \text{طول یک دسته} \Rightarrow ۶۶ - ۱۲۶ = ۶۰ = \text{مجموع طول ۳ دسته}$$

بنابراین مجموع طول هشت دسته، برابر $۱۶۰ = ۸ \times ۲۰$ خواهد بود. با توجه به این که دسته‌ها باید به نوعی باشند که مجموع طول آن‌ها از دامنه‌ی تغییرات کم‌تر نباشد، عدد ۱۵۰ برای دامنه‌ی تغییرات، معقول به نظر می‌رسد. لازم به یادآوری است که در صورتی که مقادیر ۹۰ یا ۱۲۰، دامنه‌ی تغییرات داده‌ها باشد، با توجه به طول دسته‌ها، کم‌تر از هشت دسته، مورد نیاز است.

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۸ و ۵۹)

۱ ۲ ۳ ۴

چون داده‌های جدید به دسته‌ی آخر ربطی ندارند، پس فراوانی مطلق دسته‌ی آخر تغییر نمی‌کند.

$$\frac{f_5}{n_1} = 0.1 \Rightarrow \frac{f_5}{50} = 0.1 \Rightarrow f_5 = 5$$

حال فراوانی نسبی دسته‌ی آخر در داده‌های جدید برابر است با:

$$\frac{f_5}{n_1 + 30} = \frac{5}{50 + 30} = \frac{5}{80} = 0.0625$$

(آمار و مدل‌سازی - دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی؛ صفحه‌های ۵۴ تا ۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a ، ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

مساحت برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است. داریم:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۶۱ و ۶۲)

۱ ۲ ۳ ۴

-۱۶۲

(مسئله نصرتی ناهوک)

اگر a طول وتر و b و c طول اضلاع قائمه باشند، آن گاه با فرض $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ داریم:

$$S = \frac{1}{2}bc = 24 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}c\right)(c) = 24 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h = 24 \Rightarrow \frac{1}{2}(10)h = 24 \Rightarrow h = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ مشابه تمرین ۷، صفحه‌های ۶۴)

۴

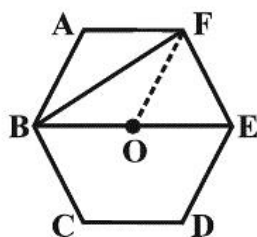
۳

۲✓

۱

-۱۶۳

(رضا عباسی اصل)



از O (مرکز شش ضلعی) به F وصل می‌کنیم، داریم:

$$S_{BEF} = 32\sqrt{3} \Rightarrow S_{OEF} = 16\sqrt{3}$$

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را برابر a فرض کنیم،

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 16\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{آن گاه: } 6x = 6 \times 8 = 48$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۶۴

(رضا عباسی اصل)

$$15^2 = 12^2 + 9^2$$

مثلث ABC قائم‌الزاویه است زیرا:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$$

پس:

مثلث‌های ABC و ABD دارای ارتفاع مشترکی هستند که از رأس A رسم می‌شود. پس نسبت مساحت‌هایشان با نسبت قاعده‌های متناظر مساوی است.

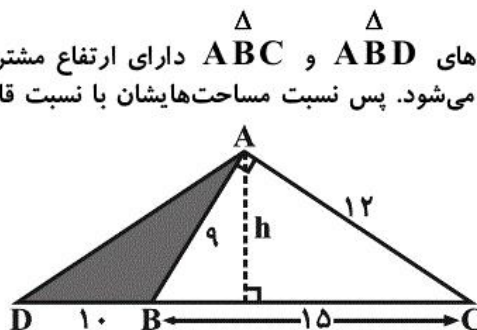
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{S_{ABD}}{54} = \frac{10}{15}$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = 36$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = 36$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس؛ صفحه‌های ۴۱ و ۵۲)



حال:

۴

۳✓

۲

۱

(ممدعلی نازپرور)

$$AG = \frac{2}{3}AM = 2\sqrt{2}$$

چون G برخورد میانه‌ها است پس داریم:

$$BG = \frac{2}{3}BN = 4$$

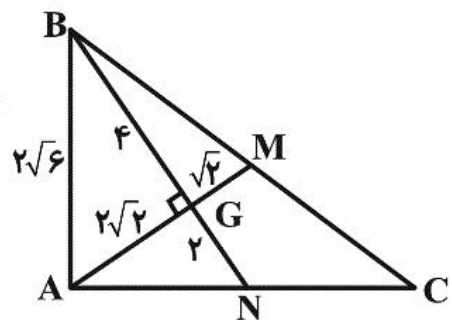
$$\Delta_{ABG} : AB^2 = AG^2 + BG^2 = 24$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

$$\Delta_{ABN} : AN^2 = BN^2 - AB^2$$

$$\Rightarrow AN = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC = 4\sqrt{18}$$



