



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)



ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه ، مفاهیم پایه - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۸۱- اگر از $a < b$ بتوان $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ را نتیجه گرفت، کدام گزینه همواره درست است؟

$$a^2 > b^2 \quad (2)$$

$$a^2 < b^2 \quad (1)$$

$$a^5 + a^3 + a < \sqrt[3]{b} + 2 \quad (4)$$

$$a^5 > b^2 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر $\frac{7}{45} = \frac{a}{b}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

$$6 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$7 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یک دنباله مهم ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۸۷- اگر دنباله‌ی $\left\{ \left(\frac{2n+1}{2n-5} \right)^{2n-1} \right\}$ به e^k همگرا باشد، k کدام است؟

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$9 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، انواع دنباله ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۸۵- دنباله‌ی $\left\{ \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} \right\}$ کدام وضع زیر را دارد؟

(۲) نزولی و کران‌دار

(۱) صعودی و کران‌دار

(۴) غیریکنوا و بی‌کران

(۳) غیریکنوا و کران‌دار

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، همگرایی و اگرایی دنباله ها ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۸۶- دنباله‌ی $\{x_n\}$ به صورت $x_{n+1} = (4 + x_n)(9 + x_n)$ تعریف شده است. به ازای کدام مقدار x_1 ، این دنباله

همگراست؟

(۲) -۵

(۱) ۶

(۴) -۷

(۳) -۸

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر $a_1 = 1$ ، در دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+1} = a_n + \frac{n^2}{3}$ جمله‌ی دهم کدام است؟

$$\frac{(45)^2}{3} \quad (2)$$

$$1 + \frac{(45)^2}{3} \quad (1)$$

$$\left(\frac{45}{3}\right)^2 \quad (4)$$

$$1 + \left(\frac{45}{3}\right)^2 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- چند جمله از دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{3^n + 3^{n+1}}$ در خارج از همسایگی به مرکز صفر و شعاع 0.002 قرار دارند؟

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، حد ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۸۸- اگر داشته باشیم $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$ و $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}$ ، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟

$$2 \text{ همگرا به } 2 \quad (2)$$

$$1 \text{ همگرا به } 1 \quad (1)$$

$$4 \text{ واگراست} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \text{ همگرا به } \frac{1}{2} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ داشته باشیم: $|f(x) - 3| \leq 3(4 - x)^2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+1) + 2}{2 - f(x+1)}$ کدام

است؟

(۲) -۵

(۱) ۱

(۴) نامشخص

(۳) -۳

شما پاسخ نداده اید

۹۰- اگر داشته باشیم $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ و $g(x) = a[x] - x$ ، آنگاه مقدار a کدام باشد تا تابع $f + g$ در

$x = 1$ ، حد داشته باشد؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

(۲) -۲

(۱) -۴

(۴) صفر

(۳) -۱

شما پاسخ نداده اید

۹۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3 - \sqrt{9 - x^2}}$ کدام است؟

(۲) ۲۴

(۱) $\frac{3}{8}$

(۴) -۲۴

(۳) $\frac{8}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت نقطه میانی بازه ی (a,b) کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۳- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - \frac{x^2+x+1}{x-1} \right)$ کدام است؟

-۱ (۲)

۱ (۱)

-۳ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر $f(x) = \frac{x^3-x^2}{\sqrt[3]{2-x}-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x + \sqrt{x^2-2x})$ کدام است؟

-۲ (۲)

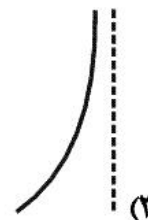
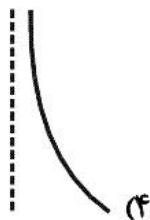
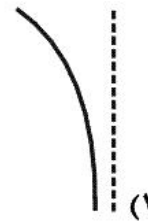
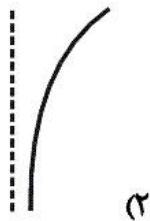
-۱ (۱)

-۴ (۴)

-۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۹۸- نمودار تابع $y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-[x]}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)



شما پاسخ نداده اید

۹۹- کدام خط زیر مجانب مایل $f(x) = x\sqrt{1-\sin\frac{1}{x}}$ است؟

(۲) $y = x + 1$

(۱) $y = x$

(۴) $y = x - \frac{1}{2}$

(۳) $y = x + \frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- تابع $y = \sin^{-1}\left(\frac{x|x-1|}{x^2-5x+6}\right)$ چند خط مجانب دارد؟

(۲) ۴

(۱) ۱

(۴) ۳

(۳) ۲

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، پیوستگی ، حد و پیوستگی - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۹۵- تابع $f(x) = ax - [ax]$ در بازه $(0, a)$ دارای ۸ نقطه‌ی ناپیوستگی است. حدود a کدام است؟ $([])$ ،

علامت جزء صحیح است.)

$$2 < a \leq 3 \quad (2)$$

$$2 < a < 3 \quad (1)$$

$$\sqrt{8} \leq a < 3 \quad (4)$$

$$\sqrt{8} < a \leq 3 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- به ازای چه حدودی از m ، تابع $f(x) = x^2 + m$ نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم را در بازه $(0, 2)$ یکبار قطع

می‌کند؟

$$-10 < m < 10 \quad (2)$$

$$-10 < m < 0 \quad (1)$$

$$-8 < m < 0 \quad (4)$$

$$0 < m < 10 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- اگر وارون تابع $f(x) = \sqrt{4-x} - 2\sqrt{x-1}$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام

است؟

$$3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

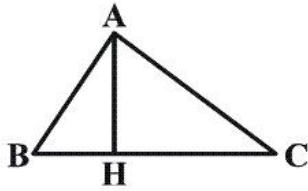
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، بردار - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۰۱- در شکل زیر $BH = 4$ ، $CH = 6$ و $AH \perp BC$ می‌باشند. حاصل $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ کدام است؟



(۱) ۱۰۰

(۲) ۷۶

(۳) ۵۲

(۴) اطلاعات کافی نیست.

