



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

۱۰۱- مجموع مربعات جواب‌های معادله‌ی $\log_2 \sqrt{2x+8} + 3 = \log_2 x^2 + 8x + 4$ برابر است با:

- (۱) ۲۵
(۲) ۳۴
(۳) ۹
(۴) ۲۹

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- در یک دنباله‌ی هندسی، حد مجموع جملات دنباله و حد مجموع مربعات جملات دنباله، برابر است. در این صورت جمله‌ی اول در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

- (۱) $[0, 2]$
(۲) $[-1, 1]$
(۳) $[-2, 0]$
(۴) $(2, 4]$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- نقطه A در یک طرف رودخانه و نقاط B و C در طرف دیگر طوری قرار دارند که $BC = 20$ ، $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$.

مساحت مثلث ABC چند برابر $\sin 15^\circ$ است؟

- (۱) ۱۰۰
(۲) $100\sqrt{6}$
(۳) ۲۰۰
(۴) $200\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر در معادله‌ی $x^2 - 12x + 8m^3 = 0$ یکی از جواب‌ها مربع جواب دیگر باشد، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{2}$
(۳) ۲
(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- معادله‌ی $1 - \sqrt{x} + x^2 = 2x$ چند جواب دارد؟

- (۱) دو جواب بزرگ‌تر از ۱ دارد.
(۲) فقط یک جواب مثبت کم‌تر از ۱ دارد.
(۳) فقط یک جواب بزرگ‌تر از ۱ دارد.
(۴) یک جواب بزرگ‌تر از ۱ و یک جواب کوچک‌تر از ۱ دارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر $f = \{(1, 3), (3, 1), (4, 3), (5, 3)\}$ و $g = \{(4, 1), (3, 3), (1, 4), (5, 1)\}$ باشند، به ازای کدام مقدار a رابطه‌ی

$\text{fog}(a) = \text{gof}(a)$ برقرار نیست؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر f تابعی با برد $R_f = [-3, 4]$ باشد، برد تابع $f^2 + 4f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱۵
(۲) ۱۶
(۳) ۳۵
(۴) ۳۶

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- f تابعی وارون پذیر، g تابعی فرد و $g(2x+1) = 3x + f\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)$ است. اگر $f(0) = 5$ باشد، آن گاه $f^{-1}(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- جواب های معادله $\sin \Delta x = \sin x + \cos 3x$ که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارند را به صورت $x = \frac{i\pi}{12}$ نشان می دهیم. مجموع

مقادیر i کدام است؟

- (۱) ۲۶
(۲) ۲۴
(۳) ۲۳
(۴) ۲۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + c & ; |x| \neq 1 \\ bx + d & ; |x| = 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. $c + d$ چقدر است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) -۲
(۴) -۳

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- جمعیت گونه‌ی خاصی از ماهی‌ها از دنباله‌ی بازگشتی $P_{n+1} = \frac{3P_n}{5 - P_n}$ تبعیت می کند که در آن P_n جمعیت پس از ماه n ام است.

اگر $P_1 = 1$ باشد، آن گاه $\{P_n\}$ به چه عددی همگراست؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x+2-\sqrt{x+8}}{2x^2+ax-3a^2} = b$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^2+x+5}{\sqrt{x^2-4}}$ در نقاط A و B با عرض‌های منفی همدیگر را قطع کنند، طول AB چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{5}$
(۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- کوچکترین جواب معادله $x = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
(۲) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
(۳) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$
(۴) $\left(-1, -\frac{3}{4}\right)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3 + 2) - f(2)}{x^3} = 3$ و تابع f یک تابع مشتق پذیر باشد به طوری که $g(x) = f(3x - 4)$ ، آن گاه $g'(2)$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۶
(۳) ۱۲
(۴) ۹

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- مشتق تابع $f(x) = \sin(2 \tan^{-1} x)$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{6}{5}$
(۲) $-\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{6}{25}$
(۴) $-\frac{6}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- خط مماس بر منحنی $y = \ln\left(\frac{\sqrt{6x+1}}{x^2 - 5x + 9}\right)$ در نقطه به طول ۴ واقع بر منحنی، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

- (۱) $\frac{12}{25}$
(۲) $\frac{16}{25}$
(۳) $\frac{48}{25}$
(۴) $\frac{24}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر $y = f(x)$ تابعی با دامنه R باشد که در رابطه $x^3 - y^3 + 2x - y + 7 = 0$ صدق می کند، شیب خط مماس بر منحنی

تابع $y = f^{-1}(x)$ در نقطه $y = 2$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $-\frac{13}{5}$
(۲) $\frac{5}{13}$
(۳) $\frac{13}{5}$
(۴) $-\frac{5}{13}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- نقاط $x = 0$ و $x = \pi$ به ترتیب از راست به چپ برای تابع $y = \sin x - x \cos x$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) ماکزیمم موضعی - عطف
(۲) مینیمم موضعی - عطف
(۳) عطف - ماکزیمم موضعی
(۴) عطف - مینیمم موضعی

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- حاصل ضرب عرض‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = 2x - |x^2 - 4|$ کدام است؟

- (۱) -۱۶
(۲) ۲۰
(۳) -۲۰
(۴) ۸۰

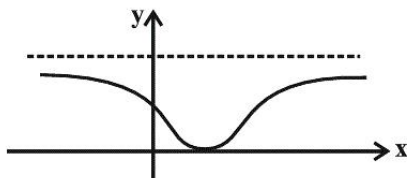
شما پاسخ نداده اید

۱۲۱- بیشترین محیط مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها برابر یک واحد است، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) $\sqrt{2} + 1$
(۴) $\sqrt{2} + 2$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- اگر نمودار $f(x) = \frac{ax^2 - 4x + b}{x^2 - 4x + 5}$ به صورت زیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۳
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ در بازه $[2, m]$ به ازای $n = 90$ ، مجموع بالا به اندازه $\frac{1}{4}$ واحد از مجموع پایین بیشتر است، مقدار m

کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$
 (۲) ۵
 (۳) ۴
 (۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- حاصل $\int \frac{\cos^3 x}{\cos x} dx$ کدام است؟

- (۱) $x + \cos 2x + c$
 (۲) $-x + \cos 2x + c$
 (۳) $x + \sin 2x + c$
 (۴) $-x + \sin 2x + c$

شما پاسخ نداده اید

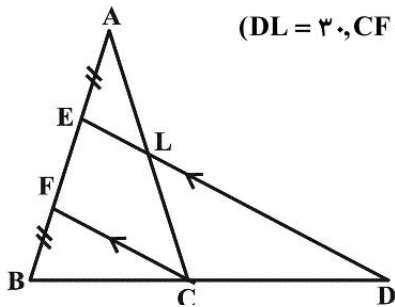
۱۲۵- یک مثلث متساوی الاضلاع را به ۳ چهارضلعی همنهشت که هر کدام دو زاویه قائمه دارند، تقسیم کرده ایم. اگر اندازه ی قطر

بزرگ یکی از چهارضلعی ها برابر $6\sqrt{2}$ واحد باشد، آن گاه مساحت این مثلث متساوی الاضلاع چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

