



**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

**و...و**

**کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:**

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)

۱۰۱- اگر  $\log_{\sqrt{1-x}}(2-\log x) + \log_x^2$  باشد، آن‌گاه کدام است؟

-۲۰ (۴)      ۲۰ (۳)      ۵ (۲)      -۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- در دو دنباله‌ی حسابی به صورت  $\begin{cases} 2, 5, 8, \dots \\ 3, 7, 11, \dots \end{cases}$ ، مجموع اعداد مشترک دو دنباله که در بازه‌ی  $(100, 200)$  قرار دارند، کدام است؟

۱۲۰۲ (۴)      ۱۱۹۲ (۳)      ۱۲۰۰ (۲)      ۹۶۸ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  جواب‌های معادله‌ی  $A = (\alpha + \frac{2}{\beta})^2 + (\beta + \frac{2}{\alpha})^2 = 5x + 2 = 0$  باشند، حاصل کدام است؟

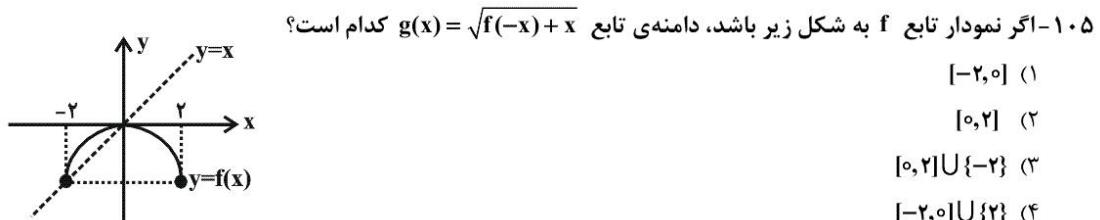
۸۴ (۴)      ۴۰ (۳)      ۳۲ (۲)      ۲۰ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- مجموعه جواب معادله‌ی  $x + \sqrt{x^2 - x\sqrt{12+3}} = \sqrt{3}$  کدام است؟

$[\sqrt{3}, +\infty)$  (۴)       $(-\infty, \sqrt{3}]$  (۳)       $\{\sqrt{3}\}$  (۲)       $R$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

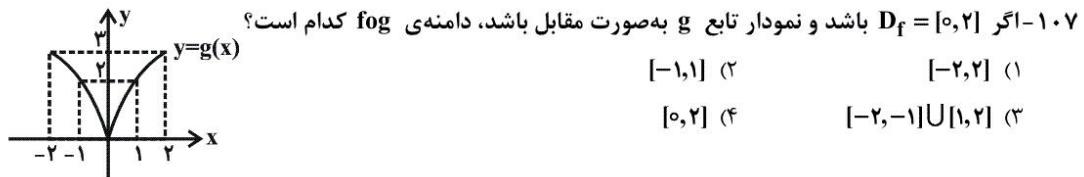


شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر  $g(x) = \sin x$  و  $f(x) = m \cos^{-1} x$  باشند، به ازای کدام مقادیر  $m$ ، تابع  $gof$  زوج است؟ ( $m \neq 0$ )

(۱) اعداد صحیح فرد      (۲) اعداد صحیح زوج      (۳) هیچ مقدار  $m$  (۴)

شما پاسخ نداده اید



شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- حاصل عبارت  $A = \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}$  کدام است؟

$\frac{1}{8}$  (۴)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{6}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- معادله‌ی  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\tan 2x}{1 + \tan^2 2x}$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

۴ (۴)      ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱) صفر (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- حد تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3x^3 + 3}}$  در  $x = -1$  کدام است؟

$\frac{-\sqrt{6}}{3}$  (۳)

$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$  (۲)

$\frac{1-\sqrt{2}}{3}$  (۱)

(۴) وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- اگر  $x$  گویا، آن‌گاه تابع  $g(x) = (x^2 - x)f(x)$  در نقاط  $x = 1$  و  $x = 2$  به ترتیب کدام وضع زیر را دارد؟

(۴) ناپیوسته - پیوسته

(۳) پیوسته - ناپیوسته

(۲) پیوسته - پیوسته

(۱) پیوسته - پیوسته

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- تنها ریشه‌ی معادله  $8x^3 + 2x + m = 0$  در بازه‌ی  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  است. حدود  $m$  کدام است؟

$-2 \leq m < 1$  (۴)

$0 \leq m \leq 1$  (۳)

$-2 \leq m \leq 0$  (۲)

$-2 < m < 0$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر تابع  $y = \frac{x+1}{x^2 + mx + 4}$  فقط دو مجانب داشته باشد،  $m$  کدام یک از مقادیر زیر را نمی‌تواند اختیار کند؟

$-5$  (۴)

$5$  (۳)

$-4$  (۲)

$4$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اگر فاصله‌ی جملات دنباله‌ی  $a_n = \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 2}$  از عدد همگرا بیی خود کمتر از  $0.1$  باشد، کمترین مقدار  $n$  کدام است؟

$29$  (۴)

$28$  (۳)

$27$  (۲)

$26$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- زاویه‌ی بین مماس‌های چپ و راست رسم شده بر منحنی  $f(x)$  در مبدأ مختصات کدام است؟

$90^\circ$  (۴)

$60^\circ$  (۳)

$45^\circ$  (۲)

$30^\circ$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- به ازای کدام مقدار  $a$ ، تابع  $y = e^{ax^2}$  در معادله‌ی دیفرانسیل  $0 = -2axy' + 4y - y''$  صدق می‌کند؟

$-4$  (۴)

$4$  (۳)

$-2$  (۲)

$2$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  مفروض است. در نقطه‌ی تلاقی  $f^{-1}$  و محور  $x$  ها یک خط قائم بر  $f^{-1}$  رسم می‌کنیم، عرض از مبدأ خط قائم کدام است؟

$-\frac{2}{5}$  (۴)

$\frac{5}{4}$  (۳)

$\frac{5}{8}$  (۲)

$\frac{2}{5}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- نقطه‌ی  $M$  روی بیضی  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$  در ناحیه‌ی اول مختصات به سمت نقطه‌ی  $A(3,0)$  در حرکت است. در لحظه‌ای که تصویر نقطه‌ی  $M$  روی محور  $x$  ها به فاصله‌ی  $\frac{3}{2}$  از مبدأ قرار دارد، این فاصله با سرعت  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  افزایش می‌یابد. سرعت افزایش فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  از مبدأ در این لحظه چقدر است؟

$\frac{2}{3}$  (۴)

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$  (۳)

$6$  (۲)

$\frac{4}{3}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- در تابع  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$  نسبت ماکزیمم مطلق تابع به مینیمم مطلق آن کدام است؟

$3$  (۴)

$2$  (۳)

$2\sqrt{2}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- بزرگترین بازه‌ای که در آن تقریباً نمودار تابع  $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$  به سمت بالا است، کدام است؟

$(-1,1)$  (۴)

$(0, +\infty)$  (۳)

$(-2,2)$  (۲)

$R$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۱- نقطه‌ای به طول  $x = \pi$  برای تابع  $f(x) = \cos 5x + 6 \cos 2x$  چگونه نقطه‌ای است؟