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر اندازه‌های مجموع و تفاضل دو بردار a و b ، به ترتیب ۴ و $2\sqrt{3}$ و مساحت مثلث تولید شده توسط این دو

بردار $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، خط و صفحه - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۰۳- در مثلثی با رئوس $A(1,2,3)$ ، $B(3,1,2)$ ، $C(2,1,5)$ ، نیمساز داخلی زاویه‌ی A ، صفحه‌ی xz را در چه

ارتفاعی قطع می‌کند؟

(۱) ۴

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- معادله‌ی صفحه‌ای که شامل فصل مشترک دو صفحه‌ی $P_1: x+y=1$ و $P_2: 2x-y+z=0$ بوده و

بر صفحه‌ی $3x+y-z=2$ عمود باشد، کدام است؟

$$-x+2y-z=1 \quad (2)$$

$$-x+2y+z=0 \quad (1)$$

$$-x+2y-z=0 \quad (4)$$

$$-x+2y+z=1 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، مقاطع مخروطی ، مقاطع مخروطی - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۰۵- معادله‌ی دایره‌ای که عرض مرکز آن، ۳ برابر طول مرکز آن بوده و خط $2y-x=5$ قطری از آن و خط

$4x-3y=5$ مماس بر آن باشد، کدام است؟

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0 \quad (2)$$

$$x^2+y^2+2x+6y-6=0 \quad (1)$$

$$x^2+y^2+2x+6y+6=0 \quad (4)$$

$$x^2+y^2-2x-6y-6=0 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- معادله‌ی دایره‌ی محاطی مربعی که نقاط $A(3,1)$ و $B(1,3)$ دو سر یک قطر آن باشد، کدام است؟

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4 \quad (2)$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=4 \quad (1)$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1 \quad (4)$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=1 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- دو بیضی به معادله‌های $x^2 + 2y^2 - 8 = 0$ و $4x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$ ، چند نقطه‌ی مشترک دارند؟

۲ (۲)

۴ (۱)

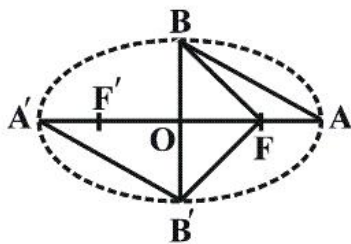
۱ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- در بیضی شکل زیر، مساحت مثلث $A'B'F$ ، ۵ برابر مساحت مثلث BFA می‌باشد. خروج از مرکز بیضی

کدام است؟



$\frac{1}{3}$ (۱)

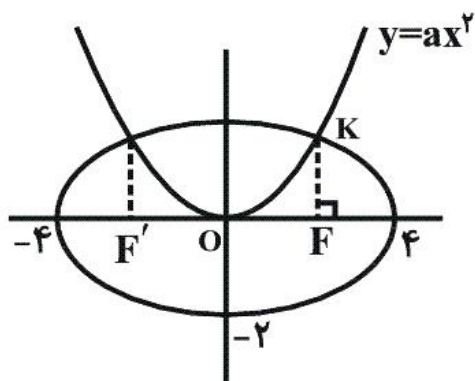
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- در شکل زیر، F و F' کانون‌های بیضی هستند. a کدام است؟



$\frac{1}{6}$ (۱)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{10}$ (۳)

$\frac{1}{12}$ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- مکان هندسی مراکز دوایری که از نقطه‌ی $A(2,1)$ می‌گذرد و بر محور y ها مماس می‌شوند، کدام است؟

$$y^2 + 4x - 2y + 5 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + 2y + 5 = 0 \quad (1)$$

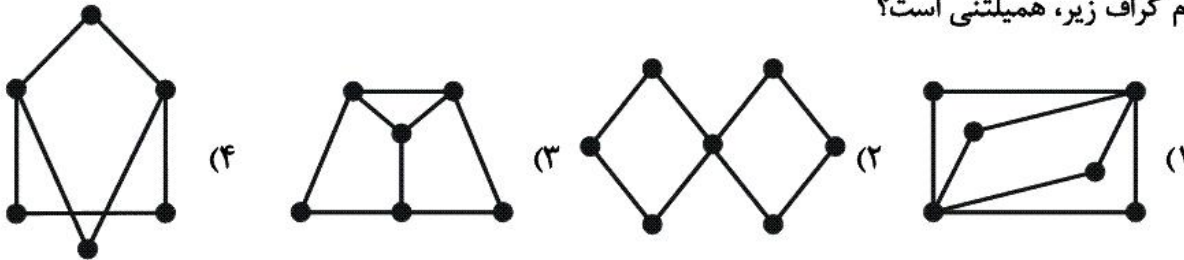
$$y^2 - 4x - 2y + 5 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۱۱- کدام گراف زیر، همیلتنی است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- چند گراف ساده با رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ وجود دارد که در آن $\deg(a) = 2$ و اندازه‌ی گراف ۵ باشد؟

$$1200 \quad (2)$$

$$600 \quad (1)$$

$$1600 \quad (4)$$

$$800 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- در ماتریس مجاورت یک درخت، تعداد صفرها برابر با ۶۵ می‌باشد. تعداد مسیرهای موجود بین رئوس متمایز این

درخت کدام است؟

$$36 \quad (2)$$

$$28 \quad (1)$$

$$55 \quad (4)$$

$$45 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- گراف ساده‌ی G ، ۵ - منتظم بوده و مرتبه‌ی آن ۸ است. اگر از این گراف ۳ یال حذف کنیم، در گراف حاصل

حداقل چند رأس از درجه‌ی ۵ باقی می‌ماند؟

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، کلیات و تقسیم پذیری ، نظریه ی اعداد - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۱۵- اگر a عضو ابتدای مجموعه ی $A = \{q \in \mathbb{Z} : 3q - 17 \geq 0\}$ بوده و b نیز عضو ابتدای مجموعه ی

$B = \{3q - 17 \geq 0 : q \in \mathbb{Z}\}$ باشند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$a \nmid b, b \mid a \quad (2)$$

$$a \mid b, b \nmid a \quad (1)$$

$$|a| = |b| \quad (4)$$

$$a = b \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اگر A بزرگ ترین عدد بیست رقمی در مبنای ۲ باشد، آنگاه تعداد ارقام $A + 4$ در مبنای ۸ کدام است؟

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، اعداد اول ، نظریه ی اعداد - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۱۷- اگر $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ و $a, b \in \mathbb{N}$ و $ab = 4680 - [a, b]$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b کدام است؟

$$12 \quad (2)$$

$$13 \quad (1)$$

$$14 \quad (4)$$

$$-13 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر $50! \mid 162 \times 2^x$ ، آنگاه بزرگترین مقدار برای x کدام است؟

$$45 \quad (2)$$

$$44 \quad (1)$$

$$47 \quad (4)$$

$$46 \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- اگر اعداد صحیح a, b و c مفروض باشند به طوری که $a^3b \mid c^2$ و $5a + 3c = 1$ ، آنگاه کوچکترین عضو مثبت

