



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

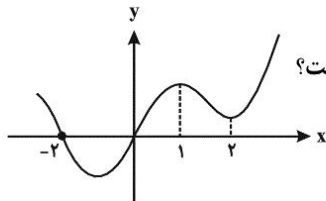
دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)



۱۲۶- اگر تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، دامنه‌ی تابع $y = x\sqrt{\frac{1}{-f(x)}}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 0)$
 (۲) $(0, +\infty)$
 (۳) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
 (۴) $(-2, 0)$

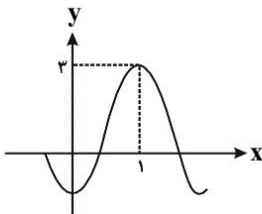
$[2 \ a]$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ وارون‌ناپذیر باشد، دترمینان ماتریس $A + I$ کدام است؟

(۱) ۶
 (۲) -۶
 (۳) -۲
 (۴) ۲

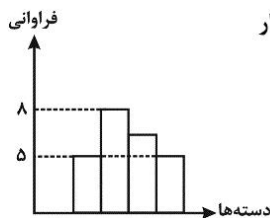
شما پاسخ نداده اید



۱۲۸- اگر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 + a \cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

(۱) -۲
 (۲) ۲
 (۳) -۱
 (۴) -۳

شما پاسخ نداده اید



۱۲۹- نمودار مستطیلی یک سری داده‌ی آماری به صورت زیر است. اگر زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی سوم در نمودار دایره‌ای 90° باشد، فراوانی نسبی دسته‌ی دوم کدام است؟

(۱) $\frac{4}{15}$
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در جدول زیر اگر میانگین داده‌ها برابر ۱۶ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم کدام است؟

حدود دسته	۱۱-۱۳	۱۳-۱۵	۱۵-۱۷	۱۷-۱۹	۱۹-۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۲	۲۲	x	۳۶

(۱) ۳
 (۲) ۱۰
 (۳) ۱۱
 (۴) ۳۳

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. سه مهره به تصادف بی‌درپی و بدون جایگذاری از این جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌ی اول سفید و دو مهره‌ی دیگر هم‌رنگ نیستند؟

(۱) $\frac{4}{55}$
 (۲) $\frac{5}{54}$
 (۳) $\frac{19}{110}$
 (۴) $\frac{17}{220}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- اگر $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3$ ، حاصل $\cos 2\alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$
 (۲) $\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(f(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن‌گاه حاصل $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

(۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) -۲
 (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1 - \cos \pi x}}{x^2 + ax} = +\infty$ ، حاصل حد چپ این عبارت در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (۳) $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{[x]}, & 1 \leq x < 2 \\ ax+1, & x \geq 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته است؟ $[]$ ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}}$ در $x = -1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $-\frac{3}{16}$ (۴) $\frac{3}{16}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- ۶ تیر را به سمت هدف پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم ۲ تیر اول و سوم به هدف اصابت کرده است. اگر احتمال برخورد تیر به هدف $\frac{1}{3}$ باشد. با کدام احتمال حداقل ۳ تیر به هدف اصابت می‌کند؟

- (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{16}{81}$ (۳) $\frac{19}{27}$ (۴) $\frac{65}{81}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- اگر $|2x-1| < x$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی مقادیر $\left[\frac{x-1}{3}\right]$ کدام است؟ $[]$ ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0, -1\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\{0, 1\}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- دنباله‌ی $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+2}\right\}$ چگونه است؟

- (۱) کراندار- صعودی (۲) کراندار- نزولی (۳) غیر کراندار- صعودی (۴) غیر کراندار- نزولی

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم، ۳ واحد بیش‌تر از جمله‌ی اول و ۶ واحد کم‌تر از جمله‌ی سوم است. مجموع هشت جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۷۹۲ (۲) ۷۸۹ (۳) ۷۶۲ (۴) ۷۶۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- میزان سرمایه‌گذاری شخصی در بانک پس از ۸ سال e برابر شده است. اگر این شخص در بانک ۶ میلیون تومان پول داشته باشد پس از چند سال پول او ۵۴ میلیون تومان خواهد شد؟ $(\ln 3 = 1.1)$