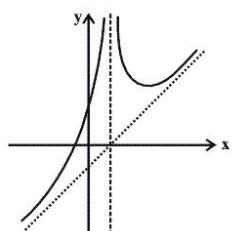
(۴) عادی

(۳) عطف

(۲) می‌نیم نسبی

(۱) ماکزیمم نسبی

شما پاسخ نداده اید



۱۲۲- نمودار تابع  $f(x) = \frac{(x-a)^4}{x^2 + bx + 1}$  به صورت رو به رو است. زوج مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

(۱) (-2, 1)

(۲) (2, 1)

(۳) (2, -1)

(۴) (-2, -1)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- اگر  $f(x) = x \cos x + \int x \sin x dx$  باشد، حاصل  $f(\frac{\pi}{4}) - f(0)$  کدام است؟

(۱) -1/2

(۲) 1/2

(۳) -1

(۴) 1

شما پاسخ نداده اید

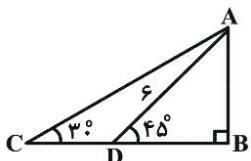
۱۲۴- مساحت ناحیه بالای خط  $y = \frac{5}{x^2 + 1}$  و زیر نمودار  $y = \tan^{-1}(2)$  کدام است؟

(۱)  $\tan^{-1}(2) - 4$

(۲)  $\tan^{-1}(2) - 1$

(۳)  $5\tan^{-1}(2) - 4$

(۴)  $5\tan^{-1}(2) - 2$



شما پاسخ نداده اید

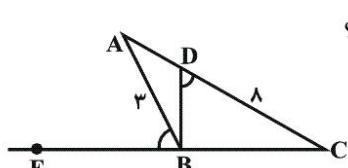
۱۲۵- در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟

(۱)  $6\sqrt{6}$

(۲)  $8\sqrt{6}$

(۳)  $9\sqrt{3}$

(۴)  $12\sqrt{3}$



شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- در شکل مقابل،  $A\hat{B}E = B\hat{D}C$ ، با توجه به اندازه‌های روی شکل، طول AD کدام است؟

(۱) 1

(۲) 2

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $\frac{5}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- مثلثی به اضلاع  $AC = 4$ ،  $AB = 3$  و  $BC = 5$  را حول خطی که از رأس B، موازی ضلع AC رسم شده دوران می‌دهیم، حجم مثلثی که فضایی حاصل کدام است؟

(۱)  $12\pi$

(۲)  $18\pi$

(۳)  $24\pi$

(۴)  $36\pi$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- در مثلث ABC نیمساز داخلی AD، ضلع BC را به نسبت  $\frac{DB}{DC} = \frac{2}{3}$  قطع می‌کند. اگر آنگاه طول نیمساز AD

چه کسری از طول ضلع AC است؟

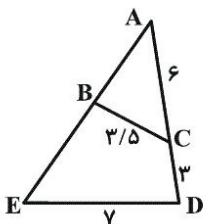
(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴)  $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید



۱۲۹- در شکل مقابل، چهارضلعی BCDE هم محاطی و هم محیطی است. اندازه AB کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$

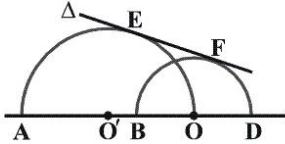
(۲) 4

(۳)  $\frac{4}{5}$

(۴) 5

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در شکل زیر، خط  $\Delta$  در نقاط E و F بر دو نیم دایره مماس است. اگر O و O' مراکز دو نیم دایره و  $AB = BD = 4$  باشد،



شما پاسخ نداده اید

- $\sqrt{6}$  (۲)  
 $2\sqrt{2}$  (۴)

- طول EF کدام است؟  
(۱)  $\sqrt{5}$   
(۲) ۲  
(۳)

۱۳۱- تحت دوران  $180^\circ$  به مرکز (۱,۴)، نقطه‌ی (۲,۳) به نقطه‌ی ( $-m^3, n - 1$ ) تصویر می‌شود. حداقل مقدار ممکن برای  $m - n$  کدام است؟

- ۸ (۴) -۸ (۳) -۴ (۲) ۴ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- در کدام حالت دو خط  $D$  و  $D_1$  در فضا، همواره با هم موازی‌اند؟  
(۱) و  $D_1$  در دو نقطه متمایز بر خط معلوم  $\Delta$  عمود باشند.  
(۲) و  $D_1$  با صفحه‌ی P موازی باشند.  
(۳) خط  $D$  با دو صفحه‌ی معلوم P و  $D_1$  موازی و  $P$  باشند.  
(۴) بر صفحه‌ی معلوم P و  $D_1$  بر خط  $\Delta$  واقع در صفحه P عمود باشند.

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- بردارهای  $b$  و  $c$  به طول‌های ۲ و ۴ که زاویه‌ی بین آنها  $30^\circ$  می‌باشد، دو ضلع یک متوازی الاضلاع هستند و بردار  $a$  به طول ۳، با صفحه‌ی شامل دو بردار  $b$  و  $c$ ، زاویه‌ی  $60^\circ$  می‌سازد. حجم متوازی السطوحی که بیال‌های آن  $a$  و  $b$  و  $c$  باشند، کدام است؟

- ۱۲ (۴)  $12\sqrt{3}$  (۳) ۶ (۲)  $6\sqrt{3}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- دو خط  $L'$ :  $\frac{x+a}{2} = \frac{y-3}{2} = z+b$  و  $L$ :  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{3} = z-1$  کدام متقاطع هستند.  $a+b$  است؟

- ۱۲ (۴) -۶ (۳) ۱۲ (۲) ۶ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- صفحه‌ای که شامل دو خط عمود بر هم  $\frac{x}{a} = \frac{1-y}{2} = -z$  و  $\frac{x-1}{a-2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-3}$  باشد، محور z را در نقطه‌ای به کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

- $\frac{4}{5}$  (۴) -۱ (۳) ۱ (۲)  $-\frac{4}{5}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- قائم بر دایره‌ی  $x^2 + y^2 + ay + b = 0$  در نقطه‌ی A( $\sqrt{3}, 2$ ) واقع بر آن، محور x را در نقطه‌ای به طول  $(-\sqrt{3})$  قطع می‌کند. کدام است؟  $a - b$

- ۵ (۴) ۱ (۳) -۱ (۲) -۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- کانون مقطع مخروطی  $4x^2 + 8 = 4(y-1)^2$  در چه فاصله‌ای از خط هادی  $y = -8(x-1)$  قرار دارد؟

- ۳ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۱ (۱) صفر

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- مساحت مثلثی با رؤوس A(۱,۲) و B(-۳,۱) و مبدأ مختصات کدام است؟

- ۵ (۴) ۷ (۳)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- فرض کنید  $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ . ماتریس BA کدام است؟

- $\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- دستگاهی را به روش حذفی گاووس حل کرده‌ایم. ماتریس افزوده‌ی آن به صورت  $\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 2 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right]$  تبدیل شده است. به ازای