مجموعه ی $A = \{mb + nc \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

$$c^2 \quad (2)$$

$$c \quad (1)$$

$$|c| \quad (4)$$

$$|b| \quad (3)$$

شما پاسخ نداده اید

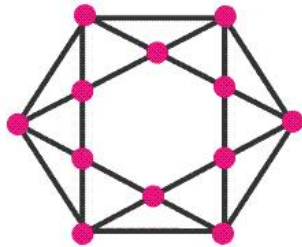
۱۲۰- اگر p و q دو عدد اول متمایز و A و B به ترتیب مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی p و q باشند، آنگاه کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $A \cap B$ چند شمارنده‌ی طبیعی دارد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۲ (۱) | ۳ (۲) |
| ۴ (۳) | ۶ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۲۱- گراف شکل مقابل، چند دور با طول ۵ دارد؟



- | |
|--------|
| ۴ (۱) |
| ۶ (۲) |
| ۸ (۳) |
| ۱۲ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در یک گراف ساده‌ی ناهمبند و ۳-منتظم که دارای ۸ رأس باشد، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) |
| ۵ (۳) | ۶ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- بین هر دو رأس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل ۷ رأس درجه‌ی یک و ۵ رأس درجه‌ی ۲ و k رأس درجه‌ی ۳ باشد. k کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۶ (۱) | ۵ (۲) |
| ۴ (۳) | ۳ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- اگر A ماتریس مجاورت گراف G و حاصلضرب درایه‌های قطری ماتریس A^2 برابر ۱۳۵ باشد، آنگاه گراف G با کم‌ترین مرتبه‌ی ممکن، چند دور با طول ۳ دارد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، کلیات و تقسیم پذیری ، نظریه اعداد - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۲۷- باقی مانده ی تقسیم عدد a بر ۱۲ و ۱۵ و ۳۲ به ترتیب ۵ و ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۲ (۱) | ۱۳ (۲) |
| ۱۵ (۳) | ۱۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- مربع یک عدد طبیعی فرد به صورت $(5 \cdot ab)_8$ نوشته شده، $a + b$ کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۵ (۱) | ۶ (۲) |
| ۷ (۳) | ۸ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، اعداد اول ، نظریه اعداد - ۱۳۹۵۰۱۲۰

۱۲۹- چند عدد اول P وجود دارد به طوری که $168P + 1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی باشد؟

- | | |
|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) |
| ۵ (۳) | ۶ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b ، باقیمانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۶ (۱) | ۷ (۲) |
| ۸ (۳) | ۹ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- به ازای هر عدد طبیعی $n \leq n_0$ ، دو عدد « $2n + 7$ ، $11n - 3$ » نسبت به هم اول اند. بیشترین مقدار n_0 کدام است؟

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| ۳۵ (۱) | ۳۷ (۲) | ۳۹ (۳) | ۴۰ (۴) |
|--------|--------|--------|--------|

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- مجموع دو عدد ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل این دو

عدد، کدام است؟

۹۲۴ (۴)

۶۹۳ (۳)

۴۶۲ (۲)

۲۳۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید



ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه ، مفاهیم پایه - ۱۳۹۵۰۱۲۰

-۸۱

(جمال الدین حسینی)

همواره داریم:

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$$

$$a < b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

بنابراین با توجه به نتیجه گیری صورت سوال، $a < 0$ و $b > 0$ باید باشد.

گزینه «۱» درست نیست، زیرا به ازای $a = -4$ و $b = 2$ داریم:

$$-4 < 2 \Rightarrow 16 \not< 4$$

گزینه «۲» درست نیست، زیرا به ازای $a = -1$ و $b = 5$ داریم:

$$-1 < 5 \Rightarrow 1 \not> 5$$

گزینه «۳» درست نیست، زیرا به ازای $a = -1$ و $b = 2$ داریم:

$$-1 < 2 \Rightarrow -1 \not> 4$$

گزینه «۴» درست است. زیرا طرف چپ همواره منفی و طرف راست همواره مثبت

است.

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه های ۱۲ تا ۱۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

(قاسم کتابچی)

$$\cdot / ab = \frac{ab - a}{90} = \frac{1 \cdot a + b - a}{90} \Rightarrow \frac{9a + b}{90} = \frac{7}{45}$$

$$\Rightarrow 9a + b = 14 \Rightarrow a = \frac{14 - b}{9}$$

$$b = 5 \Rightarrow a = \frac{14 - 5}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow a + b = 1 + 5 = 6$$

(دیفرانسیل - مفاهیم پایه: صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳

۲✓

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یک دنباله مهم ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

(جمال الدین حسینی)

راه حل اول: با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}$ داریم:

$$(\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1} = (\frac{(2n-5)+6}{2n-5})^{\frac{3}{2}(2n-5)+\frac{13}{2}}$$

$$= (1 + \frac{6}{2n-5})^{\frac{3}{2}(2n-5)} \times (1 + \frac{6}{2n-5})^{\frac{13}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1} = e^{6 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}} = e^9 \Rightarrow k = 9$$

راه حل دوم:

اگر حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{g(x)}$ حالت مبهم 1^∞ شود، می‌توان برای

محاسبه‌ی حد، از هم‌ارزی $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده نمود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n+1}{2n-5})^{3n-1} = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(3n-1)(\frac{2n+1}{2n-5}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{6(3n-1)}{2n-5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{18n}{2n}} = e^9 \Rightarrow k = 9$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۴✓

۳

۲

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، انواع دنباله ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

-۸۵

(ممد رضا شوکتی بیرق)

$$\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{1+\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}}$$

با افزایش n ، کسر $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ کاهش و $-\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ افزایش می یابد و در

نتیجه عبارت $1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ و $\sqrt{1 - \frac{1}{1+\sqrt{n}}}$ افزایش می یابد. پس دنباله ی

داده شده، صعودی است. از طرفی حد دنباله برابر ۱ است، پس دنباله همگرا و در

نتیجه کران دار می باشد.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه های ۲۳ و ۲۴)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، همگرایی و اگرایی دنباله ها ، دنباله - ۱۳۹۵۰۱۲۰

-۸۶

(ممد رضا شوکتی بیرق)

$$x_{n+1} - x_n = (4 + x_n)(9 + x_n) - x_n = (6 + x_n)^2 \geq 0$$

پس دنباله ی $\{x_n\}$ صعودی است.