- (۱) $16/3$ (۲) $17/6$ (۳) $18/4$ (۴) $19/1$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- جواب کلی معادله‌ی $\sin x \cos x = \sin \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ (۴) جواب ندارد

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- مجموعه‌ی مقادیر b برای آن‌که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + \ln \frac{1}{\sqrt{2x-1}} & ; x \geq 1 \\ x^5 + bx & ; x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) هیچ مقدار حقیقی (۲) هر مقدار حقیقی (۳) فقط صفر (۴) فقط -۱

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی $y = xe^{\sin x}$ در نقطه‌ای به طول $x = \frac{\pi}{4}$ روی منحنی کدام است؟

- (۱) e (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) صفر (۴) $\frac{\pi}{2}e$

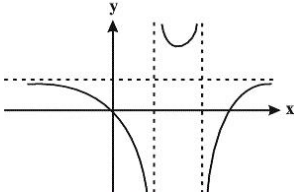
شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- مقدار ماکزیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 8x^2$ روی بازه $[-1, 3]$ ، چقدر از مقدار می‌نیمم مطلق آن روی این بازه بیش تر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۳ (۳) ۲۱ (۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- اگر شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + bx + c}$ باشد، دوتایی (b, c) کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $(-4, 3)$
(۲) $(-4, 0)$
(۳) $(-3, 3)$
(۴) $(3, 2)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- معادله‌ی دو ضلع از متوازی‌الاضلاع به صورت $2x + 3y = 7$ و $x - 2y = 0$ است. اگر $(-3, 2)$ یکی از رؤس متوازی‌الاضلاع باشد، کدام یک از نقاط زیر، رأس دیگری از این متوازی‌الاضلاع است؟

- (۱) $(4, 2)$ (۲) $(5, -1)$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(-2, -1)$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- معادله‌ی تمام قائم‌های رسم شده بر دایره به صورت $y = m(x - y) + 1$ است. اگر دایره محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، محور x ها را با چه طول‌هایی قطع می‌کند؟

- (۱) $-3, 5$ (۲) $3, -1$ (۳) $-1 \pm 3\sqrt{2}$ (۴) $-1 \pm 2\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- در یک سهمی هر پرتوی که از نقطه‌ی $P(2, -4)$ بر این سهمی می‌تابد، در امتداد محور y ها باز می‌تابد. اگر این سهمی از نقطه‌ی $A(3, -4)$ عبور کند و محور x ها را در نقاط M و N قطع کند، طول پاره‌خط MN کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- حاصل $\int_{-1}^2 (x + |x|) dx$ کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) ۳ (۳) $3/5$ (۴) ۴

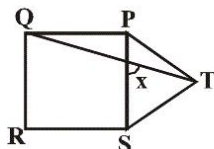
شما پاسخ نداده اید

۱۵۱- اگر $\int (x - \frac{1}{x})^2 dx = \frac{f(x) - c}{3x} + c$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^3 - 6x$ (۲) $x^2(x^2 - 6)$ (۳) $x^2(x^2 + 6)$ (۴) $x^3 + 6x$

شما پاسخ نداده اید

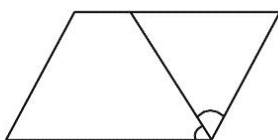
۱۵۲- در شکل زیر، چهارضلعی PQRS مربع و مثلث PST متساوی‌الاضلاع است. زاویه‌ی X چند درجه است؟



- (۱) ۶۰
(۲) ۶۵
(۳) ۷۰
(۴) ۷۵

شما پاسخ نداده اید

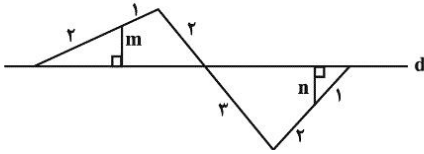
۱۵۳- در متوازی‌الاضلاع زیر، نیمساز یکی از زوایا، سطح متوازی‌الاضلاع را به نسبت $\frac{2}{5}$ تقسیم کرده است. نسبت ضلع بزرگ‌تر به ضلع کوچک‌تر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{3}$
(۳) $\frac{7}{4}$
(۴) $\frac{8}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- در شکل زیر، نسبت $\frac{m}{n}$ چقدر است؟