- (۱) ۴۸
 (۲) ۵۴
 (۳) ۷۲
 (۴) ۱۰۸

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- با توجه به شکل مقابل، اگر $AE = BF$ باشد، آن گاه طول EL کدام است؟ ($DL = 3$ ، $CF = 8$)



- (۱) $\frac{2}{5}$
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- حجم هرم منتظم مربع القاعده ای با یال های مساوی برابر $36\sqrt{2}$ سانتی متر مکعب است. ارتفاع هرم چند سانتی متر است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$
 (۲) ۵
 (۳) ۶
 (۴) $3\sqrt{2}$

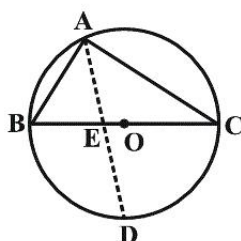
شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در مثلثی به اضلاع ۲۵، ۲۰ و ۱۵، فاصله ی نقطه ی همرسی میانه ها از کوچک ترین ارتفاع مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$
 (۲) $\frac{5}{2}$
 (۳) $\frac{7}{3}$
 (۴) $\frac{8}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- مطابق شکل، AD نیمساز زاویه ی A است. اگر $\widehat{CED} = 60^\circ$ باشد، اندازه ی زاویه ی C کدام است؟ (O مرکز دایره است.)



- (۱) 60°
 (۲) 45°
 (۳) 30°
 (۴) 15°

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- چند مثلث متمایز ABC می توان رسم کرد که در آن $\hat{A} = 45^\circ$ ، $BC = 6$ و رأس A به فاصله $3\sqrt{2}$ از عمود منصف ضلع BC باشد؟

- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) هیچ

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- تحت یک بازتاب نسبت به خط $D: 3y + ax + b = 0$ ، خط $D_1: 3y - 2x - 3 = 0$ به روی خط $D_2: 3y - 2x + 13 = 0$ تصویر می شود. تبدیل یافته ی خط D تحت نگاشت $T(x,y) = (x-1,y)$ محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

- (۱) $\frac{7}{3}$
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) $-\frac{7}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- تنها یک جفت صفحه ی موازی و متمایز P و P'، که به ترتیب شامل دو خط L و L' هستند، وجود دارد. اگر خط Δ متکی به هر دو خط L و L' باشد، چند صفحه شامل Δ و عمود بر P و P' وجود دارد؟

- (۱) بی شمار
(۲) دقیقاً یک
(۳) حداکثر یک
(۴) بی شمار یا یک

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- اگر بردار $v = (2\sqrt{3}, m, 6)$ با صفحه ی xOz، زاویه ی 30° بسازد، m کدام است؟

- (۱) ± 4
(۲) ± 2
(۳) $\pm 4\sqrt{3}$
(۴) $\pm 2\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- دو بردار a و b مفروض اند، به گونه ای که $|a| = 5$ و $|b| = 4$. اگر مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی دو بردار a و b برابر ۱۲ واحد باشد، آن گاه $a \cdot (a + b)$ برابر کدام است؟ (زاویه ی بین a و b، حاده است.)

- (۱) ۲۹
(۲) ۳۳
(۳) ۴۱
(۴) ۴۵

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- فصل مشترک صفحات $P: x - 2y = 0$ و $P': x + 2y = 4$ ، صفحه ی $Q: 2x - 3y + az = 5$ را در نقطه ای به ارتفاع ۱ قطع می کند. a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- صفحه ی گذرنده از سه نقطه ی $A(0, 2, -1)$ ، $B(1, 1, 0)$ و $C(1, 0, -1)$ ، چه فاصله ای از مبدأ مختصات دارد؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- دو دایره $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 - m^2 = 0$ فقط دو مماس مشترک، هر یک به طول $2\sqrt{3}$ دارند. شعاع دایره C_2 کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۱ یا ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- چند نقطه مانند P روی بیضی به معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ با کانونهای F و F' وجود دارد. به طوری که $PF^2 + PF'^2 = FF'^2$ باشد؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- A یک ماتریس متقارن وارون پذیر است، به گونه‌ای که $A^3 = A$. ماتریس $(AA^t - A^{-1})(A + A^{-1})^t$ همواره برابر کدام ماتریس است؟ (O ، ماتریس صفر است).

- (۱) O
(۲) $2(A - I)$
(۳) $2(I - A)$
(۴) I

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- اگر مقدار x در دستگاه معادلات $\begin{cases} x + y - z = a + 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 2y - z = b + 1 \end{cases}$ برابر ۲ باشد، مقدار x در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ bx + 2y - z = 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- امتیازات ۲۰ ورزشکار در یک رشته‌ی ورزشی مطابق جدول زیر است. قدر مطلق اختلاف بین میانگین و میانه‌ی این امتیازات کدام است؟ (کلید نمودار: $2 = 7/2$)

ساقه	برگ							
۷	۲	۳	۵	۶	۷	۷	۹	
۸	۰	۱	۲	۳	۵	۵	۷	۸
۹	۰	۱	۱	۳	۵			

- (۱) صفر
(۲) 0.05
(۳) 0.1
(۴) 0.15

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- ضریب تغییرات داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر ۲ و واریانس این داده‌ها برابر k است. اگر ضریب تغییرات داده‌های $2x_1 + 4, 2x_2 + 4, \dots, 2x_n + 4$ برابر یک باشد، k کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- در اثبات نامساوی $n! > 2^{2n(n+1)}$ به روش اصل استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به کار می‌رود؟

- (۱) $k^2 > k^2$
(۲) $k^{k+1} > k + 1$
(۳) $2^{2k} > k + 1$
(۴) $2^k > \frac{k}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- از میان مجموعه‌ی اعداد دو رقمی، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در میان اعداد انتخابی، حداقل دو عدد وجود دارند که هیچ‌کدام بر دیگری بخش پذیر نیست؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 2x\}$ ، مجموعه‌ی توانی $(A - B)$ چند زیر مجموعه‌ی سره دارد؟

- (۱) ۷
(۲) ۱۵
(۳) ۶۳
(۴) ۲۵۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- رابطه‌ی هم‌ارزی R روی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e\}$ تعریف شده است. اگر رابطه‌ی R ، مجموعه‌ی A را به سه کلاس هم‌ارزی افراز کرده باشد. حداقل تعداد اعضای رابطه‌ی R کدام است؟

- (۱) ۱۱
(۲) ۱۰
(۳) ۹
(۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، ۲ برابر احتمال وقوع اعداد دیگر است. اگر در یک بار پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی مقسوم علیه ۶ باشد، $P(A)$ کدام است؟

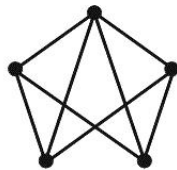
- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- در عبارت $2p - q$ ، مقدار p را به‌طور تصادفی در $[1, 2]$ و مقدار q را به‌طور تصادفی در $[-1, 3]$ انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال حاصل این عبارت کمتر از $\frac{1}{4}$ است؟