اگر دنباله همگرا باشد، فرض می کنیم $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = L$ ، در این صورت

$$L = -6 \text{ و در نتیجه } \lim_{x \rightarrow \infty} x_{n+1} = L$$

با فرض همگرا بودن، چون دنباله صعودی است، پس $x_{n+1} \leq -6$:

$$x_{n+1} = x_n^2 + 13x_n + 36 \leq -6$$

$$\Rightarrow x_n^2 + 13x_n + 42 \leq 0 \Rightarrow (x_n + 7)(x_n + 6) \leq 0$$

$$\Rightarrow -7 \leq x_n \leq -6$$

پس باید $-7 \leq x \leq -6$ باشد، با توجه به گزینه ها به ازای $x_1 = -7$ دنباله ی

داده شده به صورت $\{-7, -6, -6, -6, \dots\}$ می شود که همگراست.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه های ۲۷ تا ۴۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + \frac{2^2}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3} = 1 + \frac{1^2 + 2^2}{3}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + \frac{3^2}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{3} = 1 + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{3}$$

$$\Rightarrow a_{10} = 1 + \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 9^2}{3} = 1 + \frac{\left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2}{3} = 1 + \frac{(45)^2}{3}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{نکته:}$$

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۵۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

(عمید علیزاده)

-۸۴

$$\left| \frac{1}{3^n + 3^{n+1}} - 0 \right| < 0.002 \Rightarrow \left| \frac{1}{3^n + 3^n \times 3} \right| < 0.002$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{4 \times 3^n} \right| < \frac{2}{1000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n} < \frac{1}{125} \Rightarrow 3^n > 125 \Rightarrow n = \{5, 6, 7, \dots\}$$

بنابراین چهار جمله‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ خارج از همسایگی به مرکز صفر و شعاع

0.002 قرار دارند.

(دیفرانسیل - دنباله: صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

(رضا نیازی)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2}, f(1) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n + (-1)^n}{n + 1}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{زوج } n : \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n+1}{n+1}\right) = f(1) = 2 \\ \text{فرد } n : \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = f(1^-) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow f(a_n) \text{ واگراست}$$

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

(عارف سمیعی)

قضیه‌ی فشردگی (ساندویچ): هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (بهجز احتمالاً در خود a)، $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ و نیز

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{آن گاه} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

در صورت سؤال گفته شده $|f(x) - 3| \leq 3(4 - x)^2$ یعنی:

$$-3(4 - x)^2 \leq f(x) - 3 \leq 3(4 - x)^2$$

$$\Rightarrow -3(4 - x)^2 + 3 \leq f(x) \leq 3(4 - x)^2 + 3$$

اگر فرض کنیم، $h(x) = -3(4 - x)^2 + 3$ و $g(x) = 3(4 - x)^2 + 3$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4} [-3(4 - x)^2 + 3] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} [3(4 - x)^2 + 3] = 3$$

پس شرایط قضیه‌ی فشردگی برقرار است. در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+1) + 2}{2 - f(x+1)} = \frac{3 + 2}{2 - 3} = \frac{5}{-1} = -5$$

(ریفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۵ تا ۷۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۰-

(رضا نیازی)

f و g به شرط $a \neq 0$ ، هر دو در $x=1$ حد ندارند، ولی ممکن است $f+g$ در $x=1$ حد داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1^+} a[1^+] - x$$

$$= 2 + (a - 1) = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1^-} a[1^-] - x$$

$$= -2 - 1 = -3 \Rightarrow a + 1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۹۱-

(کتاب نوروز - سوال ۵۴۹)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{3 - \sqrt{9 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 0 - \cos 0}{3 - \sqrt{9 - 0}} = \frac{1 - 1}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب و همچنین در صورت،

از رابطه‌ی $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ استفاده می‌کنیم،

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{3 - \sqrt{9 - x^2}} \times \frac{3 + \sqrt{9 - x^2}}{3 + \sqrt{9 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(2 \sin 2x \sin x)}{9 - (9 - x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12(2x)(x)}{x^2} = 24$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۲ تا ۸۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۲

(فریدون ساعتی)

با توجه به اینکه مخرج کسر برابر با صفر و حاصل حد برابر عدد است، پس

می‌بایست $x = 0$ ، صورت کسر را نیز صفر کند و در نهایت پس از رفع ابهام $\frac{0}{0}$

حاصل حد برابر با $\frac{1}{2}$ شود.

$$\sqrt{a(0) + b} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{b} = 2 \Rightarrow b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + 4} - 2}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 4 - 4}{x(\sqrt{ax + 4} + 2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{ax + 4} + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$(a, b) = (2, 4) \xrightarrow{\text{نقطه میانی}} \frac{2 + 4}{2} = 3$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۸۲ تا ۸۶)

۴

۳✓

۲

۱

(عمیدرضا کلاته‌جاری)

-۹۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - x^2 + x - 1) - (x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴✓

۳

۲

۱

(لایحه سالار)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x}) \times \frac{(x - \sqrt{x^2 - 2x})}{(x - \sqrt{x^2 - 2x})} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x - |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x + x \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}})} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 0^-}} = \frac{2}{2^+} = 1^-
 \end{aligned}$$

با توجه به حد فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x + \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2}{\sqrt[3]{2 - x} - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x}{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

توجه: دقت کنید برای محاسبه‌ی حد فوق می‌توان از اتحاد چاق و لاغر مخرج

استفاده نمود.

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

(مهم درضا شوکتی بیرق)

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x - [x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D_f = (0, 1)$$

$$\frac{x \in (0, 1)}{\rightarrow} f(x) = \frac{\sqrt{x - x^2}}{x} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$$

برای محاسبه‌ی مجانب قائم ریشه‌ی مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ : مجانب قائم}$$

دقت کنید که x نمی‌توند از همسایگی چپ $x = 0$ به صفر نزدیک شود. پس با

توجه به حد فوق گزینه‌ی (۴) صحیح است.