کدام مقدار  $a - b + k$ ، مجموعه‌ی جواب دستگاه مفروض، یک صفحه را مشخص می‌کند؟

۴ (۴)	۲ (۳)	۲ (۲)	۰ (صفر)
-------	-------	-------	---------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۱- اطلاعات به دست آمده از اتومبیل‌های عبوری از یک چهار راه در یک بازه‌ی زمانی معین نشان داده است که ۱۲ اتومبیل با یک سرنشین، ۶ اتومبیل با ۲ سرنشین، ۴ اتومبیل با ۳ سرنشین، ۲ اتومبیل با ۴ سرنشین و یک اتومبیل با ۶ سرنشین از چهار راه عبور کرده‌اند. به طور متوسط هر اتومبیل عبوری، چند سرنشین داشته است؟

۳/۱۲۵ (۴)	۲ (۳)	۱/۸ (۲)	۱/۵ (۱)
-----------	-------	---------	---------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- برای ۵۰ داده،  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1250$  و  $\sum_{i=1}^5 x_i = 200$ . ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۳ (۴)	۲/۲۵ (۳)	۱ (۲)	۰/۷۵ (۱)
-------	----------	-------	----------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- چند عدد شش رقمی با ارقام متمایز ۱ تا ۶ می‌توان نوشت به گونه‌ای که در هر کدام از آن‌ها، ارقام فرد به ترتیب صعودی و ارقام زوج به ترتیب نزولی قرار داشته باشند و در هیچ یک از دو دسته‌ی ارقام فرد یا زوج، ارقام لزوماً کنار یکدیگر نباشند؟

۱۰۰ (۴)	۴۰ (۳)	۲۰ (۲)	۱۰ (۱)
---------	--------	--------	--------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- از مجموعه‌ی اعداد دو رقمی مضرب ۳، حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم در میان اعداد انتخابی، دو عضو با مجموع ۹۶ وجود دارند؟

۱۹ (۴)	۱۷ (۳)	۱۵ (۲)	۱۳ (۱)
--------	--------	--------	--------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- متنم مجموعه‌ی  $A \cup (A' - B')$  نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام است؟

$A' \cap B'$ (۴)	$A \cup B$ (۳)	$B - A$ (۲)	$A - B$ (۱)
------------------	----------------	-------------	-------------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- رابطه‌ی  $\{(x,y) | x, y \in A, \text{and } x^3 - y^2 \in R\}$ ، مجموعه‌ی  $R = \{(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)\}$  را به چند کلاس همارزی افزار می‌کند؟

۴ (۴)	۳ (۳)	۲ (۲)	۱ (۱)
-------	-------	-------	-------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- تعداد روابط تراکندری (تراپایی) روی مجموعه‌ی  $A = \{1, 2\}$  کدام است؟

۱۵ (۴)	۱۴ (۳)	۱۳ (۲)	۱۲ (۱)
--------	--------	--------	--------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- شخص A بین ساعت ۷:۳۰ تا ۹ و شخص B بین ساعت ۸ تا ۹ در شرکت حاضر می‌شوند و هر کدام نیم ساعت در آنجا هستند. با کدام احتمال هم‌یگر را نمی‌بینند؟

$\frac{7}{12}$ (۴)	$\frac{4}{9}$ (۳)	$\frac{5}{12}$ (۲)	$\frac{5}{9}$ (۱)
--------------------	-------------------	--------------------	-------------------

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- در گراف همبند G، مرتبه برابر ۱۱ و اندازه کوچکتر از مرتبه است، در این گراف چند مسیر به طول حداقل ۲ وجود دارد؟

۲۸ (۴)	۴۵ (۳)	۲۵ (۲)	۵۵ (۱)
--------	--------	--------	--------

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- چند عدد طبیعی a وجود دارد که باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۱۵، از مکعب خارج قسمت بزرگتر است؟

۳۴ (۴)	۳۳ (۳)	۱۶ (۲)	۱۷ (۱)
--------	--------	--------	--------

شما پاسخ نداده اید

- ۱۵۱- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد طبیعی باشند بهطوری که  $[a,b] = [6a,6b]$  و حاصل ضرب دو عدد  $a$  و  $b$ ، برابر ۱۱۷۶ باشد،  $(a,b)$  کدام است؟

۱۶) ۴      ۱۴) ۳      ۱۵) ۲      ۱۷) ۱

شما پاسخ نداده اید

- ۱۵۲- باقیماندهی تقسیم عدد  $\overline{272271}$  بر  $13$  کدام نمی تواند باشد؟

۴) ۴      ۵) ۳      ۶) ۲      ۷) ۱

شما پاسخ نداده اید

- ۱۵۳- معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی با شرط  $x_1 \leq 5$  و  $x_2 \leq 9$  دارد؟

۸۵) ۴      ۸۰) ۳      ۷۵) ۲      ۶۰) ۱

شما پاسخ نداده اید

- ۱۵۴- اگر برای دو پیشامد  $A$  و  $B$ ، آنگاه  $P(B|A') = P(A|B) = \frac{1}{4}$ ،  $P(A) = \frac{1}{3}$  کدام است؟

$\frac{1}{3}) ۴$        $\frac{1}{9}) ۳$        $\frac{1}{6}) ۲$        $\frac{2}{9}) ۱$

شما پاسخ نداده اید

- ۱۵۵- تحقیقات نشان می دهد که ۲۰ درصد از قطعات تولید شده توسط یک دستگاه، غیراستاندارد است. اگر مأمورین کنترل در ۱۰ درصد موارد در تشخیص قطعات استاندارد و غیراستاندارد اشتباه داشته باشند، با چه احتمالی، قطعه‌ای که استاندارد تشخیص داده شده است، در واقع غیراستاندارد می باشد؟

$\frac{1}{18}) ۴$        $\frac{1}{36}) ۳$        $\frac{2}{37}) ۲$        $\frac{1}{37}) ۱$

شما پاسخ نداده اید

(همیر علیزاده)

-۱۰۱

$$\log_3(2-\log x) = 4 = \log_2^6 \Rightarrow 6 - 3\log x = 16 \Rightarrow -3\log x = 10.$$

$$\Rightarrow \log x = -\frac{10}{3} \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}} x = 3 \times 2 \log_2^x = 6\left(-\frac{10}{3}\right) = -20.$$

(ریاضی ۲ - توابع نمایی و لگاریتم؛ صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۱۶)

۴✓

۳

۲

۱

(فریدون ساعتی)

-۱۰۲

$$\begin{cases} 2, 5, 8, 11, \dots \Rightarrow d_1 = 3 \\ 3, 7, 11, \dots \Rightarrow d_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{اولین جمله مشترک} \\ d = [d_1, d_2] = [3, 4] = 12 \end{cases} \text{ (d}_1 \cdot d_2 \text{)}.$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی}} a_n = 12n - 1 \quad : \text{دنباله‌ی جملات مشترک}$$

$$100 < 12n - 1 < 200 \Rightarrow \frac{101}{12} < n < \frac{201}{12} \Rightarrow 9 \leq n \leq 16$$