(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۴۱، ۵۷ و ۶۵)

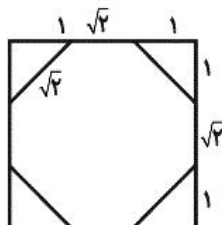
۴

۳

۲

۱

(سروش موئینی)



مطابق شکل، اگر یک هشت ضلعی منتظم درون مربعی محاط شود، هر کدام از مثلث‌های به وجود آمده، قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین هستند، با توجه به این که وتر هر کدام از این مثلث‌ها برابر $\sqrt{2}$ است، طول اضلاع قائمه‌ی آن‌ها برابر ۱ و در نتیجه طول ضلع مربع برابر $2 + \sqrt{2}$ خواهد شد. داریم:

$$\text{طول قطر مربع} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌ی ۶۷)

۴

۳

۲

۱

(ممدابراهیم کیتی زاده)

$$\Delta_{MBC} : MC^2 = MB^2 - BC^2$$

$$\Delta_{MAD} : MD^2 = MA^2 - BC^2$$

$$CD^2 = (MC + MD)^2 = MC^2 + MD^2 + 2MC \times MD$$

$$\Rightarrow CD^2 = MB^2 - BC^2 + MA^2 - BC^2 + 2MC \times MD$$

$$\Delta_{MAB} : MA^2 + MB^2 = AB^2 = CD^2$$

$$CD^2 = CD^2 - 2BC^2 + 36 \Rightarrow BC^2 = 18 \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ تا ۵۹)

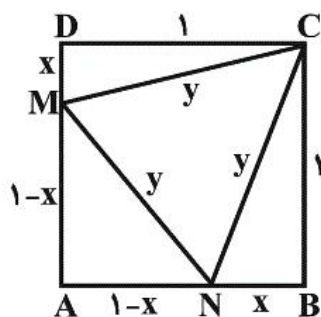
۴

۳

۲

۱

(رضا پورمسینی)



$S_{\text{مربع}} = 1 \Rightarrow \text{طول ضلع مربع} = 1$

$\Delta CMD : y^2 = 1 + x^2$

$\Delta AMN : y^2 = 2(1-x)^2$

$\Rightarrow 1 + x^2 = 2(1-x)^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}$

زیرا $2 + \sqrt{3} > 1$ و نمی‌تواند طول x باشد.

$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 8 - 4\sqrt{3}$

$S = \frac{y^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(8 - 4\sqrt{3})(\sqrt{3})}{4} = \frac{8\sqrt{3} - 12}{4} = 2\sqrt{3} - 3$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ تا ۵۹)

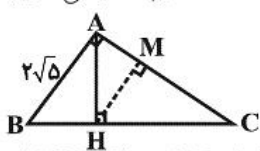
۴

۳

۲

۱ ✓

(رضا عباسی اصل)



$\Delta ABC : BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2$ داریم:

$\Rightarrow BC^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$

$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \times 10 = (2\sqrt{5})(4\sqrt{5}) \Rightarrow AH = 4$

$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = CH \times 10 \Rightarrow CH = 8$

در مثلث قائم الزاویه AHC ، HM ارتفاع نظیر وتر AC است، بنابراین:

$AH \cdot HC = HM \cdot AC \Rightarrow 4 \times 8 = HM \times 4\sqrt{5} \Rightarrow HM = \frac{8}{\sqrt{5}}$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ و ۶۵)

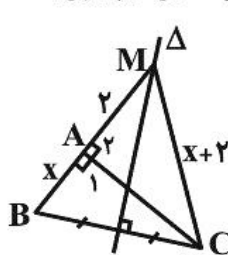
۴

۳

۲

۱ ✓

(عباس اسری امیرآبادی)



می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف فاصله‌اش تا دو سر پاره خط یکسان است. یعنی:

$MB = MC$

اگر $AB = x$ در نظر بگیریم داریم:

$MC = x + 2$

$\Delta MAC : MC^2 = MA^2 + AC^2$

$\Rightarrow (x + 2)^2 = 2^2 + 6^2$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 4 + 36 \Rightarrow x^2 + 4x - 36 = 0$