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(رضا نیازی)

اگر $y = mx + h$ مجانب مایل این تابع باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1 \right)}{\left(\sqrt{1 - \sin \frac{1}{x}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x \sin \frac{1}{x}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = x - \frac{1}{2} \text{ مجانب مایل}$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۲۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۰-

(کتاب نوروز - سوال ۵۹۵)

توابع معکوس مثلثاتی دارای مجانب مایل و قائم نیستند، چون

$$-1 \leq \sin^{-1}(g(x)) \leq 1 \text{ پس نمی تواند به } \infty \text{ میل کند.}$$

وجود ندارد (1^+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^{-1} \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6} \right) = \sin^{-1}(1^+)$: مجانب افقی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin^{-1} \left(\frac{-x^2 + x}{x^2 - 5x + 6} \right) = \sin^{-1}(-1)^+ = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 + 4x - 6}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{توجه:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x - 6}{x^2 - 5x + 6} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right) = 1 + 0^+ = 1^+$$

برای حد $-\infty$ نیز به همین صورت عمل می کنیم.

بنابراین در کل تابع یک مجانب افقی دارد.

(دیفرانسیل - حد و پیوستگی؛ صفحه های ۱۰۷ تا ۱۲۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۹۵

(کازم ابلالی)

می‌دانیم تابع $y = [ax]$ در نقاطی که ax عددی صحیح باشد، ناپیوسته است.

پس تابع $y = ax - [ax]$ نیز در نقاطی که $ax = k$ و $k \in \mathbb{Z}$ باشد،

ناپیوسته است. یعنی تابع در نقاط $\frac{1}{a}$ ، $\frac{2}{a}$ ، $\frac{3}{a}$ و ... ناپیوسته است. برای این که

در بازه‌ی $(0, a)$ تعداد نقاط ناپیوستگی برابر ۸ عدد باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{8}{a} < a \leq \frac{9}{a} \Rightarrow 8 < a^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{8} < a \leq 3$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۸۷ تا ۱۰۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۶

(کتاب نوروز - سوال ۵۷۷)

$$x^3 + m = -x \Rightarrow x^3 + x + m = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = x^3 + x + m$$

شرط وجود جواب

$$\xrightarrow{\text{در بازه‌ی } (0, 2)} g(0)g(2) < 0 \Rightarrow m(10 + m) < 0 \Rightarrow -10 < m < 0$$

(دیفرانسیل - هر و پیوستگی: صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

(جمال الدین حسینی)

دامنه‌ی تابع f برابر است با $D_f = [1, 4]$ ، از طرف دیگر $y = \sqrt{4-x}$ و
 $y = -2\sqrt{x-1}$ توابع اکیداً نزولی می‌باشند، لذا مجموع آنها یعنی تابع f نیز
 اکیداً نزولی و پیوسته است، پس f^{-1} نیز اکیداً نزولی و پیوسته است.

$$f(1) = \sqrt{3}$$

$$f(4) = -2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} D_f = [1, 4] \\ R_f = [-2\sqrt{3}, \sqrt{3}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f^{-1}} = [-2\sqrt{3}, \sqrt{3}] \\ R_{f^{-1}} = [1, 4] \end{cases}$$

بنابراین f^{-1} روی بازه‌ی $[-2\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ اکیداً نزولی و پیوسته است.

$$b - a = \sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$$

(دیفرانسیل - مر و پیوستگی؛ صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۰۴)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۱

(معمد صادق ثابتی)

چون اندازه‌ی تصویر بردار a بر روی بردار b برابر است با: $|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|}$ در

$$|a \cdot b| = |a'| |b|$$

نتیجه داریم:

یعنی اگر زاویه‌ی بین دو بردار حاده باشد، ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی بردار تصویر در اندازه‌ی برداری که روی آن تصویر ایجاد شده است.

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BH}| |\overrightarrow{BA}| = 4 \times 4 = 16$$

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CH}| |\overrightarrow{CB}| = 6 \times 10 = 60$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 16 + 60 = 76$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۰۲

(سید عادل رضا مرتضوی)

$$|a + b| = 4 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = 16$$

$$|a - b| = 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = 12$$

$$4a \cdot b = 4 \Rightarrow a \cdot b = 1$$

اگر دو عبارت فوق را از هم کم کنیم، داریم:

$$S = \frac{1}{2} |a \times b| \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |a \times b| \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{3}$$

$$\frac{|a \times b|}{a \cdot b} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1} = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

(هندسه تحلیلی - بردارها؛ صفحه‌های ۱۶، ۲۰ و ۲۵ تا ۳۰)

۴

۳

۲✓

۱

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, -1, 2) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}$$

چون $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ پس \overrightarrow{AD} همجهت با $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ است و داریم:

$$v_D = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2, -1, -1) + (1, -1, 2) = (3, -2, 1)$$

$$AD \text{ معادله‌ی } : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1} \xrightarrow{y=0}$$

$$\Rightarrow \frac{0-2}{-2} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow 1 = z-3 \Rightarrow z = 4$$

(هندسه تحلیلی - بردارها: صفحه‌های ۹ تا ۱۴، فط و صفحه: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱✓

(فسین فزایی)

-۱۰۴

کافی است دسته صفحه‌ی شامل P_1 و P_2 را از رابطه $P_1 = kP_2$ محاسبه کنیم و سپس شرط عمود بودن بر P_3 را اجرا کنیم.

دسته صفحه‌ی شامل P_1 و P_2 : $(x + y - 1) = k(2x - y + z)$

$$(1 - 2k)x + (1 + k)y - kz - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (1 - 2k, 1 + k, -k) \text{ بردار نرمال دسته صفحه} \\ N_3 = (3, 1, -1) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب داخلی} = 0}$$

$$3 - 6k + 1 + k + k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow x + y - 1 = 1(2x - y + z) \Rightarrow -x + 2y - z - 1 = 0$$

(هندسه تحلیلی - فط و صفحه: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

۴

۳

۲✓

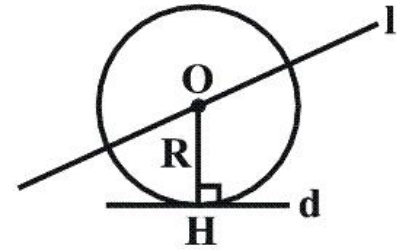
۱

-۱۰۵

(مسئله فزایی)