بنابراین مطلوب سوال مجموع جملات نهم تا شانزدهم است. داریم:

$$\begin{cases} 12(9) - 1 = 107 = \text{اولین جمله مشترک} \\ 12(16) - 1 = 191 = \text{آخرین جمله مشترک} \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جملات}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\lambda}{2}(107 + 191) = 4(298) = 1192$$

(حسابان - دنباله‌های حسابی و هندسی؛ صفحه‌های ۲ تا ۶)

۴

۳✓

۲

۱

(مقدمه‌رضا شوکتی بیرق)

$$A = \left(\alpha + \frac{2}{\beta}\right)^2 + \left(\beta + \frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta + 2}{\alpha}\right)^2$$

می‌دانیم  $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$  لذا:

$$A = \left(\frac{2+2}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2+2}{\alpha}\right)^2 = \frac{16}{\beta^2} + \frac{16}{\alpha^2} = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2}$$

$$A = \frac{16(S^2 - 2P)}{P^2} = \frac{16(25 - 4)}{4} = 84 \quad \text{بنابراین: } P = 2, S = \frac{-b}{a} = 5$$

(مسابان - معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

 ۴ ✓ ۳ ۲ ۱

(فریدون ساعتی)

$$x + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{(x - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |x - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - x$$

می‌دانیم اگر  $|u| = -u$  باشد، آنگاه  $0 \leq u$  است. پس:

$$x - \sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt{3}]$$

(مسابان - معادلات و نامعادلات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

 ۴ ۳ ✓ ۲ ۱

(کاظم اجلالی)

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی  $g$  باید نامعادله‌ی  $f(-x) + x \geq 0$  را حل کنیم. نمودارنسبت به محور  $y$  ها متقارن است. بنابراین  $f(-x)$  بر  $f(x)$  منطبق

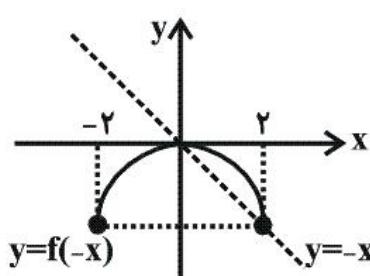
می‌باشد. با توجه به شکل داریم:

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(-x) \geq -x$$

$$\Rightarrow f(-x) + x \geq 0$$

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow f(-x) < -x$$

$$\Rightarrow f(-x) + x < 0$$

پس دامنه‌ی  $g$  بازه‌ی  $[0, 2]$  است.

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۳)

 ۴ ۳ ۲ ✓ ۱

دامنهی  $gof$  بازه‌ی [-۱, ۱] است که متقارن است. ضابطه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = \sin(m \cos^{-1} x)$$

برای این که  $gof$  زوج باشد باید داشته باشیم: پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} gof(-x) &= \sin(m \cos^{-1}(-x)) = \sin(m(\pi - \cos^{-1} x)) \\ &= \sin(m\pi - m \cos^{-1} x) \end{aligned}$$

اگر  $m$  عدد صحیح فرد باشد، داریم:

$$gof(-x) = \sin(m \cos^{-1} x) = gof(x)$$

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۷۹ تا ۹۹)

۴

۳

۲✓

۱

(محمد علیزاده) - ۱۰۷

$$D_{fog} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$\begin{aligned} &= \{x : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq g(x) \leq 2\} = \{x : -2 \leq x \leq 2, -1 \leq x \leq 1\} \\ &= \{x : -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

(مسابان - تابع: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶)

۴

۳

۲✓

۱

(فریدون ساعتی) - ۱۰۸

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{1} = \frac{1 \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{1 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5}}{1 \cos \frac{\pi}{10}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5}}{1 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right)}{1 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{\frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{10} \right)}{1 \cos \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2}$$

(مسابان - مثلثات: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۴

۳✓

۲

۱

(کاظم اجلالی)

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x \quad , \quad \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \cos 2x$$

با توجه به اتحادهای معادله را به شکل زیر می نویسیم:

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \times 2\sin 2x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

 واضح است که جواب‌های  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  جواب‌های  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  را هم شامل می‌شود. دربازه‌ی  $[0, 2\pi]$  جواب‌ها به صورت  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  هستند که هیچ کدام از آنها قابل قبول نیست. زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کنند و در دامنه معادله قرار ندارند.

(مسابان - مثالیات: صفحه‌های ۵ ۷ ۱۸ ۲۳)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

(کاظم اجلالی)

چون تابع در همسایگی چپ  $x = -1$  تعریف نشده است، پس حد آن در  $x = -1$  به معنای حد راست تابع است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{x^3 + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1+x}(1 - \sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{(1-x+x^2)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x+x^2)}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۱ ۷۳ ۸۷)

 ۴ ۳ ۲ ۱ ✓

(ممدرضا شوکتی سرق)

$$g(x) = (x^2 - x)f(x) = \begin{cases} 2(x^2 - x) & , \quad x \text{ گویا} \\ x(x^2 - x) & , \quad x \text{ اصم} \end{cases}$$

داریم:

تابع فوق به ازای ریشه‌های معادله  $x^2 - x = 0$  پیوسته است.  
به عبارت دیگر، تابع فوق در نقاط  $x = 0$ ،  $x = 1$  و  $x = 2$  پیوسته می‌باشد.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۱۰۰)

(کاظم اجلالی)

تابع  $f(x) = mx^3 + 2x + m$  را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(0) = m \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 + m = 2 + m$$

بنابراین داریم:

$$f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow m(m+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq 0$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

(ممدرضا شوکتی سرق)

تابع دارای مجانب افقی  $y = 0$  است. پس غیر از این باید فقط یک مجانب قائم داشته باشد. پس یا باید مخرج ریشه‌ی مضاعف داشته باشد و یا ریشه‌ی صورت ریشه‌ی مخرج نیز باشد.

$$m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m = \pm 4$$

$$x^2 + mx + 4 \Big|_{x=-1} = 0 \Rightarrow (-1)^2 + m(-1) + 4 = 0 \Rightarrow m = 5$$

پس  $m = 5$  نمی‌تواند -5 را اختیار کند.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

ابتدا عدد همگرایی دنباله‌ی مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 2} = 3$$

می‌بایست فاصله‌ی جملات دنباله از عدد همگرایی خود کمتر از  $1/0$  باشد.