- (۱) $\frac{9}{64}$
(۲) $\frac{21}{64}$
(۳) $\frac{9}{32}$
(۴) $\frac{21}{32}$

شما پاسخ نداده اید



۱۴۹- در گراف شکل مقابل، چند دور به طول ۴ وجود دارد؟

- (۱) ۶
(۲) ۵
(۳) ۴
(۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- از رابطه‌ی $\overline{(abc)}_7 = \overline{(baa)}_7$ ، مقدار c کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۱- اگر $4a = 3b$ و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد $a^2 + b^2 + ab$ و $a^2 - b^2$ برابر ۱۸۵۰ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۳۵
(۲) ۴۲
(۳) ۴۹
(۴) ۵۶

شما پاسخ نداده اید

۱۵۲- اگر معادله‌ی $(a^2 + 2)x \equiv 7 \pmod{3}$ دارای جواب باشد ($a \in \mathbb{Z}$)، برای x چند جواب طبیعی بین ۴۰ و ۱۰ وجود دارد؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۰
(۳) ۱۱
(۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۵۳- اگر رابطه‌ی R بر روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به شکل $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (d, b)\}$ تعریف شده باشد، آنگاه رابطه‌ی ROR دارای چند عضو می‌باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۱

شما پاسخ نداده اید

۱۵۴- به چند طریق می‌توان بین شهرهای A، B، C و D، تعدادی جاده احداث کرد به گونه‌ای که هر جاده بین دو شهر باشد و بین هر دو شهر، حداکثر یک جاده احداث شود و هر کدام از شهرهای A و B، حداقل دارای یک جاده باشند؟

- (۱) ۵۰ (۲) ۳۲ (۳) ۱۸ (۴) ۱۰

شما پاسخ نداده اید

۱۵۵- ظرف اول شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و ظرف دوم شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. سپس مهره‌ای از ظرف دوم خارج می‌کنیم. اگر مهره‌های خارج شده از ظرف اول و دوم هم‌رنگ باشند، با کدام احتمال مهره‌ی خارج شده از ظرف اول سفید است؟

- (۱) $\frac{9}{13}$ (۲) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{4}{13}$

شما پاسخ نداده اید

-۱۰۱

(کاتظم ابلالی)

معادله را به صورت ساده تر می نویسیم:

$$\log_2^{4x^2+8x+4} - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}^{2x+8} = 3$$

$$\Rightarrow \log_2^{4x^2+8x+4} - \log_2^{2x+8} = 3$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{4x^2+8x+4}{2x+8} = 3 \Rightarrow \frac{4x^2+8x+4}{2x+8} = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4 = 16x+64 \Rightarrow x^2-2x-15=0$$

$$x = 5, -3$$

هر دو جواب قابل قبول اند، پس: $25 + 9 = 34$ = مجموع مربع های جواب ها

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتم: صفحه های ۱۱۱ تا ۱۱۹)

۴

۳

۲

۱

-۱۰۲

(فریدون ساعتی)

$$\text{جملات دنباله } a_1, a_1q, a_1q^2, \dots \Rightarrow \text{حد مجموع} = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\text{مربعات دنباله } a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, \dots \Rightarrow \text{حد مجموع مربعات} = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(a_1)}{(1-q)(1+q)}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{a_1}{1+q} \Rightarrow 1+q = a_1$$

از طرفی می دانیم $|q| < 1$. در نتیجه:

$$|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1 \Rightarrow 0 < q+1 < 2 \Rightarrow 0 < a_1 < 2$$

البته جمله ی نخست یعنی a_1 ، صفر نیز می تواند باشد، پس: $0 \leq a_1 < 2$.

(مسابان - دنباله های حسابی و هندسی: صفحه های ۲ تا ۶)

۴

۳

۲

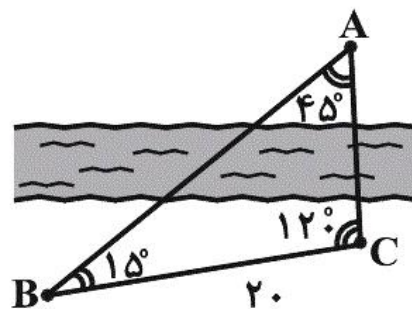
۱

(فریدون ساعتی)

$$\Delta_{ABC}: \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{AC}{\sin 15^\circ}$$

$$\Rightarrow AC = 20 \cdot \sqrt{2} \sin 15^\circ$$



$$S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2}(BC \times AC)(\sin 12^\circ) = \frac{1}{2}(20)(20 \cdot \sqrt{2} \sin 15^\circ) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 100 \cdot \sqrt{6} \sin 15^\circ$$

(ریاضی ۲ - مثلثات: صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲✓

۱

(ممد گل صفتان)

اگر α و β جواب‌های معادله باشد، داریم:

$$\alpha = \beta^2 \Rightarrow (\alpha \cdot \beta) = \beta^3 \Rightarrow 8m^3 = \beta^3 \Rightarrow \beta = 2m$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \beta^2 + \beta = 4m^2 + 2m = 12 \Rightarrow (2m + 4)(2m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ \text{یا} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار m ، معادله دارای دو جواب است و قابل قبول است.

$$m \text{ مجموع مقادیر ممکن برای } m = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$

(مسابان - معادلات جبری، معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

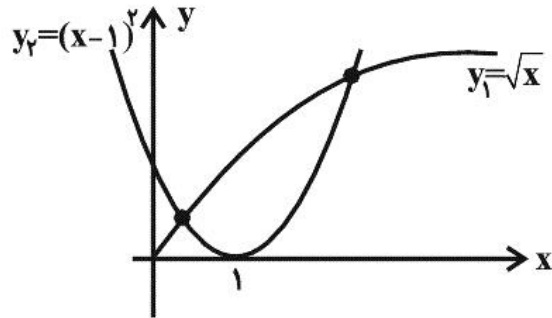
۳

۲✓

۱

$$1 - \sqrt{x} + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = \sqrt{x} \Rightarrow (x-1)^2 = \sqrt{x}$$

محل برخورد نمودارهای توابع $y_1 = \sqrt{x}$ و $y_2 = (x-1)^2$ جوابهای معادله است.



مطابق نمودار، ملاحظه می‌کنیم دو تابع هم‌دیگر را در دو نقطه با طول‌های مثبت بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۱ قطع می‌کنند.

(مسئله‌بان - معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(ناظم ابلالی)

کافی است گزینه‌ها را بررسی کنیم:

$$a = 3 : \begin{cases} fog(3) = f(g(3)) = f(3) = 1 \\ gof(3) = g(f(3)) = g(1) = 4 \end{cases}$$

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(ممد، رضا اسلامی)

با توجه $y = f^2 + 4f = (f+2)^2 - 4$ داریم: $-3 \leq f(x) < 4$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) + 2 < 6 \Rightarrow 0 \leq (f(x) + 2)^2 < 36$$

$$\Rightarrow -4 \leq (f(x) + 2)^2 - 4 < 32$$

پس برد این تابع شامل اعداد صحیح $-4, -3, \dots, 31$ است. که جمعاً ۳۶ تا است.