$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{10}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{10} \Rightarrow x = -2 + 2\sqrt{10}$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ تا ۵۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

(هادی پلاور)

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ -x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 0 \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2(x - 4) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + y = 0 \\ x = -4 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow x + y = -12 \end{cases}$$

(ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۴)

۴

۳

۲✓

۱

(نکین یغمایی)

نمایش زوج مرتبی تابع به صورت روبه‌رو است: $\{(a^2 + 1, 5), (a + 3, 5), (5, 3)\}$

$$(a^2 + 1, 5) = (a + 3, 5) \Rightarrow a^2 + 1 = a + 3$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -1$$

رابطه تابع نمی‌باشد. $\{(5, 5), (5, 3)\}$ اگر $a = 2$

تابع یک‌به‌یک است. $\{(2, 5), (5, 3)\}$ اگر $a = -1$

بنابراین تنها $a = -1$ قابل قبول می‌باشد. (ریاضی ۲ - تابع: صفحه‌های ۳۳ تا ۳۴)

۴✓

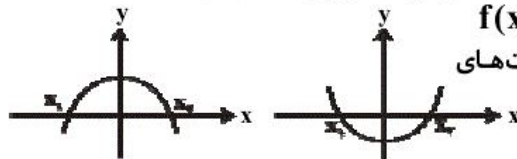
۳

۲

۱

(مریم مالیر)

نمودار تابع درجه دوم $f(x)$ ، در صورتی از هر چهار ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور می‌کند که معادله‌ی $f(x) = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز و با علامت‌های متفاوت باشد:



برای این که معادله دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، باید $\Delta > 0$ (۱) و برای این که علامت ریشه‌ها متفاوت باشد، باید حاصل ضرب آن‌ها منفی باشد، یعنی

$$(1) \quad x^2 - 2ax + a - 3 = 0 \quad (2) \quad x_1 x_2 < 0$$

$$\Delta = (-2a)^2 - 4(1)(a - 3) = 4a^2 - 4a + 12 > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} a^2 - a + 3 > 0$$

برای حل این نامعادله، آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(3) = 1 - 12 = -11 < 0$$

چون در عبارت $a^2 - a + 3$ ، $\Delta < 0$ است، علامت این عبارت همواره موافق

علامت ضریب a^2 یعنی همواره مثبت است. پس برای هر $a \in \mathbb{R}$ ، شرط (۱)

$$(2) \quad x^2 - 2ax + a - 3 = 0 \Rightarrow$$

برقرار می‌باشد.

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{a - 3}{1} = a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳

۲✓

۱

(هاری پلاور)

 $xf(x) > 0 \Rightarrow f$ و x باید هم علامت باشند

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0$$

شامل صفر عدد صحیح است. $D_y = (-1, 1) - \{0\}$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۶ تا ۷۰ و ۸۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(نکین یغمایی)

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x^2) = 2x^2 + 1 & (1) \\ f(2x) = 2(2x) + 1 = 4x + 1 & (2) \end{cases}$$

$$f(x^2) - f(2x) - 6 < 0 \xrightarrow{(2), (1)} 2x^2 + 1 - 4x - 1 - 6 < 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۹ و ۸۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(داوود بوالسنی)

قرار دهید $A = \sqrt{x-2}$ ، در این صورت $x = A^2 + 2$ و بنابراین:

$$x - 2\sqrt{x-2} + m - 4 = A^2 + 2 - 2A + m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 2A + m - 2 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m-2) > 0 \Rightarrow m-2 < 1 \Rightarrow m < 3 \quad (I)$$

بنابراین به ازای $m < 3$ معادله $A^2 - 2A + m - 2 = 0$ دارای دو جواب حقیقیمتمايز است. اما چون $A = \sqrt{x-2}$ عددی نامنفی است، ریشه‌های معادله‌ی $A^2 - 2A + m - 2 = 0$ و در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها عددی نامنفی خواهد بود، پس:

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \quad (II)$$

$$2 \leq m < 3$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳ ✓

۲

۱

(عمیرضا سجودی)

$$1 - \frac{2x}{x-1} - x \leq 0 \xrightarrow{x-1 \neq 0} \frac{x-1-2x-x^2+x}{x-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1-x^2}{x-1} \leq 0 \xrightarrow{-1-x^2 \text{ همواره منفی است.}} x-1 > 0$$

$$\Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

پس بی‌شمار عدد طبیعی در مجموعه جواب نامعادله‌ی فوق صدق می‌کند.