بنابراین:

$$|a_n - 3| < 1/0 \Rightarrow \left| \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 2} - 3 \right| = \left| \frac{3n^2 - 2 - 3n^2 - 6}{n^2 + 2} \right|$$

$$= \frac{8}{n^2 + 2} < \frac{1}{100} \Rightarrow 800 < n^2 + 2 \Rightarrow n^2 > 798 \Rightarrow n \geq 29$$

(دیفرانسیل - دنباله؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱

مشتق چپ و راست تابع در  $x = 0$  را محاسبه می‌کنیم:

$$m_1 = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{-1}{e^{-x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{e^x}} = 1$$

$$m_2 = f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{e^x} - \frac{-1}{e^{-x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{e^{-x}}{\frac{1}{e^{-x}}} = -1$$

چون  $m_1 m_2 = -1$  پس مماس‌های چپ و راست در این نقطه بر هم عمودند.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۳۳ و ۱۳۴)

۴✓

۳

۲

۱

(صیب شفیعی)

$$y' = 2axe^{ax^2} \Rightarrow y'' = 2ae^{ax^2} + 4a^2x^2e^{ax^2}$$

$$\Rightarrow y'' - 2axy' + 4y = 2ae^{ax^2} + 4a^2x^2e^{ax^2} - 4a^2x^2e^{ax^2} + 4e^{ax^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2a + 4)e^{ax^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{ax^2} \neq 0 \\ 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۰ و ۱۶۱)

۴

۳

۲✓

۱

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow (f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

شیب خط مماس بر  $f^{-1}$  برابر  $\frac{-4}{5}$  است. پس شیب خط قائم بر  $f^{-1}$  برابر  $\frac{5}{4}$

می باشد. حال معادلهی خط قائم را می نویسیم:

$$y - 0 = \frac{5}{4}(x + \frac{1}{2}) \xrightarrow{x=0} y = \frac{5}{8}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه های ۱۵۷ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

(فریدون ساعتی)

-۱۱۸

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y' = 1 - \frac{x^2}{9}$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 1 - \frac{x^2}{9}} = \sqrt{\frac{8x^2}{9} + 1}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow[\text{زمان مشتق میگیریم}]{{\text{از طرفین نسبت به}}} d_t' &= \frac{\frac{8}{9}(2x_t' x)}{\sqrt{\frac{8x^2}{9} + 1}} \Rightarrow d_t' = \frac{\frac{8}{9}(\frac{3}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{\frac{8(\frac{3}{2})^2}{9} + 1}} \\ &= \frac{24\sqrt{3}}{36} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه های ۱۹۲ تا ۱۹۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

## (کاظم اجلالی)

دامنهٔ تابع برابر  $[0, \lambda]$  است. مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم تا نقاط بحرانی را بیابیم.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda-x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{\lambda-x} \Rightarrow x = \lambda - x$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$$

مقادیر  $(0)$  و  $f(\frac{\lambda}{2})$  و  $f(\lambda)$  را مقایسه می‌کنیم:

$$f(0) = f(\lambda) = \sqrt{\lambda} \quad \text{و} \quad f(\frac{\lambda}{2}) = \frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

پس داریم:

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۶۷)

۴

۳

۲

۱✓

## (کاظم اجلالی)

-۱۲۰

مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \left(1 + \frac{2}{x^2 + 1}\right) = \frac{2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2}$$

بنابراین در بازهٔ  $(0, +\infty)$  تقر نمودار تابع به سمت بالاست.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۰ تا ۱۸۲)

۴

۳✓

۲

۱

مشتق اول تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = -5\sin 5x - 12\sin 2x \Rightarrow f'(\pi) = 0$$

مشتق دوم را در  $x = \pi$  محاسبه می‌کنیم:

$$f''(x) = -25\cos 5x - 24\cos 2x \Rightarrow f''(\pi) = 25 - 24 = 1 > 0$$

بنابراین طبق آزمون مشتق دوم، تابع  $f$  در  $x = \pi$  دارای مینیمم نسبی است.

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۸۸)

۴

۳

۲

۱

$$\frac{(x-1)^3 + 4}{(x-1)^2} = x-1 + \frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y = x-1$$

$$\Rightarrow (a,b) = (1,-2)$$

(دیفرانسیل - مشتق و کاربرد آن: صفحه‌های ۱۹۷ تا ۲۰۰)

۴

۳

۲

۱

(محمد رضا شوکتی بیرق)

-۱۲۳-

$$f(x) = x \cos x + \int x \sin x dx$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \cos x - x \sin x + x \sin x = \cos x$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} f(x) = \sin x + c \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = (1+c) - (0+c) = 1$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌های ۲۴۳ تا ۲۴۶)

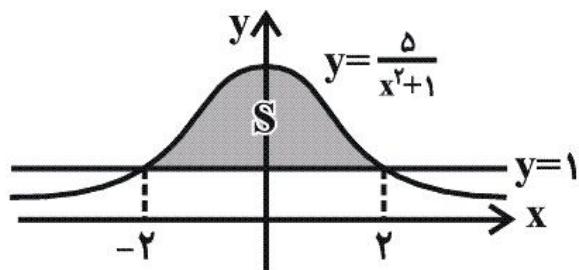
۴

۳

۲

۱

(تابع مساحت)



ابتدا محل برخورد دو تابع را پیدا می کنیم:

$$\frac{5}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$S = \int_{-2}^2 \left( \frac{5}{x^2 + 1} - 1 \right) dx = 2 \int_0^2 \left( \frac{5}{x^2 + 1} - 1 \right) dx$$

$$= (1 \cdot \tan^{-1} x - 2x) \Big|_0^2 = 1 \cdot \tan^{-1}(2) - 4$$

(دیفرانسیل - انتگرال: صفحه‌ی ۳۴۵)

۴✓

۳

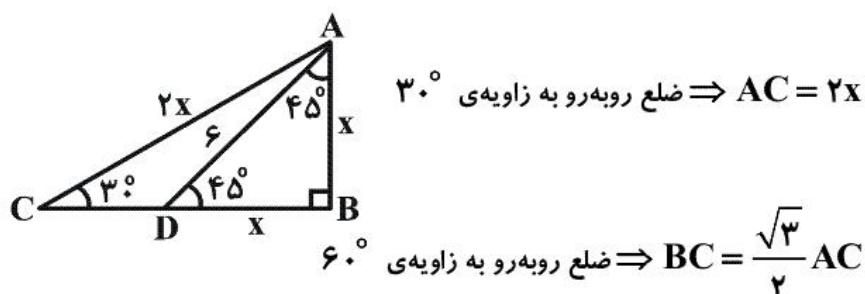
۲

۱

(محمد طاهر شاععی)

-۱۲۵-

$$x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$



$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}x \Rightarrow BC = \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} (3\sqrt{2}) \times 3\sqrt{6} = \frac{9}{2}\sqrt{12} = 9\sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس: صفحه‌های ۵۷، ۵۸ و ۶۵)

۴✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

$$\widehat{ABE} = \widehat{BDC} \xrightarrow{\text{قضیه زوایای مکمل}} \widehat{ABC} = \widehat{ADB}$$

$$\Delta ABC, \Delta ABD : \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A} \\ \widehat{ABC} = \widehat{ADB} \end{cases} \xrightarrow{\text{(ز)z}} \Delta ABC \sim \Delta ABD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x+4}{3} \Rightarrow x^2 + 4x - 9 = 0$$

$$(x+9)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 1 \end{cases}$$

غیرقابل قبول

(هندسه ۱ - تشابه: صفحه‌های ۱۳۵ تا ۹۲)

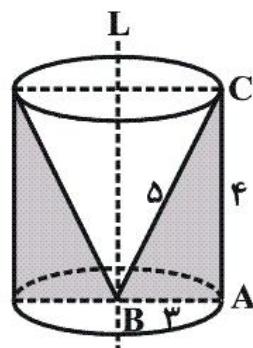
۴

۳

۲

۱✓

(محمد طاهر شاعر)