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۶۹)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(ممد، رضا اسلامی)

با قراردادن $x = -1$ در رابطه از $f(0) = 5$ استفاده می‌کنیم:

$$g(-1) = -3 + f(0) = -3 + 5 = 2 \xrightarrow{\text{فرد } g} g(1) = -g(-1) = -2$$

حال $x = 0$ را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$g(1) = 0 + f(1) \Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow f^{-1}(-2) = 1$$

(مسئله‌بان - تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۵)

(فریدون ساعتی)

$$\sin 3x - \sin x = \cos 3x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 3x - \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3x(2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ یا } 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \text{ یا } x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \text{مجموعه جوابها} = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{6\pi}{12}, \frac{10\pi}{12} \right\}$$

$$\Rightarrow i \in \{1, 2, 6, 5, 10\} \Rightarrow \text{مجموع} = 1 + 2 + 6 + 5 + 10 = 24$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۴)

۴

۳

۲✓

۱

(کاظم ابلالی)

باید حد تابع و مقدار آن در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ برابر باشد. چون حد مخرجکسر $\frac{x^2 - ax + c}{1 - x^2}$ در $x = 1$ و $x = -1$ برابر صفر است، باید حد صورت

آن هم صفر باشد. چون در غیر این صورت حد تابع نامتناهی خواهد بود و نمی‌تواند پیوسته باشد. پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + c) = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - ax + c) = 0 \Rightarrow 1 + a + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x^2} = -1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \right\} \Rightarrow b + d = -1$$

$$f(1) = b + d$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{1 - x^2} = -1 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -1} f(x)} \right\} \Rightarrow -b + d = -1$$

$$f(-1) = -b + d$$

بنابراین باید داشته باشیم $b = 0$ و $d = -1$ پس نتیجه می‌شود: $c + d = -2$ و گزینه‌ی «۳» درست است.

(مسابان - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

۴

۳✓

۲

۱

بافرض این که دنباله به L همگراست، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3P_n}{5 - P_n} \Rightarrow L = \frac{3L}{5 - L}$$

$$\Rightarrow 5L - L^2 = 3L \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

با محاسبه‌ی چند جمله‌ی ابتدایی در می‌یابیم که دنباله نزولی است و به صفر نزدیک

$$\{P_n\} = 1, \frac{3}{4}, \frac{9}{17}, \dots \quad \text{می‌شود:}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

با توجه به این که حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow a$ برابر صفر است، صورت کسر

نیز باید در $x = a$ دارای حد صفر باشد:

$$x + 2 = \sqrt{x + 8} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x + 8$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

پس باید $a = 1$ و حد کسر وقتی $x \rightarrow 1$ را محاسبه کنیم تا b به دست آید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 2 - \sqrt{x + 8}}{2x^2 + x - 3} \times \frac{(x + 2) + \sqrt{x + 8}}{(x + 2) + \sqrt{x + 8}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)^2 - (x + 8)}{(2x^2 + x - 3)(3 + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{6(2x^2 + x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{6(x - 1)(2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{6(2x + 3)} = \frac{5}{6 \times 5} = \frac{1}{6}$$

پس $b = \frac{1}{6}$ و $a = 1$ ، در نتیجه:

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(فریدون ساعتی)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 5}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 5}{|x|}$$

$$= \begin{cases} x \rightarrow +\infty : y = x + 1 & \text{مجانِب مایل} \\ x \rightarrow -\infty : y = -x - 1 & \text{مجانِب مایل} \end{cases}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \text{مجانِب های قائم}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 & \text{غ ق ق} \\ y = -3 & \end{cases}, \quad x = -2 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 & \\ y = 1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

دقت کنید عرض نقاط A و B باید منفی باشد.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۲۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(هاری پلور)

تابع $f(x) = x - \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ را در نظر می‌گیریم و داریم:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
f(x)	-1	$\frac{-3+2\sqrt{3}}{4} > 0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

با توجه به جدول فوق، تابع قطعاً در بازه‌های $\left(\frac{-3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-1, \frac{-3}{4}\right)$ ریشهدارد. زیرا $f(-1).f\left(\frac{-3}{4}\right) < 0$ و $f\left(\frac{-3}{4}\right).f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ ولی چون کوچکترینریشه مدنظر است. باید بازه‌ی $\left(-1, \frac{-3}{4}\right)$ در میان گزینه‌ها درست باشد، پس

گزینه‌ی «۴» صحیح است.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(هاری پلاور)

$$\xrightarrow{x^3=h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt[3]{h}) - f(0)}{h} = 3 \Rightarrow f'(y) = 3$$

$$g(x) = f(\sqrt[3]{x} - 4) \Rightarrow g'(x) = 3f'(\sqrt[3]{x} - 4)$$

$$g'(y) = 3f'(\sqrt[3]{y} - 4) = 3f'(y) = 3 \times 3 = 9$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۳۱ و ۱۵۱ تا ۱۵۴)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(ممد رضا شوکتی بیرق)

$$\alpha = \tan^{-1} x \Rightarrow \tan \alpha = x$$

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{\tan^{-1} x}) = \sin \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\sqrt[3]{\tan \alpha}}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 4x^{\sqrt[3]{2}}}{(1+x^2)^{\sqrt[3]{2}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt[3]{2} - 2x^{\sqrt[3]{2}}}{(1+x^2)^{\sqrt[3]{2}}}$$

$$\Rightarrow f'(y) = -\frac{6}{25}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن؛ صفحه‌های ۱۴۰ و ۱۴۱ و ۱۵۸)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(فریدون ساعتی)

$$\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}{\longrightarrow} y = \ln(\sqrt{6x+1}) - \ln(x^2 - 5x + 9)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(6x+1) - \ln(x^2 - 5x + 9)$$

$$\xrightarrow{x=4} y = \frac{1}{2} \ln 25 - \ln 5 = \ln 5 - \ln 5 = 0$$

$\Rightarrow A(4, 0)$ نقطه تماس

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{6x+1} \right) - \frac{2x-5}{x^2-5x+9}$$

$$\Rightarrow \text{شیب مماس} = y'(4) = \frac{3}{25} - \frac{3}{5} = \frac{3-15}{25} = -\frac{12}{25}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی مماس: } y - 0 = -\frac{12}{25}(x-4) \xrightarrow{x=0} y = \frac{48}{25}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۹ تا ۱۶۳)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

(کظم ایلامی)

اگر در رابطه‌ی داده شده جای x و y را عوض کنیم، رابطه‌ای به دست می‌آید که

$$y^3 - x^3 + 2y - x + 7 = 0 \quad \text{وارون } f \text{ در آن صدق می‌کند:}$$

$$y^3 - 8 + 2y - 2 + 7 = 0 \quad \text{اگر } x = 2 \text{ باشد، داریم:}$$

$$y^3 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$$

حال مشتق y نسبت به x را محاسبه می‌کنیم:

$$3y^2 y' - 3x^2 + 2y' - 1 = 0 \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=1}}$$

$$3y' - 12 + 2y' - 1 = 0 \Rightarrow 5y' = 13 \Rightarrow y' = \frac{13}{5}$$

شیب خط مماس بر منحنی $y = f^{-1}(x)$ در $x = 2$ برابر $\frac{13}{5}$ است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۸)

□۴

□۳✓

□۲

□۱

$$y = \sin x - x \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

$$\Rightarrow y'' = \sin x + x \cos x$$

مشتق اول در $x = \pi$ برابر صفر بوده و در همسایگی آن از مثبت به منفی تغییر

علامت می‌دهد. پس این نقطه، یک نقطه‌ی ماکزیمم موضعی تابع است.