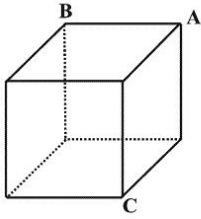


$\frac{3}{2}$ (۲)
 $\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۱)
 $\frac{3}{5}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- شکل مقابل یک مکعب را نشان می‌دهد. مساحت کل این مکعب، چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۴ (۱)
 ۶ (۲)
 $4\sqrt{2}$ (۳)
 $6\sqrt{2}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

-۱۲۶

(جمال الدین حسینی)

$$-\frac{1}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

با توجه به نمودار در فاصله $(-2, 0)$ رابطه‌ی فوق برقرار است.
 (توابع خاص، نامعادله و تعیین علامت) (ریاضی ۲، مشابه تمرین ۵، صفحه‌ی ۸۴)

۴

۳

۲

۱

-۱۲۷

(فرهاد حامی)

A وارون ناپذیر است بنابراین:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2(3) - (-1)a = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A + I| = 3(4) - (-1)(-6) = 6$$

(ماتریس) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۷۳ و ۱۷۴)

۴

۳

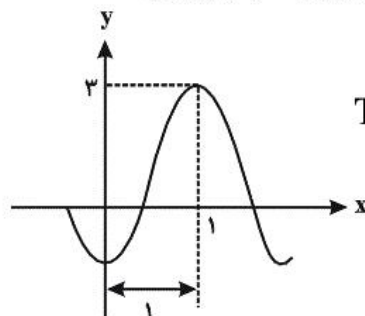
۲

۱

-۱۲۸

(یغما کلانتریان)

چون فاصله‌ی طولی بین کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار روی نمودار برابر یک است پس دوره‌ی تناوب تابع برابر ۲ است:



$$T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرفی $f(1) = 3$ ، بنابراین داریم:

$$3 = 1 + a \cos((\pm 1)\pi(1)) \Rightarrow 3 = 1 + a \cos(\pm \pi)$$

$$\Rightarrow 3 = 1 + a(-1) \Rightarrow a = -2$$

(مثلثات) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲

۱

(آرش ریمی)

با فرض این که فراوانی دسته‌ی سوم برابر a باشد، داریم:

$$\alpha_3 = \frac{f_3}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} \times 360^\circ \Rightarrow 90^\circ = \frac{a}{5 + 8 + a + 5} \times 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{a}{18 + a} \Rightarrow 18 + a = 4a \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow \text{فراوانی نسبی دسته‌ی دوم} = \frac{f_2}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(نمودارها و تحلیل داده‌ها) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۵۴، ۵۶، ۸۲ تا ۸۶ و ۹۲ تا ۹۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(مهم‌مصطفی ابراهیمی)

از جدول داده شده به جدول زیر می‌رسیم. برای به‌دست آوردن میانگین، مرکز دسته‌ها را منهای ۱۶ می‌کنیم. بنابراین میانگین داده‌های جدید برابر صفر است:

حدود دسته	۱۱-۱۳	۱۳-۱۵	۱۵-۱۷	۱۷-۱۹	۱۹-۲۱
x_i	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
$x_i - 16$	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۵	۷	۱۰	$x - 22$	$36 - x$

$$\Rightarrow \frac{5(-4) + 7(-2) + 10(0) + (x-22)(2) + (36-x)(4)}{36} = 0$$

$$\Rightarrow -20 - 14 + 2x - 44 + 144 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 66 = 0 \Rightarrow x = 33$$

اگر $x = 33$ باشد، فراوانی مطلق دسته‌ی چهارم برابر $11 = x - 22$ خواهد بود.

(شاقص‌های مرکزی) (آمار و مدل‌سازی، صفحه‌های ۵۴، ۵۷ و ۱۲۵ تا ۱۳۵)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(میثم همزه‌لویی)

احتمال این که مهره‌ی اول سفید باشد برابر $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ است. با این انتخاب در

جعبه ۲ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز داریم. حال احتمال این که دو مهره‌ی انتخابی در مهره‌های باقی‌مانده غیرهم‌رنگ باشند را می‌یابیم.

$$P(\text{هر دو قرمز یا هر دو سیاه یا هر دو سفید}) = 1 - P(\text{دو مهره غیرهم‌رنگ})$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \right) = 1 - \frac{34}{110} = 1 - \frac{17}{55} = \frac{38}{55}$$