با توجه به این که  $\Delta ABC$ ، مثلث با  $5^2 + 4^2 = 3^2$ ، قائم الزاویه استقائم الزاویه است ( $\widehat{A} = 90^\circ$ )، پس شکل فضاییحاصل از دوران مثلث  $ABC$  حول خط  $L$ ، یک

استوانه است که یک مخروط مطابق شکل از آن

برداشته شده است، لذا حجم آن برابر است با:

$$V = \pi \times 3^2 \times 4 - \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi - 12\pi = 24\pi$$

(هندسه ۱ - شکل‌های فضایی: صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۵)

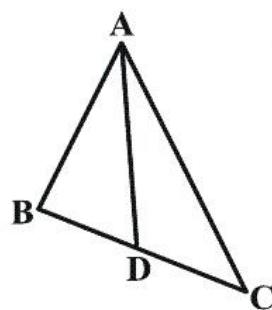
۴

۳

۲✓

۱

(محمد ابراهیم کیتی زاده)



در هر مثلث، نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر قطع می‌کند، پس داریم:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

با توجه به فرض سؤال می‌توان نوشت:

$$DC = \frac{1}{2}AC, DB = \frac{2}{3}DC = \frac{1}{3}AC$$

از طرفی مجذور طول نیمساز (AD) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$AD^2 = \left(\frac{2}{3}AC\right) \cdot AC - \left(\frac{1}{3}AC\right) \cdot \frac{1}{2}AC$$

$$AD^2 = \frac{2}{3}AC^2 - \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{2}AC^2 \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$$

(هنرسه ۲ - استدلال: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴، دایره: صفحه‌ی ۷۸)

۴

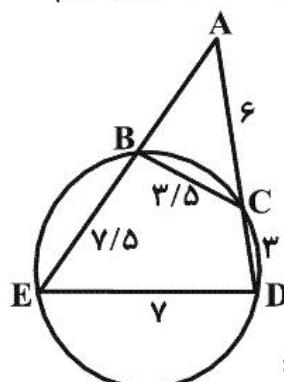
۳

۲✓

۱

(محمد قدران)

چهارضلعی BCDE محیطی است. طبق تمرین ۶ صفحه‌ی ۵۶ کتاب درسی داریم:



$$BC + DE = CD + BE \Rightarrow BE = 7/5$$

چهارضلعی BCDE هم چنین محاطی نیز است. پس دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & AB \times AE = AC \times AD \\ & \Rightarrow AB(AB + 7/5) = 6 \times 9 \Rightarrow AB = 4/5 \end{aligned}$$

(هنرسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۵۶، ۵۸ و ۷۶)

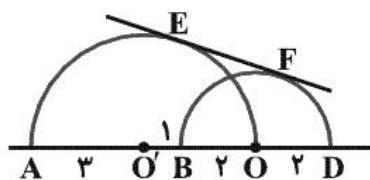
۴

۳✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

مطابق شکل ۲ و داریم:  $BO = OD = 2$ 

$$AO = 4 + 2 = 6 \Rightarrow 2R' = 6 \Rightarrow R' = 3$$

$$BD = 4 \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$d = OO' = 1 + 2 = 3$$

طول پاره خط  $EF$ ، برابر طول مماس مشترک خارجی دو دایره است:

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

(هنرسه ۲ - دایره: صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۳۱-

دوران  $180^\circ$  به مرکز  $O = (\alpha, \beta)$ ، بازتاب مرکزی نسبت به  $O$  نیز می‌باشد  
که ضابطه آن به صورت  $T(x, y) = (2\alpha - x, 2\beta - y)$  است.

$$(-m^2, n - 1) = (2 \times (-1) - 2, 2 \times (4) - 3)$$

$$\Rightarrow (-m^2, n - 1) = (-4, 5) \Rightarrow m = \pm 2, n = 6$$

$$m = 2, n = 6 \Rightarrow m - n = -4$$

$$m = -2, n = 6 \Rightarrow m - n = -8$$

بنابراین حداقل مقدار ممکن برای  $(m - n)$ ، برابر  $(-4)$  است.

(هنرسه ۲ - تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۹۷ تا ۱۱۱)

۴

۳

۲✓

۱

(محمد ابراهیم کیش زاده)

-۱۳۲-

گزینه‌ی «۱»: دو خط که در دو نقطه‌ی متمایز بر یک خط در فضای عمود هستند، می‌توانند موازی یا متقاطع باشند.

گزینه‌ی «۲»: دو خط  $D$  و  $D_1$  که با صفحه‌ی  $P$  موازی هستند، می‌توانند موازی، متقاطع یا متقاطع باشند.

گزینه‌ی «۳»: اگر خط  $D$  با دو صفحه‌ی  $P$  و  $P_1$  موازی باشد، با فصل مشترک این دو صفحه موازی است.

گزینه‌ی «۴»: خط  $D_1$  که فقط بر یک خط از صفحه‌ی  $P$  عمود باشد، لزوماً بر صفحه‌ی  $P$  عمود نیست. پس امکان دارد که  $D_1$  با  $D$  موازی نباشد.

(هنرسه ۲ - هندسه فضایی: صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۵۱)

۴

۳✓

۲

۱

(سید عادل رضا مرتفعی)

بردار  $\mathbf{a}$  با صفحه‌ی شامل دو بردار  $\mathbf{b}$  و  $\mathbf{c}$ ، زاویه‌ی  $60^\circ$  می‌سازد. از طرفی  
بردار  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  بر صفحه‌ی شامل این دو بردار عمود است، پس با بردار  $\mathbf{a}$ ، زاویه‌ی

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| \sin 30^\circ = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4 \quad \text{داریم: } 30^\circ \text{ خواهد ساخت.}$$

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \cos 30^\circ = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

(هنرسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سید عادل رضا مرتفعی)

چون این دو خط در صفحه‌ی  $xy$  متقاطع هستند، پس در نقطه‌ی تقاطع آن‌ها  
 $Z = 0$  است.

$$Z = 0 \xrightarrow{L} \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 2}{3} = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -5, 0)$$

$$A \xrightarrow{L'} \frac{a}{2} = \frac{-5 - 3}{2} = b \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -4 \end{cases}$$

بنابراین  $a + b = -12$  است.