مشتق دوم در $x = 0$ برابر صفر بوده و در همسایگی آن از منفی به مثبت تغییر

علامت می‌دهد. پس این نقطه، یک نقطه‌ی عطف تابع است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۹۱)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(کاظم اجلالی)

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 + 4 & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ 2x + x^2 - 4 & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & ; x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ 2 + 2x & ; -2 < x < 2 \end{cases}$$

در نقاط $x = 2$ و $x = -2$ مشتق چپ و راست تابع برابر نیستند، پس مشتق

وجود ندارد و این نقاط بحرانی‌اند. همچنین داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی تابع به صورت $(2, 4)$ و $(-2, -4)$ و $(-1, -5)$ خواهد بود

که حاصل ضرب عرض آن‌ها ۸۰ است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۰ تا ۱۷۲)

 ۴

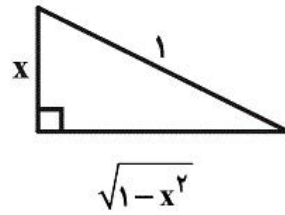
 ۳

 ۲

 ۱

(کاظم ایلالی)

مثلث را به شکل مقابل در نظر می‌گیریم:



بنابراین داریم:

$$P = x + 1 + \sqrt{1-x^2}, 0 < x < 1$$

$$P' = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow P_{\max} = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(میبیب شفیع)

$$f'(x) = \frac{(2ax - 4)(x^2 - 4x + 5) - (2x - 4)(ax^2 - 4x + b)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

$$= \frac{(-4a + 4)x^2 + 2(\Delta a - b)x - 20 + 4b}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

با توجه به نمودار، مشتق فقط یک ریشه‌ی ساده دارد. پس باید درجه‌ی صورت یک

$$-4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1$$

باشد. بنابراین:

منحنی بر محور x ها مماس است پس $f(x)$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$x^2 - 4x + b = 0 \xrightarrow{\Delta=0} 16 - 4b = 0$$

$$\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a + b = 5$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۱۰)

 ۴ ۳ ۲ ۱

(عمید علیزاده)

تابع در بازه‌ی داده شده نزولی است. $\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$

$$\Delta x = \frac{m-2}{9}$$

$$U_n(f) - L_n(f) = (f(2) - f(m))\Delta x = \left(2 - \frac{m}{m-1}\right)\left(\frac{m-2}{9}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{m-2}{m-1}\right)\left(\frac{m-2}{9}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow 4m^2 - 25m + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(4m-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 > 2 \\ m = 1/4 < 2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۱۱ تا ۲۲۶)

(ممد رضا شوکتی بیرق)

ابتدا از اتحاد $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ استفاده می‌کنیم:

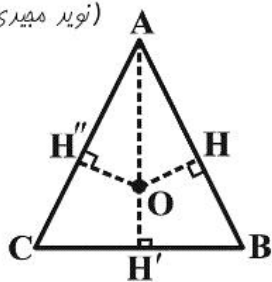
$$\int \frac{\cos 3x}{\cos x} dx = \int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x} dx = \int (4\cos^2 x - 3) dx$$

حال از اتحاد $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int (2(1 + \cos 2x) - 3) dx &= \int (-1 + 2\cos 2x) dx \\ &= -x + \sin 2x + c \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۲۷ تا ۲۴۰)

(نویز میری)



مثلث متساوی الاضلاع به اندازهی ضلع a را می‌توانیم مانند شکل، به ۳ چهارضلعی هم‌نهشت تقسیم کنیم. با توجه به هم‌نهشتی چهارضلعی‌ها فاصله‌ی نقطه‌ی O (رأس مشترک چهارضلعی‌ها) تا هر ضلع برابر با $\frac{1}{3}$ ارتفاع می‌شود. چون در هر

مثلث متساوی الاضلاع اندازه‌ی ارتفاع (h) برابر با $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ است، پس

خواهیم داشت: $OA = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ اندازه‌ی قطر بزرگ چهارضلعی

$$\xrightarrow{\text{داده‌ی سؤال}} \frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{6}$$

$$\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس: صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۴

۳

۲✓

۱

(رضا عباسی اصل)

با توجه به فرض $AE = BF$ ، واضح است که $AF = BE$ داریم:

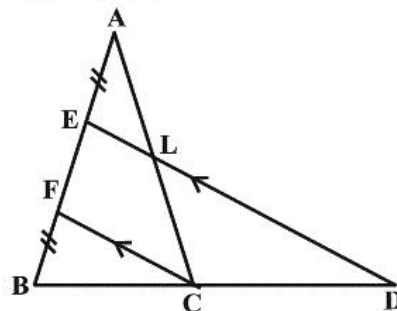
$$\left. \begin{array}{l} \triangle AFC: \frac{AE}{AF} = \frac{x}{8} \\ \triangle BED: \frac{BF}{BE} = \frac{8}{x+30} \end{array} \right\} \begin{array}{l} AE=BF \\ AF=BE \end{array} \rightarrow \frac{x}{8} = \frac{8}{x+30}$$

$$\Rightarrow x^2 + 30x - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (x+32)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -32 & \text{غ ق} \\ x = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۷۷ تا ۸۳)



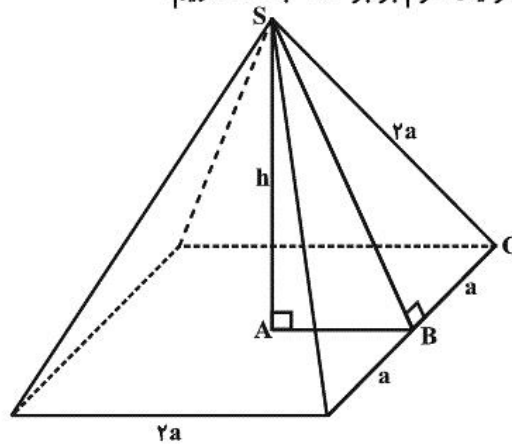
۴

۳

۲✓

۱

فرض کنیم طول هر یال هرم برابر $2a$ باشد، داریم:



$$\Delta SBC : SB^2 = (2a)^2 - a^2$$

$$\Rightarrow SB = \sqrt{3}a$$

$$\Delta SAB : h^2 = SB^2 - AB^2 = 3a^2 - a^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}a$$

$$V = \frac{1}{3}S.h \xrightarrow{h=\sqrt{2}a} 36\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times (2a)^2 \times (\sqrt{2}a) \quad \text{حال:}$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3 = 36\sqrt{2} \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow h = 3\sqrt{2}$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۳۵)

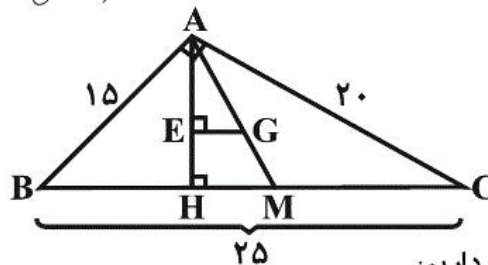
۴ ✓

۳

۲

۱

(معمّر طاهر شعاعی)



مثلث به اضلاع ۲۰، ۲۵ و ۱۵، قائم‌الزاویه است و کوچک‌ترین ارتفاع بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود.