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مهم‌رضا شوکتی بیرق)

مطابق شکل، $x=1$ و $x=3$ ریشه‌های تابع $y_1 = ax^2 + bx + c$ هستند، پس این تابع به صورت $y_1 = a(x-1)(x-3)$ می‌باشد. چون نقطه‌ی $(0,1)$ روی نمودار این تابع است، در معادله‌ی آن صدق می‌کند.

$$y_1 = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(0,1)} 1 = a(-1)(-3) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{3}(x-1)(x-3) \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow b = -\frac{4}{3} \text{ و } c = 1$$

در نتیجه، عبارت $y_2 = cx^2 + bx + a$ به صورت $y_2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ خواهد بود که با تعیین علامت آن داریم:

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow (x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعارله و تعیین علامت: صفحه‌های ۷۳ تا ۸۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

(نکین یغمایی)

اگر جواب‌های حقیقی معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، برابر x' و x'' باشند، آنگاه همواره مجموع مربعات جواب‌ها برابر است با: $x'^2 + x''^2 = S^2 - 2P$

که در آن: $S = x' + x'' = -\frac{b}{a} = 2$ ، $P = x'.x'' = \frac{c}{a} = m - 1$ بنابراین، با توجه به صورت سؤال:

$$S^2 - 2P = 4P \Rightarrow S^2 = 6P \Rightarrow 4 = 6(m-1) \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

که به ازای این مقدار از m ، معادله به شکل $x^2 - 2x + \frac{2}{3}$ در می‌آید که دو جواب حقیقی دارد.

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعارله و تعیین علامت: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۴ و ۷۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

(کوروش شاه‌منصوریان)

$$f(x) = x$$

f تابع همانی است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y_1 = f(3x-1) = 3x-1 \\ y_2 = f(2-2x) = 2-2x \end{cases} \Rightarrow 3x-1 = 2-2x$$

$$\Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \Rightarrow y_1 = y_2 = \frac{4}{5}$$

(ریاضی ۲ - توابع خاص، نامعارله و تعیین علامت: صفحه‌ی ۵۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۷۱-

(سراسری تهری - ۷۶)

اگر طول و عرض مستطیل اولیه را با a و b و محیط و مساحت را به ترتیب با S و P نشان دهیم، آن گاه در صورتی که از عرض مستطیل، مقدار x را کم کنیم، داریم:

$$P_2 = 2[(a+x) + (b-x)] = 2(a+b) = P_1$$

از آن جا که $b < a$ ، پس $(b-a)x < 0$ و با در نظر گرفتن $-x^2 < 0$ ، واضح است که $S_2 < S_1$.

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه های ۳۹ و ۴۰)

۴

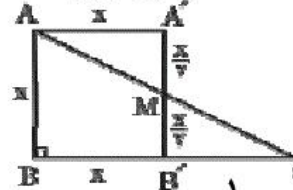
۳ ✓

۲

۱

۱۷۲-

(سراسری تهری - ۹۲)



طول ضلع مربع $AA'B'B$ را x در نظر می گیریم. از همنهشت بودن دو مثلث $AA'M$ و $CB'M$ ، نتیجه می شود که $A'M = B'M = \frac{x}{2}$ ، پس:

$$\frac{S(ABB'M)}{S(AA'B'B)} = \frac{\frac{1}{2}(x + \frac{x}{2})x}{x^2} = \frac{\frac{3}{4}x^2}{x^2} = \frac{3}{4}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه های ۳۸ و ۴۱)

۴

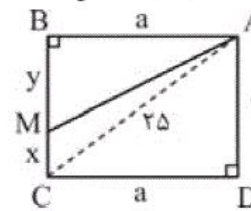
۳ ✓

۲

۱

۱۷۳-

(سراسری تهری - ۹۲)



در مثلث قائم الزاویه ACD می توان نوشت:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\ \Rightarrow 625 &= 196 + a^2 \\ \Rightarrow a^2 &= 429 (*) \end{aligned}$$

از طرفی طبق فرض سؤال:

$$\frac{S(ABM)}{S(ADCM)} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{S(ABM)}{S(ABM) + S(ADCM)} = \frac{5}{5+9}$$

$$\frac{S(ABM)}{S(ABCD)} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{ay}{2}}{14a} = \frac{5}{14} \Rightarrow y = 10$$