بنابراین:

$$P(\text{دو مهره‌ی دیگر غیرهم‌رنگ و اولی سفید}) = \frac{1}{4} \times \frac{38}{55} = \frac{19}{110}$$

(احتمال) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۸ تا ۱۹)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(میثم همزه لویی)

از آن جا که $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ داریم:

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = 3 \Rightarrow \frac{2}{\sin \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

از طرفی $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ بنابراین:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸)

۴

۳

۲✓

۱

(بورا طالبی)

با توجه به ضابطه‌ی f داریم:

$$g(f(x)) = x^2 + x - 2 \xrightarrow{f(x)=2x+1} g(2x+1) = x^2 + x - 2$$

$$\xrightarrow{x=1} g(2 \times 1 + 1) = 1^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow g(3) = 0$$

$$f(g(3)) = f(0) = 2(0) + 1 = 1$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶)

۴

۳

۲✓

۱

(میثم همزه لویی)

چون حاصل حد عبارت در $x=1$ بی‌نهایت شده، بنابراین $x=1$ ریشه‌ی مخرج است.

$$x=1: x^2 + ax = 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

حال حد چپ عبارت را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos \pi x}}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2}\right)}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|\pi x|}{\sqrt{2}}}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\pi x}{\sqrt{2} x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\pi}{\sqrt{2}(x-1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۴ تا ۹۰ و ۹۴ تا ۱۰۳)

۴✓

۳

۲

۱

(عباس امیدوار)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + 1) = 2a + 1 \\ f(2) = 2a + 1 \end{array} \right.$$

برای این که f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید: $2a + 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

(عد و پیوستگی) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۱)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معمدرضا میرجلیلی)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)'}{\sqrt[2]{\frac{x^2}{x^2+3}}} = \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2)}{(x^2+3)^2 \sqrt[2]{\frac{x^2}{x^2+3}}}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \frac{-2(4) - (-2)(1)}{2\sqrt[2]{\frac{1}{4}}} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

(مشتق) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(حسین اسفینی)

۲ تیر اول و سوم به هدف خورده است. می‌خواهیم حداقل ۳ تیر به هدف بخورد پس باید حداقل ۱ تیر از ۴ تیر باقی‌مانده (تیرهای دوم، چهارم، پنجم و ششم) به هدف بخورد.

برای محاسبه‌ی احتمال مورد نظر بهتر است از روش متمم مسأله را حل کنیم:

$$P(A') = P(\text{صفر تیر از ۴ تیر باقی‌مانده به هدف بخورد}) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 \times 1 \times \frac{16}{81} = \frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

(امتال) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

(علی شهرابی)

$$|2x-1| < x \Rightarrow -x < 2x-1 < x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-1 > -x \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \\ 2x-1 < x \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

حال حدود $\frac{x-1}{3}$ را می‌یابیم و سپس جزء صحیح آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x-1 < 0 \Rightarrow -\frac{2}{9} < \frac{x-1}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x-1}{3} \right] = -1$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \Rightarrow \text{کراندار} \Rightarrow \text{همگرا به یک}$$

با توجه به رابطه‌ی زیر با افزایش n مقدار دنباله افزایش می‌یابد، بنابراین دنباله صعودی است.

$$\frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{n^2+2-1}{n^2+2} = 1 - \frac{1}{n^2+2}$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(فرهاد حامی)

$$a_2 = a_1 + 3 = a_3 - 6$$

طبق فرض داریم:

در این دنباله‌ی هندسی برای سه جمله‌ی متوالی a_1 ، a_2 و a_3 داریم

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \text{ پس:}$$

$$a_2^2 = (a_2 - 3)(a_2 + 6) \Rightarrow a_2^2 = a_2^2 + 3a_2 - 18 \Rightarrow a_2 = 6$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = 2 \text{ و قدرنسبت برابر } 2 \text{ و } a_1 = 3 \text{ برابر}$$

است و مجموع هشت جمله‌ی اول این دنباله برابر می‌شود با:

$$S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3(1-2^8)}{1-2} = -3(-255) = 765$$

(دنباله)

(ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(ممد مصطفی ابراهیمی)

$$P = P_0 e^{it} \Rightarrow eP_0 = P_0 e^{\lambda i} \Rightarrow \lambda i = 1 \Rightarrow i = \frac{1}{\lambda}$$

$$54 = 6 \times e^{\frac{1}{\lambda} t} \Rightarrow 9 = e^{\frac{t}{\lambda}} \xrightarrow{\text{از طرفین ln می‌گیریم}} \ln 9 = \frac{t}{\lambda} \Rightarrow t = \lambda \ln 9$$

$$\Rightarrow t = \lambda \times 2 \times \ln 3 = 16 \ln 3 \Rightarrow t = 16 \times 1 / 1 = 16 / 6$$

(توابع و معادلات) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۸)

۴

۳

۲✓

۱

(عمید علیزاده)

از رابطه‌ی $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ استفاده می‌کنیم (دقت کنید)

$$\left(\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ که} \right)$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

(مثلثات) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳۳ تا ۳۸) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

(میثم حمزه‌لویی)

برای مشتق‌پذیری در $x = 1$ باید:

f در $x = 1$ باید پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(ax + \ln \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \right) = a + \ln(1) = a = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^5 + bx) = 1 + b \end{cases} \Rightarrow 1 + b = a$$

$$: f'_-(1) = f'_+(1) \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + \ln(\sqrt{2x-1})^{-\frac{1}{2}} & ; x \geq 1 \\ x^5 + bx & ; x < 1 \end{cases} = \begin{cases} ax - \frac{1}{2} \ln(2x-1) & ; x \geq 1 \\ x^5 + bx & ; x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2x-1} \right) & ; x \geq 1 \\ 5x^4 + b & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = a - 1 \\ f'_-(1) = 5 + b \end{cases} \Rightarrow 5 + b = a - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + b = a \Rightarrow b = a - 1 \\ 5 + b = a - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 + b = b \Rightarrow 5 = 0 \text{ (جواب ندارد)}$$

پس f هیچ‌گاه در $x = 1$ مشتق‌پذیر نخواهد بود.

(مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۹)

۴

۳

۲

۱✓

(هسین اسفینی)

$$y = xe^{\sin x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y = \frac{\pi}{2} e^{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} e \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} e\right)$$

$$y' = 1 \times e^{\sin x} + x(\cos x e^{\sin x}) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y' = e + \frac{\pi}{2} \times 0 = e$$

$$\text{معادله‌ی خط مماس: } y - \frac{\pi}{2} e = e\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = ex - e\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} e$$

$$\Rightarrow y = ex \quad \text{عرض از مبدأ صفر است.}$$

(مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۶۶، ۷۶ و ۷۹)

۴

۳✓

۲

۱

(یوسف میرسعید قاضی)

$$f(x) = x^4 - 8x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x = -2 \notin [-1, 3] \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = -16 \end{cases}$$

$$\text{نقاط ابتدا و انتهای بازه: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = -7 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x \in [-1, 3]} \max(f(x)) = 9, \min(f(x)) = -16$$

$$\Rightarrow \max(f(x)) - \min(f(x)) = 25$$

(کلبردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۸۴ تا ۸۶)

۴

۳

۲

۱✓

(هسین اسفینی)

 \Rightarrow باید مخرج دو ریشه‌ی مثبت داشته باشد \Rightarrow دو مجانب قائم با طول مثبت

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4c > 0 \Rightarrow b^2 > 4c \Rightarrow \text{گزینه ۳ غلط} \Rightarrow (-3)^2 < 4(3) \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{1} > 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow \text{گزینه ۲ غلط است} \\ S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{1} > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow \text{گزینه ۴ غلط است} \end{cases}$$

(کلبردهای مشتق) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۷)

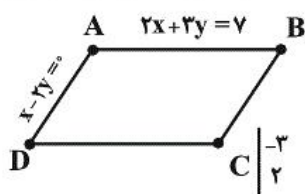
۴

۳

۲

۱✓

(ممد مصطفی ابراهیمی)



یک شکل فرضی رسم می‌کنیم. توجه کنید که مختصات نقطه‌ی $(-3, 2)$ در هیچ‌کدام از خطوط داده شده صدق نمی‌کند پس این نقطه را رأسی در نظر می‌گیریم که روی هیچ‌کدام از این اضلاع نیست. در شکل بالا رأس C است.

$$\text{مختصات نقطه‌ی A: } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, 1)$$