$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ 3\alpha \end{vmatrix} \in l \Rightarrow 6\alpha - \alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow O(1, 3)$$

$$|OH| = \frac{|4(1) - 3(3) - 5|}{\sqrt{9+16}} = 2 = R$$



$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴

۳

۲ ✓

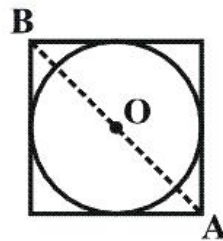
۱

-۱۰۶

(رضا عباسی اصل)

در این صورت وسط قطر مربع، مرکز دایره و طول ضلع مربع

برابر قطر دایره خواهد شد و داریم:



$$O\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Rightarrow O(2, 2)$$

می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{2}$ ، حال:

$$\Rightarrow a = 2 \xrightarrow{2R=a} 2R = 2 \Rightarrow R = 1$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

معادله دایره:

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

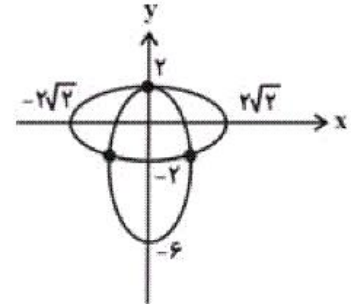
-۱۰۷

(علی ساوینی)

معادله‌ی هر دو بیضی را به حالت استاندارد در می‌آوریم و آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$x^2 + 2y^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

بیضی افقی و $W_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$ مرکز



$$4x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

بیضی قائم و $W_2 \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}$, $a = 4$, $b = 2$ مرکز

با توجه به شکل، دو بیضی، سه نقطه‌ی مشترک دارند.

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۰۸

(نصیر مبینی نژاد)

$$S_{A'B'F} = \Delta S_{BFA} \Rightarrow \frac{1}{2} \times A'F \times OB' = \Delta \times \frac{1}{2} \times AF \times OB$$

$$\Rightarrow A'F = \Delta AF \Rightarrow a + c = \Delta(a - c) \Rightarrow 4a = 6c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{3} = e$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴)

۴

۳✓

۲

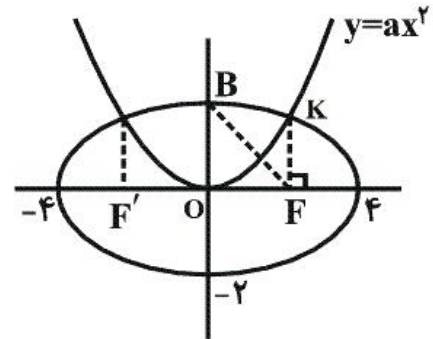
۱

مطابق شکل، در بیضی $a = ۴$ و $b = ۲$ است.

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۱۶ - ۴ = ۱۲$$

$$\Rightarrow c = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow F(۲\sqrt{۳}, ۰)$$



$$\text{معادله بیضی: } \frac{x^2}{۱۶} + \frac{y^2}{۴} = ۱ \xrightarrow{K(۲\sqrt{۳}, y)} \frac{۱۲}{۱۶} + \frac{y^2}{۴} = ۱$$

$$\Rightarrow y = \pm ۱ \Rightarrow K(۲\sqrt{۳}, ۱)$$

مختصات K در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند، پس داریم:

$$y = ax^2 \Rightarrow ۱ = a(۲\sqrt{۳})^2 \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۲}$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۵۵ تا ۷۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

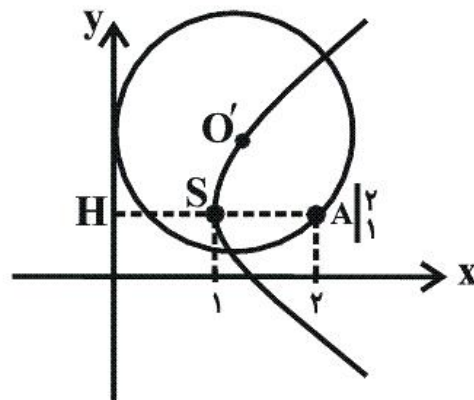
-۱۱۰

(معمدهری ممسن زاده طبری)

چون مراکز این دایره‌ها از یک نقطه و یک خط به یک فاصله هستند، پس روی یک سهمی قرار دارند. با توجه به این که خط هادی سهمی، خط قائم است، پس سهمی

افقی می‌باشد و $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ کانون سهمی است. از A عمود AH را بر محور y ها

رسم می‌کنیم،



$$AH = 2a = 2 \Rightarrow 4a = 4$$

$$S \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad (S \text{ وسط } H \text{ و } A)$$

$$(y-1)^2 = 4(x-1) \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 4x - 4$$

$$\Rightarrow y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$$

(هندسه تحلیلی - مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰)

☒ ۴

☐ ۳

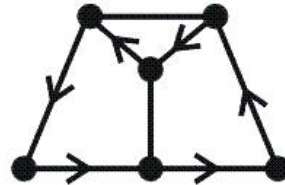
☐ ۲

☐ ۱

-۱۱۱

(نوید میبیری)

می‌دانیم که هر گراف همبند از مرتبه $p \geq 3$ را که دوری به طول p داشته باشد، گراف همیلتنی می‌گویند. در گراف گزینه‌ی ۳ که از مرتبه‌ی $p = 6$ است، یک دور به طول ۶ با فلش‌ها نمایش داده شده است. پس این گراف، یک گراف همیلتنی است. با توجه به تعریف گراف همیلتنی، همه‌ی رأس‌های گراف (همه‌ی p رأس) دقیقاً یک‌بار باید در دنباله‌ی مربوط به دور ظاهر شوند، یعنی از هیچ رأسی بیش از یک بار نگذریم، با توجه به این مطلب در گزینه‌های دیگر از هر رأسی که آغاز کنیم، در ادامه‌ی راه دست کم یک رأس وجود خواهد داشت که از آن دو بار بگذریم. پس هیچ کدام از این گراف‌ها همیلتنی نیستند.