در مثلث قائم الزاویه ABM ، می توان نوشت:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow AM^2 = a^2 + y^2$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} AM^2 = 429 + 100 = 529 \Rightarrow AM = \sqrt{529} = 23$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه های ۴۱، ۵۰ و ۵۷)

۴

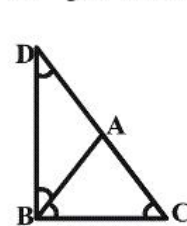
۳

۲ ✓

۱

۱۷۴-

(سراسری خارج از کشور تهری - ۹۱)



از آن جا که $AB = \frac{1}{2}CD$ (میان خط نظر یک ضلع، نصف آن ضلع است) پس $\hat{B} = 90^\circ$.

فیثاغورس در $\triangle DBC$: $BD^2 = DC^2 - BC^2$

$$\Rightarrow DB = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{7})^2} = 6$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه های ۵۷ تا ۵۹)

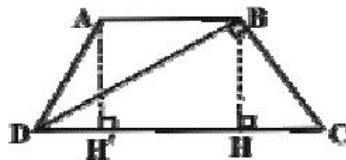
۴

۳ ✓

۲

۱

در مثلث قائم‌الزاویه BCD داریم:



$$BC^2 = DC^2 - BD^2 = 100 - 64 = 36$$

در مثلث قائم‌الزاویه BCD می‌توان نوشت:

$$BC^2 = CH \cdot CD \Rightarrow 36 = CH \times 10 \Rightarrow CH = 3/6$$

با توجه به همنهشتی مثلث‌های ADH' و BCH داریم $DH' = 3/6$.

$$AB = HH' = CD - (CH + DH') = 10 - 7/2 = 2/8$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ و ۶۵)

- ۱ ✓ ۲ ۳ ۴

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{9}{4}m^2} = \frac{3}{2}m$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow m^2 = BH \times \frac{3}{2}m \Rightarrow BH = \frac{2}{3}m$$

$$HM = BM - BH = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}m) - \frac{2}{3}m = \frac{1}{12}m$$

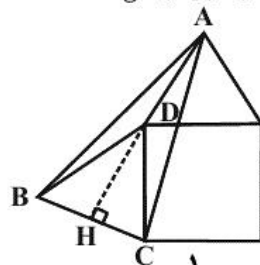
و در نتیجه:

$$\frac{S(\Delta ABC)}{S(\Delta AMH)} = \frac{BC}{MH} = \frac{\frac{3}{2}m}{\frac{1}{12}m} = 18$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷ و ۶۵)

- ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

در مثلث ABC ، ارتفاع AH ارتفاع وارد قاعده BC و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع DBC است. داریم:



$$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

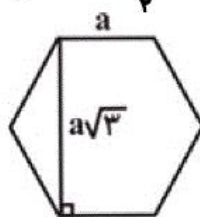
$$AH = AD + DH = 2 + \sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3}) \times 2 = 2 + \sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۴۶ و ۶۲)

- ۱ ۲ ۳ ✓ ۴

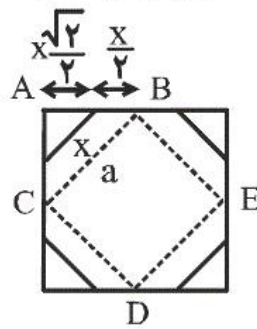
از آن‌جا که مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، برابر $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ است و طول قطر کوچک شش ضلعی منتظم، برابر $a\sqrt{3}$ است، داریم:



$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} (a\sqrt{3})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2} = 3$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

- ۱ ۲ ۳ ✓ ۴



اگر طول ضلع هشت ضلعی منتظم را x و طول ضلع مربع حاصل را a در نظر بگیریم، مطابق شکل از آنجا

که $\triangle ABC$ قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است، داریم:
 $a = BC = \sqrt{2}AB$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2}\left(x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{2}\right) = x + \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

با در نظر گرفتن $x = 6$ ، داریم $a = 6 + 3\sqrt{2}$ ، پس:

$$S(BCDE) = a^2 = 36 + 18 + 36\sqrt{2} = 54 + 36\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌ی ۶۷)

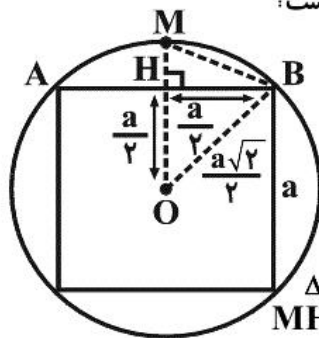
۴

۳

۲✓

۱

با توجه به شکل، شعاع دایره برابر با نصف قطر مربع است:



$$MH = R - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a$$

$\triangle MHB$ فیثاغورس در مثلث: $MB^2 = BH^2 + MH^2$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{1+2+1-2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