(هنرسه تحلیلی - فقط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

با فرض  $A = (0, 1, 0)$  در این صفحه است، پس داریم:  
 $\mathbf{u}_1 = (1, -2, -1)$  و  $\mathbf{u}_2 = (-1, -3, 5)$   
 $\mathbf{n} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (13, 4, 5)$

از طرفی نقطه‌ی  $A = (0, 1, 0)$  در این صفحه است، پس داریم:  
 $13(x - 0) + 4(y - 1) + 5(z - 0) = 0 \Rightarrow 13x + 4y + 5z - 4 = 0$

$$\xrightarrow{x=y=0} z = \frac{4}{5}$$

(هنرسه تحلیلی - فقط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴ ✓

۳

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

قائم بر دایره از نقاط  $A(\sqrt{3}, 2)$ ، مرکز دایره و  $B(-\sqrt{3}, 0)$  می‌گذرد. با توجهبه آن که مرکز دایره، نقطه‌ی  $O(0, -\frac{a}{2})$  است، داریم:

$$m_{OA} = m_{AB} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2} - 0}{\sqrt{3} - 0} = \frac{2 - 0}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \Rightarrow a = -2$$

از طرفی نقطه‌ی  $A(\sqrt{3}, 2)$ ، متعلق به دایره است، پس:

$$(\sqrt{3})^2 + 2^2 + (-2)(2) + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$a - b = -2 - (-3) = 1$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷)

۴

۳✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

$$(y-1)^2 + 8 = 4x \Rightarrow (y-1)^2 = 4(x-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$F = (\alpha + a, \beta) = (3, 1)$$

سه‌می افقی است، پس داریم:

$$(x-1)^2 = -8y \Rightarrow \begin{cases} a' = -2 \\ \alpha' = 1 \\ \beta' = 0 \end{cases}$$

سه‌می قائم است، پس داریم:

فاصله‌ی نقطه‌ی  $F(3, 1)$  از خط  $y = 2$  برابر قدر مطلق تفاضل عرض‌ها یعنی برابر یک است.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مفروطی؛ صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

۴

۳

۲✓

۱

(سروش موئینی)

اگر  $(c_1, c_2)$ ،  $(b_1, b_2)$ ،  $(a_1, a_2)$  رئوس یک مثلث در صفحه‌ی  $R^2$  باشند،

$$\text{آن‌گاه مساحت مثلث برابر است با قدر مطلق مقدار} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ پس داریم:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{بسط نسبت به سوتون سوم}}{=} \frac{(1 \times 1 - 2 \times (-3))}{(1 \times 1 - 2 \times (-3))} = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

(هندسه تحلیلی - ماتریس و دترمینان؛ تمرین ۱۰، صفحه‌ی ۱۲۹)

۴

۳

۲

۱✓

(آنکه نوید)

از آنجا که دترمینان ماتریس‌های  $A^2$  و  $B^2$ ، مخالف صفر هستند، پس دو ماتریس  $A$  و  $B$ ، وارون‌پذیرند و داریم:

$$BA = \underbrace{(B^2 B^{-1})}_{B} (\underbrace{A^{-1} A^2}_{A}) = B^2 (B^{-1} A^{-1}) A^2 = B^2 (AB)^{-1} A^2$$

$$|AB| = -1 \Rightarrow (AB)^{-1} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = B^2 (AB)^{-1} A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(هنرسه تهیلی - (ستگاه معادلات فقط: صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۸))

۴

۳✓

۲

۱

(رضا عباس‌اصل)

اگر  $0 \neq k$  باشد، معادله‌ی سوم برقرار نیست و دستگاه جواب ندارد بنابراین

$$k = 0, \text{ در این صورت دستگاه دو معادله، سه مجهول} \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ ax + 2y + bz = 4 \end{cases}$$

خواهیم داشت که معادلات دو صفحه را مشخص می‌کنند، تنها در صورتی که دو صفحه بر هم منطبق باشند مجموعه جواب دستگاه یک صفحه را مشخص می‌کند، داریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{b} = \frac{2}{4} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

و در نتیجه:

$$a - b + k = 2 - (-2) + 0 = 4$$

(هنرسه تهیلی - (ستگاه معادلات فقط: صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۴۱))

۴✓

۳

۲

۱

(امیرحسین ابوالمحبوب)

میانگین تعداد سرنشین‌های هر اتومبیل عبوری برابر است با:

$$x = \frac{12 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 6}{12 + 6 + 4 + 2 + 1} = \frac{50}{25} = 2$$

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های مرکزی: تمرین ۱۲، صفحه‌ی ۱۳۹)

۴

۳✓

۲

۱

(امیرحسین ابوهمبوب)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{200}{50} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{1250}{50} - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow \sigma = \sqrt{9} = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

(آمار و مدل‌سازی - شاخص‌های پراکندگی؛ صفحه‌های ۱۵۷ تا ۱۵۹)

۴

۳

۲

۱✓

(امیرحسین ابوهمبوب)

کافی است ابتدا از میان ۶ مکان (رقم)، ۳ مکان را انتخاب کنیم و مثلاً ارقام فرد را در آن‌ها قرار دهیم. با توجه به این که سه رقم ۱، ۳ و ۵ باید به‌طور صعودی باشند، پس برای هر سه مکان انتخابی، فقط یک حالت برای چیدن ارقام در این مکان‌ها

وجود دارد. به‌طور کلی این کار به  $\binom{6}{3} = 20$  طریق امکان‌پذیر است. واضح

است که بعد از قرار دادن سه رقم فرد، سه رقم زوج را در ۳ مکان باقیمانده به‌طور منحصر به فرد می‌توان به‌صورت نزولی قرار داد.

(ریاضی ۲ - ترکیبات؛ صفحه‌های ۱۸۶ تا ۱۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

(سروش موئینی)

اعداد دو رقمی مضرب ۳ عبارتند از: ۱۲، ۱۵، ۱۸، ...، ۹۶ و ۹۹، که در مجموع ۳۰ عدد هستند.

حالات‌ای که مجموع دو عدد از میان این اعداد برابر ۹۶ است، عبارتند از: (۱۲, ۸۴)، (۱۵, ۸۱)، ... و (۴۵, ۵۱) که شامل ۱۲ گروه است. همچنین اعداد ۴۸، ۸۷، ۹۰، ۹۳، ۹۶ و ۹۹ در هیچ گروهی نیستند.

در بدترین حالت از هر گروه یک عضو و تمام اعداد بدون گروه را برابر می‌داریم (روی هم  $12 + 6 = 18$  عضو) و در انتخاب نوزدهم مطمئن هستیم که قطعاً دو عدد با مجموع ۹۶ وجود دارد.

(جبر و احتمال - استدلال ریاضی؛ صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۴✓

۳

۲

۱

(سروش موئینی)

$$\begin{aligned} A \cup (A' - B)' &= A \cup (A' \cap B)' = A \cup (A \cup B') \\ &= (A \cup A) \cup B' = A \cup B' \end{aligned}$$

تمم این مجموعه نسبت به مجموعه‌ی جهانی برابر است با:

$$(A \cup B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دلارتی و رابطه: صفحه‌های ۴۶ تا ۵۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیرحسین ابوهموب)

رابطه‌ی  $R$  به وضوح همارزی است، چون هر سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تراکذیری (ترایایی) را دارا می‌باشد. می‌دانیم هر دو عدد فرد  $x$  و  $y$ ، در رابطه‌ی  $x^2 - y^2 | 8$  صدق می‌کنند، پس  $\{1, 1, 3\} - \{3, 1, 1\}$  یکی از مجموعه‌های افزار (یک کلاس همارزی) می‌باشد. در بین اعداد باقیمانده،  $\{2, 2, -2\} - \{2, -2, 2\}$ ، ولی صفر با هیچ کدام از اعداد دیگر در رابطه نیست، پس  $\{5, 2, -2\}$  و  $\{2, 2, 5\}$ ، دو کلاس همارزی دیگر را تشکیل می‌دهند.