اگر G نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها باشد، داریم:

$$\Delta AEG \text{ با } \Delta AHM \text{ متشابه است.} \Rightarrow \frac{GE}{MH} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow GE = \frac{2}{3}MH$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 15^2 = BH \times 25 \Rightarrow BH = \frac{15 \times 15}{5 \times 5} = 9$$

$$MH = BM - BH = \frac{25}{2} - 9 = \frac{25 - 18}{2} = \frac{7}{2}$$

$$GE = \frac{2}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{3}$$

(هندسه ۲ - استرلال: صفحه‌ی ۳۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

(ممد فندان)

چون BC قطر دایره است، $\widehat{BAC} = 90^\circ$ است. AD نیمساز است پس کمان روبه‌رویش را نصف می‌کند، در نتیجه $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = 45^\circ$ و کمان $\widehat{CD} = 90^\circ$ است. حال داریم:

$$\widehat{CED} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{90^\circ + \widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 30^\circ$$

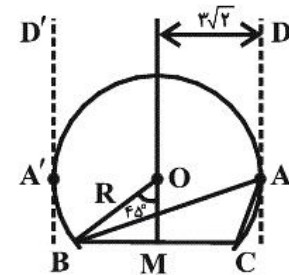
$$\Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 15^\circ$$

(هندسه ۲ - دایره؛ صفحه‌های ۵۸ و ۶۸)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(ممد ابراهیم کیتی زاده)

مکان هندسی رأس A از طرفی، کمان در خور زاویه‌ی 45° روبه‌روی وتر $BC = 6$ و از طرفی دیگر، دو خط D و D' موازی با عمودمنصف BC و به فاصله $3\sqrt{2}$ از آن است. رأس A از برخورد دو خط D و D' با کمان در خور به‌دست می‌آید.



شعاع دایره کمان در خور:

$$OA = OB = R = \frac{BC}{2 \sin \alpha} = \frac{6}{2 \sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$$

چون فاصله‌ی عمودمنصف BC از هر خط با شعاع دایره برابر است، دو خط D و D' بر دایره مماس‌اند و دو نقطه تماس A و A' نسبت به عمودمنصف قرینه یکدیگرند، یعنی مسأله یک جواب ABC دارد.

(هندسه ۲ - دایره؛ صفحه‌های ۶۱ تا ۶۷)

- ۱ ۲ ۳ ۴

(نویر میندی)

چون دو خط D_1 و D_2 موازی هستند، پس محور بازتاب (خط D) هم با آن‌ها موازی است و $a = -2$ خواهد بود. چون D بین D_1 و D_2 قرار می‌گیرد، پس $b = \frac{13-3}{2} = 5$ و از این‌رو $D: 3y - 2x + 5 = 0$. از ضابطه‌ی $T(x, y) = (x-1, y)$ و با فرض $(X, Y) = (x-1, y)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases} \xrightarrow{\text{جای گذاری در } D} \begin{cases} 3Y - 2(X + 1) + 5 = 0 \\ \Rightarrow 3Y - 2X + 3 = 0 \end{cases}$$

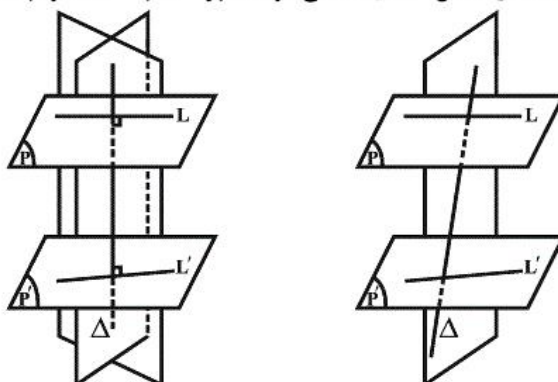
(هندسه ۲ - تبدیل‌های هندسی؛ صفحه‌های ۹۷ تا ۱۰۳ و ۱۱۹ تا ۱۲۲)

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۲-

(نوبت میبیدی)

هرگاه درست یک جفت صفحه‌ی موازی با هم شامل دو خط مفروض وجود داشته باشد، آن‌گاه آن دو خط مفروض نسبت به هم متناظرند. پس در این‌جا هم L و L' متناظرند. حال اگر خط Δ که متکی بر هر دوی L و L' است، بر این دو خط عمود باشد، بی‌شمار صفحه شامل Δ وجود دارد که بر P و P' عمود باشد، اما اگر Δ عمود بر این دو خط نباشد، تنها یک صفحه‌ی شامل Δ یافت می‌شود که بر P و P' عمود باشد.



(هندسه ۲ - هندسه فضایی؛ صفحه‌های ۱۵۵ و ۱۵۶)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۳-

(مفسر مفسر کریمی)

از این که بردار v با صفحه‌ی XOZ ، زاویه‌ی 30° درجه ساخته است، نتیجه می‌گیریم با جهت مثبت محور y زاویه 60° و یا 120° می‌سازد.

پس: $\beta = 60^\circ$ یا $120^\circ \Rightarrow \cos \beta = \pm \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{m}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + m^2 + (6)^2}} = \frac{m}{\sqrt{48 + m^2}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 + 48 = 4m^2 \Rightarrow m = \pm 4$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۱ ۲ ۳ ۴

۱۳۴-

(نوبت میبیدی)

$$|a \times (a + b)| = \text{مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده روی } a \text{ و } a + b$$

$$|\underbrace{a \times a}_0 + a \times b| = |a \times b|$$

$$\longrightarrow |a \times b| = |a| |b| \sin \theta = 12 \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

حال به کمک $\cos \theta$ می‌توانیم بنویسیم:

$$a \cdot (a + b) = |a|^2 + a \cdot b = |a|^2 + |a| |b| \cos \theta$$

$$= 25 + 4 \times 5 \times \frac{4}{5} = 25 + 16 = 41$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۶ و ۲۵ تا ۳۰)

۱ ۲ ۳ ۴

(رضا عباسی اصل)

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{معادله‌ی فصل مشترک } P \text{ و } P'$$

$$2x - 3y + az = 5 \Rightarrow 2(2) - 3(1) + a(1) = 5$$

$$\Rightarrow 1 + a = 5 \Rightarrow a = 4$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

[۴]✓

[۳]

[۲]

[۱]

(نوید میری)

بردار عمود بر صفحه (بردار نرمال صفحه) موازی با $\overline{AB} \times \overline{AC}$ باید باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overline{AB} = (1 - 0, 1 - 2, 0 - (-1)) = (1, -1, 1) \\ \overline{AC} = (1 - 0, 0 - 2, -1 - (-1)) = (1, -2, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AC} = (1, -1, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, -1)$$