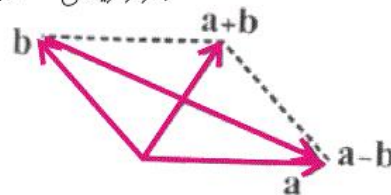
(هندسه ۱ - مساحت و فیثاغورس: صفحه‌ی ۶۷)

۴

۳

۲✓

۱



با توجه به شکل، زاویه‌ی بین دو بردار a و b منفرجه است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$|a-b| > |a+b|$$

$$|a-b|^2 > |a+b|^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + 16 + (x-1)^2 > (x-3)^2 + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 18 > 2x^2 - 6x + 10 \Rightarrow 6x > -8 \Rightarrow x > \frac{-4}{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۵۲

(آزاد ریاضی - ۸۱)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2 &= 5\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \\ \mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2 &= 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} \\ \Rightarrow \frac{|\mathbf{V}_1 - 2\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1 + 2\mathbf{V}_2|} &= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{26}} = 1 \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۵۳

(سراسری ریاضی - ۹۴)

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{AM}} &= \frac{2}{3}\overline{\mathbf{AB}} \Rightarrow \overline{\mathbf{OM}} - \overline{\mathbf{OA}} = \frac{2}{3}(\overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}) \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{OM}} &= \frac{1}{3}(2\overline{\mathbf{OB}} + \overline{\mathbf{OA}}) \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{OM}} &= \frac{1}{3}((-2, 4, 8) + (5, -4, 1)) \\ \Rightarrow \overline{\mathbf{OM}} &= (1, 0, 3) \Rightarrow |\overline{\mathbf{OM}}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۵۴

(سراسری ریاضی - ۸۵)

نکته: اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار باشند، بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ زمانی بر هم عمودند که $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ باشد و برعکس، یعنی:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Leftrightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (m, 2, -1) \\ |\mathbf{b}| = \sqrt{41} \end{cases} \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$\xrightarrow{|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|} \sqrt{m^2 + 5} = \sqrt{41}$$

$$\Rightarrow m^2 = 36 \xrightarrow{m>0} m = 6$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۹ تا ۱۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۵۵

(سراسری ریاضی - ۸۳)

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow 24 + 25 - 2 \times 0 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \\ \Rightarrow |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= 49 \Rightarrow |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 7 \end{aligned}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

با توجه به شکل، رابطه‌ی $a+b+c=0$ بین بردارها برقرار است.

$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$$

$$|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |-c|^2$$

$$\Rightarrow 9 + 25 + 2a \cdot b = 36 \Rightarrow 2a \cdot b = 2 \Rightarrow a \cdot b = 1$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۶ تا ۲۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$a+b+c=0 \Rightarrow |a+b+c|^2 = 0$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0$$

$$\Rightarrow 9 + 16 + 49 + 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -37$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۲۴)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

باید زاویه‌ی بین بردارهای AB و AC را به دست آوریم:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \cos A$$

$$\frac{3}{3 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۶ و ۲۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

$$V_1 \cdot V_2 = 0 \Rightarrow 2 - b + a = 0 \Rightarrow a = b - 2 \quad (1)$$

$$V_1 \cdot V_3 = 0 \Rightarrow c - 3 + 2a = 0 \Rightarrow 2a + c = 3 \xrightarrow{(1)} 2b + c = 7$$

$$V_2 \cdot V_3 = 0 \Rightarrow 2c + 3b + 2 = 0 \Rightarrow 2c + 3b = -2$$

$$\begin{cases} 2b + c = 7 \\ 3b + 2c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 16 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$a = b - 2 = 14$$

$$a + b + c = 14 + 16 - 25 = 5$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۱۷)

$$\mathbf{a}'' = 2 \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right) \mathbf{b} - \mathbf{a} = 2 \left(\frac{-2 + 0 - 1}{1 + 4 + 1} \right) (1, 2, -1) - (-2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}'' = (-1, -2, 1) - (-2, 0, 1) \Rightarrow \mathbf{a}'' = (1, -2, 0)$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

 ۴ ۳ ۲ ۱www.kanoon.ir