(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌ی ۱۶)

۴

۳ ✓

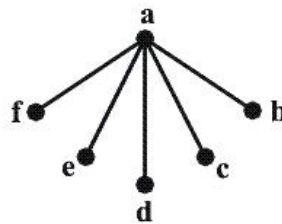
۲

۱

-۱۱۲

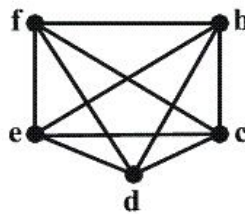
(علی ساوچی)

ابتدا توجه کنید که از رأس a ، ۵ یال می‌گذرد که تنها باید ۲ تای آن‌ها را انتخاب کنیم:



$$\binom{5}{2} = 10$$

سپس باید از میان ۱۰ یال موجود بین رئوس b, c, d, e و f ، ۳ تای آن را انتخاب نماییم تا ۵ یال کامل شود:



$$\binom{10}{3} = 120$$

بنابراین جواب سؤال عبارت است از:

$$10 \times 120 = 1200$$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۱۳

(سید عارف رضا مرتضوی)

$$p^2 - 2q = 65 \Rightarrow p^2 - 2q = 65$$

$$\xrightarrow{q=p-1} p^2 - 2(p-1) = 65 \Rightarrow p^2 - 2p = 63 \Rightarrow p = 9$$

تعداد مسیرهای موجود بین رئوس متمایز این درخت برابر است با: $\binom{9}{2} = 36$

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۱۴

(سیدمرتضی فاطمی)

دنباله‌ی درجه‌ی رئوس G به صورت $5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5$ است. سه یال مورد نظر را می‌توان به ۵ صورت زیر از این گراف حذف نمود.



(۵)



(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

در شکل (۲)، درجه‌ی ۶ رأس کم شده و ۲ رأس درجه‌ی ۵ باقی می‌ماند و در بقیه‌ی شکل‌ها، تعداد بیشتری درجه‌ی ۵ باقی می‌ماند.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۴

۳

۲

۱✓

ریاضی، ریاضیات گسسته، کلیات و تقسیم‌پذیری، نظریه‌ی اعداد - ۱۳۹۵۰۱۲۰

-۱۱۵

(مهدی صادق نیک‌کار)

اگر نامعادله‌ی $3q - 17 \geq 0$ با شرط $q \in \mathbb{Z}$ را حل کنیم، داریم $q \geq 6$ ، یعنی عضو ابتدای A برابر است با:

از طرفی در اثبات قضیه‌ی الگوریتم تقسیم در صفحه‌ی ۳۱ کتاب درسی، استنتاج شده که عضو ابتدای مجموعه‌ی $\{q \in \mathbb{Z} : a - bq \geq 0\}$ همان S همان باقیمانده‌ی تقسیم a بر b است که در مورد مجموعه‌ی B باقیمانده‌ی تقسیم -17 بر -3 برابر $b=1$ است.

$$a = 6, b = 1 \Rightarrow a \not\equiv b, b \mid a$$

توجه کنید که اگر A و B را با اعضای آن‌ها مشخص کنیم داریم:

$$A = \{6, 7, 8, 9, \dots\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد: صفحه‌های ۲۵ تا ۳۲)

۴

۳

۲✓

۱

(فرزاد بواردی)

A بزرگ‌ترین عدد بیست رقمی در مبنای ۲ می‌باشد، پس A به صورت $A = \underbrace{(111 \dots 11)}_{\text{رقم } 20}$ است.

چون A بزرگ‌ترین عدد بیست رقمی در مبنای ۲ می‌باشد، پس $A+1$ کوچک‌ترین عدد ۲۱ رقمی در مبنای ۲ می‌باشد. یعنی $A+1$ عددی است به صورت $A+1 = \underbrace{(100 \dots 000)}_{\text{رقم } 21}$ حال عدد $(3)_1$ را در مبنای ۲

نوشته سپس به $A+1$ اضافه می‌کنیم تا $A+4$ در مبنای ۲ به دست آید.

$$(A+4)_1 = (A+1)_1 + (3)_1$$

$$= \underbrace{(100 \dots 000)}_{\text{رقم } 21} + (11)_2 = \underbrace{(100 \dots 011)}_{\text{رقم } 21}$$

ارقام عدد $\underbrace{(100 \dots 011)}_{\text{رقم } 21}$ را از سمت راست سه رقم سه رقم جدا

می‌کنیم. بنابراین تعداد ارقام عدد $A+4$ در مبنای ۸، برابر ۷ است.

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۱۷

(عباس اسری امیرآبادی)

بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b را با d نشان می‌دهیم یعنی $(a, b) = d$ پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd \\ \frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd \\ (a', b') = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'd}{b'd} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} a' = 5 \\ b' = 6 \end{cases} \Rightarrow a'b' = 30.$$

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} = \frac{a'd \cdot b'd}{d} = a'b'd$$

$$ab = 4680 - [a, b]$$

$$a'b'd^2 = 4680 - a'b'd \Rightarrow 3 \cdot d^2 + 30 \cdot d = 4680.$$

$$\xrightarrow{\div 30} d^2 + d - 156 = 0 \Rightarrow (d + 13)(d - 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -13 \\ d = 12 \end{cases}$$

می‌دانیم ب.م.م همواره طبق تعریف عددی مثبت است، پس $d = 12$ قابل قبول است.

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۱۸

(رضا پورحسینی)

$$162 \times 2^x = 81 \times 2 \times 2^x = 3^4 \times 2^{x+1}$$

حال تعداد عوامل ۲ را در $50!$ حساب می‌کنیم:

$$\left[\frac{50}{2} \right] + \left[\frac{50}{4} \right] + \left[\frac{50}{8} \right] + \left[\frac{50}{16} \right] + \left[\frac{50}{32} \right] = 47$$

$$x + 1 = 47 \Rightarrow x = 46$$

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

(هومن نورائی)

$$\Delta a + 3c = 1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه بزو}} (a, c) = 1 \Rightarrow (a^3, c^2) = 1$$

$$c^2 \mid a^3 b, (a^3, c^2) = 1 \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} c^2 \mid b$$

از طرفی می‌دانیم $c \mid c^2$ ، پس $c \mid b$ و در نتیجه کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی A برابر است با:

$$(b, c) \stackrel{c \mid b}{=} |c|$$

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۵)

☒ ۴☐ ۳☐ ۲☐ ۱

(علی ساوچی)

$$A = \{p, 2p, 3p, \dots\}$$

$$B = \{q, 2q, 3q, \dots\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{pq, 2pq, \dots\} \Rightarrow \min(A \cap B) = pq$$

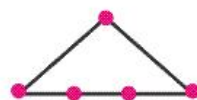
شمارنده‌های طبیعی عدد pq عبارت‌اند از: $1, p, q, pq$ ، یعنی ۴ شمارنده‌ی طبیعی دارد. (توجه کنید که چون $\emptyset \neq A \cap B \subseteq \mathbb{N}$ ، مجموعه‌ی $A \cap B$ طبق اصل خوش‌ترتیبی، دارای عضو ابتدا است.)