حالا معادله‌ی ضلع BC را می‌نویسیم. نقطه‌ی C روی این خط است و شیب آن برابر شیب خط $x - 2y = 0$ یعنی برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\text{مختصات نقطه‌ی B: } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow B(-1, 3)$$

توجه اگر بخواهیم مختصات D را هم به‌دست آوریم از رابطه‌ی $A + C = B + D$ استفاده می‌کنیم:

(هندسه‌ی مقدماتی و منفی‌های درجه دو) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۲)

□ ۴

□ ۳ ✓

□ ۲

□ ۱

(مسین هابیلو)

تمام قائم‌های رسم شده بر دایره از مرکز دایره می‌گذرند. پس با دادن دو مقدار دلخواه به m و یافتن نقطه‌ی تلاقی، مرکز دایره (O) را می‌یابیم:

$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow y = 1 \\ m = 1 \Rightarrow y = x - 1 \end{cases} \xrightarrow{y=1} 1 = x - 1 + 1 \Rightarrow x = 1$$

چون دایره محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است، بنابراین:

$$A(0, 3) \in \text{دایره} \Rightarrow OA = R \Rightarrow R = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره: } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

برای یافتن طول نقاط تلاقی با محور x ها، $y = 0$ قرار می‌دهیم.

$$(x-1)^2 + 1 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(هندسه‌ی مقدماتی و منفی‌های درجه دو) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۱ تا ۱۲۵)

□ ۴

□ ۳

□ ۲ ✓

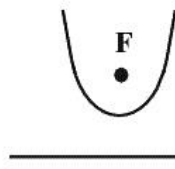
□ ۱

(هسین اسفینی)

طبق تعریف سهمی، نقطه‌ی $P(۲, -۴)$ همان کانون سهمی است (F) چون پرتوی بازتابش در امتداد محور y ها است، سهمی قائم است. حالا چون فاصله‌ی هر نقطه از کانون برابر فاصله‌اش از خط هادی است داریم:

$$AF = |y_A - y_{\text{هادی}}| \Rightarrow \sqrt{(۲-۳)^2 + (-۴+۴)^2} = |-۴ - y_{\text{هادی}}|$$

$$\Rightarrow ۱ = |۴ + y_{\text{هادی}}| \Rightarrow ۴ + y_{\text{هادی}} = \pm ۱ \Rightarrow y_{\text{هادی}} = -۵, -۳$$



ولی برای آن که سهمی محور x ها را قطع کند باید رو به بالا باشد لذا $y = -۵$ درست است. حال مختصات رأس سهمی را یافته و معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x_S = x_F = ۲, y_S = \frac{y_F + y_{\text{هادی}}}{۲} = \frac{-۴ + (-۵)}{۲} = -\frac{۹}{۲}, p = \frac{۱}{۲}$$

$$(x - x_S)^2 = ۴p(y - y_S) \Rightarrow (x - ۲)^2 = ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(y - \left(-\frac{۹}{۲}\right)\right)$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^2 = ۲y + ۹$$

برای پیدا کردن محل برخورد با محور x ها، y را صفر قرار می‌دهیم:

$$(x - ۲)^2 = ۹ \Rightarrow (x - ۲) = \pm ۳ \Rightarrow x_N = -۱, x_M = ۵ \Rightarrow MN = ۶$$

(هندسه‌ی مقدماتی و منحنی‌های درجه دو) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۳۴)

۴

۳

۲

۱

(فرهاد حامی)

$$\int_{-۱}^۲ (x + |x|) dx = \int_{-۱}^۰ (x - x) dx + \int_۰^۲ (x + x) dx = ۰ + \int_۰^۲ ۲x dx$$

$$= ۲ \left(\frac{x^2}{۲} \right) \Big|_۰^۲ = x^2 \Big|_۰^۲ = ۴ - ۰ = ۴$$

(انTEGRAL) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۵ تا ۱۷۱)

۴

۳

۲

۱

(هسین هاجیلو)

$$\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int (x^2 + x^{-2} - ۲) dx = \frac{x^3}{۳} + \frac{x^{-1}}{-۱} - ۲x + c$$

$$= \frac{x^3}{۳} - \frac{1}{x} - ۲x + c = \frac{x^4 - ۳ - ۶x^2}{۳x} + c = \frac{\overbrace{x^4 - ۶x^2 - ۳}^{f(x)}}{۳x} + c$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2(x^2 - ۶)$$