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دلارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۱ تا ۷۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

(محمد خدابن)

تعداد کل روابط روی مجموعه‌ی دو عضوی  $A = \{1, 2\}$ ، برابر

$$2^2 = 4$$

از بین این ۱۶ رابطه، ۳ رابطه وجود دارند که تراکذیری نیستند.

$$A_1 = \{(1, 2), (2, 1)\} \text{ و } A_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

بنابراین ۱۳ رابطه‌ی تراکذیری روی مجموعه‌ی دو عضوی  $A$  داریم.

(بیر و احتمال - مجموعه، ضرب دلارتی و رابطه: صفحه‌های ۶۱ تا ۷۰)

۴

۳

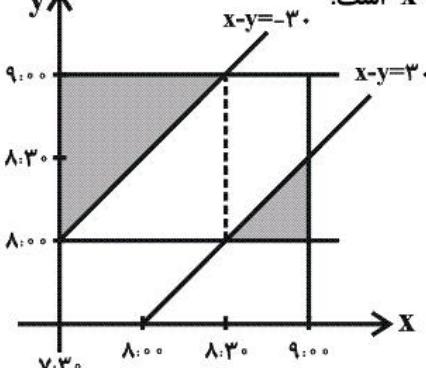
۲ ✓

۱

(سروش موئینی)

برای اینکه یک دیگر را نیتند باید اختلاف زمان رسیدن یعنی  $|x - y|$  از ۳۰دقیقه بیشتر باشد. یعنی  $|x - y| > 30$  را می‌خواهیم که بالای خط

$$y = x - 30 \text{ و پایین خط } y = x + 30 \text{ است.}$$



$$a(S) = 60 \times 60 = 3600$$

$$a(A) = \frac{60 \times 60}{2} + \frac{30 \times 30}{2}$$

$$= \frac{4500}{2} = 2250$$

$$P(A) = \frac{2250}{3600} = \frac{5}{12}$$

(بیر و احتمال - احتمال: صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۱۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سید عادل رضا مرتفعی)

$$p = 11 \text{ است و چون } q \geq 10 \Leftrightarrow q \geq p - 1$$

از طرفی با توجه به سؤال اندازه از مرتبه کوچکتر است بنابراین  $q = 10$  است. چونرابطه  $p = q + 1$  برقرار است. لذا این گراف، یک درخت از مرتبه ۱۱ است.

تعداد کل مسیرها بین رئوس متمایز در یک درخت از مرتبه ۱۱، برابر

$$\binom{11}{2} = 55 \text{ است.}$$

تعداد مسیرهای به طول یک در هر گراف، برابر تعداد یالهای آن و بنابراین در

درخت مرتبه ۱۱، برابر  $10 = q$  است.بنابراین تعداد مسیرهای به طول حداقل ۲، برابر  $45 = 10 - 55$  است.

(ریاضیات کسرسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴

۳✓

۲

۱

(سید عادل رضا مرتفعی)

طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$a = 15q + r ; \quad 0 \leq r < 15$$

 $r > q^3$  : از طرفی

داریم:

$$q = 0 \rightarrow r = 1, 2, 3, \dots, 14 \Rightarrow a = 1, 2, \dots, 14 \Rightarrow 14 \text{ حالت}$$

$$q = 1 \rightarrow r = 2, 3, \dots, 14 \Rightarrow a = 17, 18, \dots, 29 \Rightarrow 13 \text{ حالت}$$

$$q = 2 \rightarrow r = 9, 10, \dots, 14 \Rightarrow a = 39, 40, \dots, 44 \Rightarrow 6 \text{ حالت}$$

مقداری برای  $r$  وجود ندارد.  $\Rightarrow q = 3$ 

(ریاضیات کسرسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(عباس اسدی امیر آبادی)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد را  $d$  در نظر می‌گیریم یعنی  $(a, b) = d$ 

در این صورت داریم:

$$(\varepsilon a, \varepsilon b) = [a, b] \Rightarrow \varepsilon(a, b) = \frac{a \cdot b}{(a, b)} \Rightarrow \varepsilon d = \frac{a \cdot b}{d}$$

$$\Rightarrow \varepsilon d^2 = a \cdot b \Rightarrow \varepsilon d^2 = 1176 \Rightarrow d^2 = 196 \Rightarrow d = 14$$

(ریاضیات کسرسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(سید امیر ستوه)

$$27a271 = 27 \cdot 27 + 1 \dots a + 1$$

$$= 1 \dots 1 \times 27 + 1 \dots 1 a - a + 1 \equiv -a + 1$$

از آن جا که  $0 \leq a \leq 9$ ، پس  $-8 \leq -a + 1 \leq 1$ 

بنابراین باقی‌مانده یا برابر صفر یا یک است، یا در صورتی که  $-8 \leq -a + 1 \leq -1$ ، با افزودن ۱۳ واحد به طرفین نامساوی، باقی‌مانده به صورت  $5 \leq r \leq 12$  خواهد بود. در هر صورت  $r = 4$  غیرقابل قبول است.

(ریاضیات گسته - نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴۸ تا ۱۵۱)

۴✓

۳

۲

۱

(سروش موئینی)

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر است با:

(جواب‌هایی که  $x_1 \geq 6$  یا  $x_2 \geq 10$  - کل جواب‌ها)

$$= \binom{14+3-1}{3-1} - \left[ \binom{8+3-1}{3-1} + \binom{4+3-1}{3-1} - 0 \right]$$

مشترک جواب‌هایی که کل جواب‌های

$$\begin{array}{ll} \text{معادله} & x_1 \geq 6 \quad x_2 \geq 10 \\ = \binom{16}{2} - \binom{10}{2} - \binom{6}{2} & = 120 - 45 - 15 = 60 \end{array}$$

(ریاضیات گسته - ترکیبات: صفحه‌های ۶۶ و ۶۷)

۴

۳

۲

۱✓

(امیرحسین ابوالمحبوب)

$$P(A | B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = 4P(A \cap B)$$

$$P(B | A') = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3P(A \cap B)}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{18}$$

$$P(B) = 4 \times \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

بنابراین داریم:

(ریاضیات گسته - احتمال: صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱✓

(امیرحسین ابومسیوب)

اگر پیشامد استاندارد تشخیص داده شدن را با  $A$  و پیشامدهای واقعاً استاندارد بودن و واقعاً استاندارد نبودن را به ترتیب با  $B_1$  و  $B_2$  نشان دهیم، آن‌گاه داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{74}$$

$$P(B_2 | A) = \frac{P(B_2)P(A | B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{1}}{\frac{1}{74}} = \frac{1}{37}$$

(ریاضیات کسری - احتمال: صفحه‌های ۱۵ تا ۹۰)

 ۱ ۲ ۳ ۴ ✓

[www.kanoon.ir](http://www.kanoon.ir)