اگر n بردار نرمال باشد، معادله‌ی صفحه‌ی گذرا از مثلاً B و عمود بر $n = (2, 1, -1)$ برابر می‌شود با:

$$P: 2(x - 1) + 1(y - 1) - (z - 0) = 0 \Rightarrow P: 2x + y - z - 3 = 0$$

فاصله‌ی مبدأ از صفحه‌ی $ax + by + cz + d = 0$ برابر

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

است. (تمرین ۸ صفحه‌ی ۴۷ کتاب درسی هندسه تحلیلی) پس به کمک این فرمول در این‌جا داریم:

$$P \text{ از مبدأ فاصله‌ی } = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۷)

[۴]

[۳]

[۲]

[۱]✓

(مهدی ابراهیم کیتی زاده)

$$C_1: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O_1(-1, 2), R_1 = 2$$

$$C_2: (x-1)^2 + (y+1)^2 = m^2 \Rightarrow O_2(1, -1), R_2 = m, m > 0$$

$$O_1O_2 = d = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

دو دایره چون دو مماس مشترک دارند، متقاطع‌اند: $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{13 - (2 - m)^2} \Rightarrow (2 - m)^2 = 1 \Rightarrow 2 - m = \pm 1$$

$$m = R_2 = 1 \Rightarrow d > R_1 + R_2 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$m = R_2 = 3 \Rightarrow |R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2 \text{ قابل قبول}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

[۴]

[۳]

[۲]✓

[۱]

۱۳۸-

(معمرباشا دلاورنژاد)

چون مثلث PFF' در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کند، پس P روی دایره‌ای به قطر FF' یا دایره‌ای به مرکز بیضی و شعاع c می‌باشد، از آن‌جا که $c = \sqrt{3} > 1 = b$ و چون $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$ پس دایره، بیضی را در ۴ نقطه قطع می‌کند و ۴ نقطه مانند P وجود دارد.
(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی؛ صفحه‌های ۵۲ تا ۶۴)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

۱۳۹-

(نوید میری)

چون A وارون پذیر است، با ضرب دو طرف برابری $A^3 = A$ در A^{-1} ، خواهیم داشت: $A^3 \cdot A^{-1} = AA^{-1} \Rightarrow A^2 = I$. با توجه به $A^2 = I$ نتیجه می‌گیریم که $A = A^{-1}$. حال از این که A متقارن است ($A^t = A$) می‌توانیم بنویسیم:
 $(AA^t - A^{-1})(A + A^{-1})^t = (A \cdot A - A)(A + A)^t$
 $= (A^2 - A)(2A)^t = (I - A)2(A^t) = 2(I - A)(A)$
 $= 2(A - A^2) = 2(A - I)$
(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ صفحه‌ی ۱۰۶، دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۷)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

۱۴۰-

(امیرحسین ابومصوب)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ b+1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = 2$$

براساس روش کرامر داریم:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ b+1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ b & 2 & -1 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_0$$

از طرفی داریم:

(دلیل صفر بودن دترمینان آن است که ستون سوم، مضربی از ستون اول است)

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ b & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

اکنون برای دستگاه معادلات دوم داریم:

(هندسه تحلیلی - دستگاه معادلات قطبی؛ صفحه‌های ۱۴۴ و ۱۴۵)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۴۱

(امیرحسین ابومصوب)

تعداد داده‌ها زوج است، پس میانگین دو داده‌ی وسطی برابر میانه است، یعنی داریم:

$$\text{میانه} = \frac{۸/۲ + ۸/۳}{۲} = ۸/۲.۵$$

همچنین میانگین داده‌ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{(۷ \times ۷) + (۸ \times ۸) + (۵ \times ۹) + ۸}{۲۰} = \frac{۱۶۶}{۲۰} = ۸/۳$$

پس قدرمطلق اختلاف میانگین و میانه برابر است با: $۸/۳ - ۸/۲.۵ = ۰/۰.۵$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های مرکزی؛ صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹ و ۱۱۶ تا ۱۲۵)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۴۲

(امیرحسین ابومصوب)

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = ۲ \Rightarrow \frac{\bar{x}_1}{\sigma_1} = \frac{۱}{۲}$$

$$CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = ۱ \Rightarrow \frac{۲\sigma_1}{۲\bar{x}_1 + ۴} = ۱ \Rightarrow \frac{۲\bar{x}_1 + ۴}{۲\sigma_1} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x}_1}{\sigma_1} + \frac{۲}{\sigma_1} = ۱ \Rightarrow \frac{۲}{\sigma_1} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sigma_1 = ۴ \Rightarrow k = \sigma_1^2 = ۱۶$$

(آمار و مدل‌سازی - شافص‌های پراکنندگی؛ صفحه‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۴۳

(فرزاد بواری)

ابتدا ظاهر نامساوی را به صورت $۴^{n(n+1)} > n!$ تغییر می‌دهیم. باید از درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ را نتیجه‌گیری کنیم:

$$P(k): ۴^{k(k+1)} > k! \quad (*)$$

$$P(k+1): ۴^{(k+1)(k+2)} > (k+1)!$$

$$۴^{k(k+1)} \times ۴^{۲(k+1)} > (k+1)! \quad (**)$$

حال باید طرف چپ (*) را شبیه به طرف چپ (**) در آوریم. برای این منظور

طرفین (*) را در $۴^{۲(k+1)}$ ضرب می‌کنیم:

$$(*) : ۴^{k(k+1)} \times ۴^{۲(k+1)} > ۴^{۲(k+1)} \times k!$$

حال کافی است درستی $۴^{۲(k+1)} \times k! > (k+1)!$ را ثابت کنیم:

$$۴^{۲(k+1)} \times k! > (k+1)k! \Rightarrow ۴^{۲(k+1)} > k+1$$

$$\Rightarrow ۱۶^{k+1} > k+1$$

رابطه‌ی $۱۶^{k+1} > k+1$ به ازای هر k طبیعی، برقرار و بدیهی است.

(پیر و احتمال - استرلال ریاضی؛ صفحه‌های ۸ تا ۱۲)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۴۴

(امیرحسین ابومحوب)

اعداد دو رقمی را به ۴ گروه زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{10, 11, \dots, 19\} \{20, 21, \dots, 29\} \{40, 41, \dots, 49\} \{80, 81, \dots, 89\}$$

واضح است که در هر کدام از گروه‌ها، هیچ‌کدام از اعضا بر عضو دیگر گروه بخش پذیر نیست. بنابراین طبق اصل لانه‌ی کبوتر، اگر حداقل ۵ عدد دو رقمی انتخاب کنیم، حداقل دو عدد از میان آن‌ها وجود خواهند داشت که به یکی از این گروه‌های چهارگانه تعلق دارند و در نتیجه هیچ‌کدام بر دیگری بخش پذیر نیستند.

(پیر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۴۵

(رضا عباسی اصل)

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ و } B = \{1, 2\}$$

$$A - B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} - \{1, 2\} = \{-2, -1, 0\}$$

تعداد اعضای مجموعه‌ی توانی یک مجموعه Π عضوی برابر است با 2^{Π} . $P(A - B)$ دارای $2^3 = 8$ عضو است، در نتیجه تعداد زیر مجموعه‌های $P(A - B)$ برابر 2^8 و تعداد زیر مجموعه‌های سره‌ی $P(A - B)$ برابر $2^8 - 1$ یعنی ۲۵۵ است.

(پیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰ و ۵۲)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۴۶

(کاظم باقرزاده‌چهره)

چون رابطه R به ۳ کلاس هم‌ارزی افزاشده است، این کلاس‌ها می‌توانند دارای

$$\{\{1\text{ عضو}\}, \{2\text{ عضو}\}, \{2\text{ عضو}\}\} \Rightarrow |R| = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\{\{1\text{ عضو}\}, \{1\text{ عضو}\}, \{3\text{ عضو}\}\} \Rightarrow |R| = 1^2 + 1^2 + 3^2 = 11$$

بنابراین حداقل تعداد اعضای R برابر ۹ است.

(پیر و احتمال - مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه؛ صفحه‌های ۶۷ تا ۷۰)

۴

۳✓

۲

۱

(عباس اسدی امیرآبازی)

$$P(۱) = P(۴) = P(۶) = x \Rightarrow P(۲) = P(۳) = P(۵) = ۲x$$

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$

$$x + ۲x + ۲x + x + ۲x + x + ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۹}$$

$$A = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$$

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۶) = P(A)$$

$$\frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

(بیر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۹۶ تا ۱۰۱)

۴

۳

۲

۱

(علی سعیدی زار)

مقدار q را روی محور x ها و مقدار p را روی محور y ها نمایش می‌دهیم.

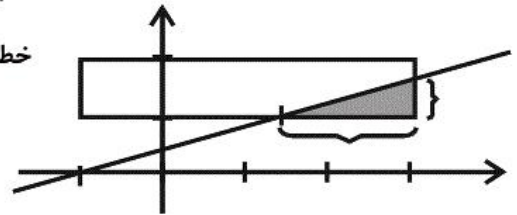
$$x \in [-۱, ۳], y \in [۱, ۲]$$

$$۲p - q < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲y - x < \frac{۱}{۲}$$

خط $۲y - x = \frac{۱}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

$$y = ۱ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$x = ۳ \Rightarrow y = \frac{۷}{۴}$$



$$P(A) = \frac{\text{مساحت هاشور خورده}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right)}{4 \times 1} = \frac{9}{64}$$

(بیر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۱۱)

۴

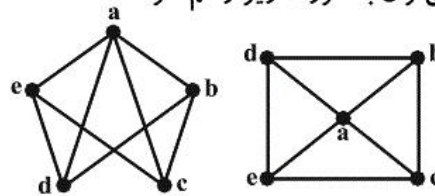
۳

۲

۱

(علی سعیدی زار)

گراف داده شده را می‌توان به صورت زیر رسم کرد.



دوره‌های به طول ۴ به صورت زیر می‌باشند.

$$bcedb - adeca - adbca - abdea - abcea$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲

۱

-۱۵۰

(علی سعیدی زار)

هر دو عدد را به مبنای ۱۰ می‌بریم:

$$(abc)_7 = (baa)_6 \Rightarrow c + 7b + 49a = a + 6a + 36b$$

$$\Rightarrow c = 29b - 42a$$

با توجه به اینکه $1 \leq a \leq 5$ و $0 \leq c \leq 6$ داریم:

$$a = 1 \Rightarrow c = 29b - 42$$

جوابی برای c نداریم.

$$a = 2 \Rightarrow c = 29b - 84 \xrightarrow{b=3} c = 3$$

$$a = 3 \Rightarrow c = 29b - 126$$

جوابی برای c نداریم.با توجه به آن که $1 \leq b \leq 5$ ، به ازای $a = 4, 5$ ، c نمی‌تواند صفر یا مثبت باشد.تنها مقادیر قابل قبول، $a = 2$ و $b = c = 3$ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۵۱

(علی سعیدی زار)

اگر b م.م.د دو عدد a و b را با d نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$4a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\substack{a=a'd \\ b=b'd}} \frac{a'd}{b'd} = \frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{(a',b')=1} \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3d, b = 4d$$

$$\Rightarrow [a^2 + b^2 + ab, 1 \cdot a^2 - b^2] = 185 \cdot$$

$$[9d^2 + 16d^2 + 12d^2, 9 \cdot d^2 - 16d^2] = 185 \cdot$$

$$\Rightarrow [37d^2, 74d^2] = 185 \cdot \Rightarrow 74d^2 = 185 \cdot \Rightarrow d^2 = 25$$

$$\Rightarrow a + b = (a' + b')d = 35$$

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۵۲

(عباس اسری امیرآبادی)

اگر $a \equiv 3 \pmod{3}$ ، در این صورت $a^2 = 3k + 1$ پس $a^2 + 2$ مضرب ۳ می‌شود ومعادله $(a^2 + 2)x \equiv 7 \pmod{3}$ نمی‌تواند جواب داشته باشد، چون ب.م.د عدد ۳ و

$$(a^2 + 2, 3) = 3, 3 \nmid 7$$

 $a^2 + 2$ عدد ۳ می‌شود یعنی:بنابراین باید $a \equiv 3 \pmod{3}$ ، پس داریم:

$$(a^2 + 2)x \equiv 7 \pmod{3} \Rightarrow 2x \equiv 7 \pmod{3} \xrightarrow{(2,3)=1} x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 2$$

$$10 < 3k + 2 < 40 \Rightarrow 8 < 3k < 38 \Rightarrow \frac{8}{3} < k < \frac{38}{3}$$

$$\Rightarrow 3 \leq k \leq 12$$

تعداد: $12 - 3 + 1 = 10$.

(ریاضیات گسسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

(سیدومید ذوالفقاری)

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M(ROR) = M^{(2)}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پس $M(ROR)$ دارای ۱۱ درایه‌ی ۱ بوده و ROR دارای ۱۱ زوج مرتب خواهد بود.
(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۰ تا ۶۲)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(امیرحسین ابومصوب)

بین هر دو شهر، دو حالت وجود دارد. یا جاده‌ای ساخته شده و یا جاده‌ای بین دو شهر وجود ندارد. اگر S ، مجموعه‌ی تمامی حالت‌های ممکن و A_1 و A_2 ، حالت‌هایی باشد که به ترتیب شهرهای A و B ، دارای هیچ جاده‌ای نباشد، آن‌گاه:

$$|S| = 2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$$

$$|A_1| = |A_2| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8 \quad |A_1 \cap A_2| = 2^1 = 2$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|)$$

$$= 64 - (8 + 8 - 2) = 50$$

(ریاضیات گسسته - ترکیبیات: صفحه‌های ۶۴ تا ۶۶)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱

(علی سعیدی زاد)

اگر B_1 و B_2 ، به ترتیب پیشامدهای سفید بودن و سیاه بودن مهره‌ی خارج شده از ظرف اول و A پیشامد هم‌رنگ بودن مهره‌های خارج شده از ظرف اول و دوم باشند، آن‌گاه:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{10} \times \frac{9}{14} = \frac{78}{140}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{6}{14}}{\frac{78}{140}} = \frac{24}{78} = \frac{4}{13}$$

(ریاضیات گسسته - احتمال: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۰)

 ۴

 ۳

 ۲

 ۱