(انTEGRAL) (ریاضی عمومی، صفحه‌های ۱۶۷ تا ۱۷۱)

۴

۳

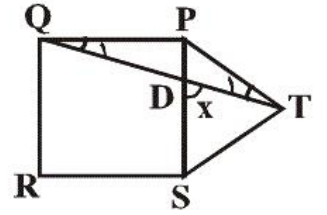
۲

۱

(علی غلامی)

مثلث QPT، متساوی الساقین است و داریم:

$$\begin{cases} \hat{QPT} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \\ \hat{T}_1 = \hat{Q}_1 = \frac{180^\circ - \hat{QPT}}{2} \Rightarrow \hat{T}_1 = 15^\circ \end{cases}$$



اگر نقطه‌ی تقاطع PS و QT را D بنامیم، آنگاه زاویه‌ی x، زاویه‌ی خارجی

مثلث PDT است و داریم: $\hat{x} = \hat{TPD} + \hat{T}_1 = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$

(هندسه و استرلا) (هندسه، مشابه تمرین ۱۳ صفحه‌ی ۲۶)

۴

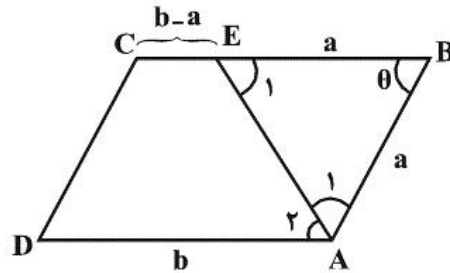
۳

۲

۱

(مهرداد ملوندی)

با توجه به شکل، اولاً $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، ثانیاً $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ ؛ پس $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ و در نتیجه مثلث ABE متساوی الساقین است ($AB = BE$).



طول ضلع‌های کوچک و بزرگ متوازی الاضلاع را a و b در نظر می‌گیریم، مطابق فرض داریم:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} a^2 \sin \theta}{ab \sin \theta} = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{7}{4}$$

(مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس) (هندسه، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵)

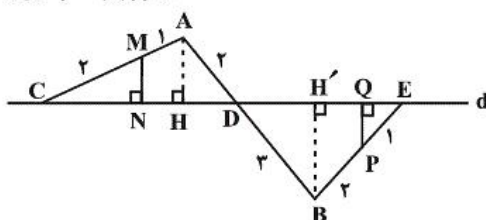
۴

۳

۲

۱

(مهردار ملوندی)



مطابق شکل،
عمودهای AH و BH' را بر خط d رسم می‌کنیم. طبق قضیه تالس در مثلث‌های روبرو داریم:

$$\Delta ACH : \frac{MN}{AH} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \frac{m}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}m$$

$$\Delta BEH' : \frac{PQ}{BH'} = \frac{PE}{BE} \Rightarrow \frac{n}{BH'} = \frac{1}{3} \Rightarrow BH' = 3n$$

دو مثلث قائم‌الزاویه ADH و BDH' با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AH}{BH'} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}m}{3n} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{m}{n} \right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$$

(تشابه) (هندسه ۱، صفحه‌های ۷۷ تا ۹۲)

۴

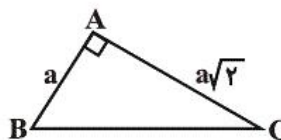
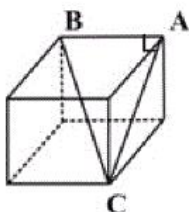
۳

۲

۱

(مسیرن فاپیلو)

طول هر یال مکعب را a در نظر می‌گیریم. مطابق شکل مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. همچنین چون AC قطر وجه مکعب است، پس طول آن برابر است با $AC = a\sqrt{2}$.



$$\left\{ \begin{array}{l} S(\Delta ABC) = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} (a)(a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \\ \text{مساحت کل مکعب} = 6a^2 \end{array} \right.$$

بنابراین نسبت مساحت کل مکعب به مساحت مثلث ABC برابر است

$$\frac{6a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} a^2} = 6\sqrt{2} \text{ با}$$

(شکل‌های فضایی) (هندسه ۱، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۶)

۴

۳

۲

۱