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

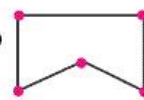
☐ ۴☒ ۳☐ ۲☐ ۱

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۵۰۱۲۰

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)



در این گراف ۶ دور به فرم و ۶ دور به فرم



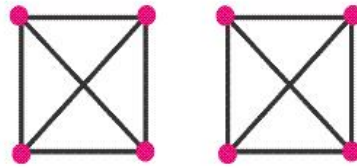
وجود دارد. پس جمعاً ۱۲ دور به طول ۵ در این گراف یافت می‌شود.

(ریاضیات گسسته - گراف؛ صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

☒ ۴☐ ۳☐ ۲☐ ۱

-۱۲۲

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)



گراف ناهمبند ۳- منتظم از مرتبه ۸، از دو گراف K_4 تشکیل شده است.

که هر کدام $3 = \frac{(4-1)!}{2} \times \binom{4}{4}$ دور به طول ۴ دارند، پس کلاً ۶ دور به

طول ۴ داریم.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

☒ ۴☐ ۳☐ ۲☐ ۱

-۱۲۳

(سراسری ریاضی - ۷۸)

چون بین هر دو رأس این گراف، دقیقاً یک مسیر وجود دارد، پس این گراف، یک درخت است.

راه حل اول:

$$1 = 2 + k_1 \times (n_1 - 2) + \dots + k_i \times (n_i - 2)$$

$$\Rightarrow 7 = 2 + k \times (3 - 2) \Rightarrow k = 5$$

راه حل دوم:

$$q = p - 1 \Rightarrow \frac{7 \times 1 + 5 \times 2 + k \times 3}{2} = 12 + k - 1 \Rightarrow k = 5$$

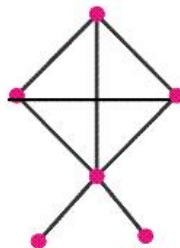
(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

☐ ۴☐ ۳☒ ۲☐ ۱

-۱۲۴

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

$$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$$



چون گراف رأس با درجه‌ی ۵ دارد پس حداقل ۶ رأس دارد،

یعنی درجات آن ۱، ۱، ۳، ۳، ۳، ۵ می‌باشند.

حال گراف را رسم می‌کنیم:

این گراف دارای ۴ دور به طول ۳ است.

(ریاضیات گسسته - گراف: صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

☒ ۴☐ ۳☐ ۲☐ ۱

-۱۲۷

(سراسری ریاضی - ۷۹)

$$\begin{cases} a = 12q + 5 \\ a = 15q' + 8 \\ a = 32q'' + 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 7 = 12q + 12 = 12k \\ a + 7 = 15q' + 15 = 15k' \\ a + 7 = 32q'' + 32 = 32k'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + 7 = 48 \cdot t \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \text{Min}(a) = 473 \\ \text{مجموع ارقام} = 4 + 7 + 3 = 14 \end{cases}$$

توجه: کوچک ترین مضرب مشترک ۱۲، ۱۵ و ۳۲، ۴۸۰ می باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه ی اعداد: صفحه های ۳۰ تا ۳۲ و ۴۵)

☒ ۴☐ ۳☐ ۲☐ ۱

-۱۲۸

(سراسری ریاضی خارج کشور - ۹۰)

می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ است پس $b = 1$

$$(\delta \cdot 0 \cdot 1)_8 \leq (\delta \cdot ab)_8 \leq (\delta \cdot 71)_8$$

$$2561 \leq (\delta \cdot a1)_8 \leq 2617 \Rightarrow 2561 \leq (\delta 1)^2 = 2601 \leq 2617$$

$$\begin{array}{r} 2601 \\ 1 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 325 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 40 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 5 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 2601 = (\delta \cdot \delta 1)_8 \Rightarrow a = \delta$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

(ریاضیات گسسته - نظریه ی اعداد: صفحه های ۳۲ تا ۳۴)

☐ ۴☐ ۳☒ ۲☐ ۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

$$۱۶۸p + ۱ = k^2 \Rightarrow ۱۶۸p = k^2 - ۱ = (k-۱)(k+۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-۱=۱۶۸ \\ k+۱=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۱۶۹ \\ p=۱۷۰ \end{cases}; \begin{cases} k-۱=۸۴ \\ k+۱=۲p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۸۵ \\ p=۴۳ \end{cases};$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-۱=۴۲ \\ k+۱=۴p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۴۳ \\ p=۱۱ \end{cases}; \begin{cases} k-۱=۲۸ \\ k+۱=۶p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=۲۹ \\ p=۵ \end{cases}; \begin{cases} k-۱=۲p \\ k+۱=۸۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۸۳ \\ p=۴۱ \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد: صفحه‌های ۳۸ تا ۳۹)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۳۰

(سراسری ریاضی - ۸۸)

$$\begin{cases} a = 25b + 17 \\ b > 17 \end{cases}$$

$$a = 6q \Rightarrow 25b + 17 = 6q \Rightarrow 24b + b + 18 - 1 = 6q$$

$$\Rightarrow b - 1 = 6q - 24b - 18 = 6k \Rightarrow b = 6k + 1$$

$$b > 17 \Rightarrow 6k + 1 > 17 \Rightarrow 6k > 16 \Rightarrow k > \frac{16}{6} \Rightarrow k \geq 3$$

$$a = 25(6k + 1) + 17 = 150 \cdot k + 42$$

$$k = 3 \Rightarrow \text{Min}(a) = 150 \times 3 + 42 = 492$$

رقم دهگان آن ۹ می باشد.

(ریاضیات گسسته - نظریه ی اعداد: صفحه های ۳۰ تا ۳۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۵

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

$$(11n - 3, 2n + 7) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 11n - 3 \xrightarrow{\times 2} d \mid 22n - 6 \\ d \mid 2n + 7 \xrightarrow{\times 11} d \mid 22n + 77 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 83 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 83$$

اگر $d = 83$ باشد آنگاه:

$$2n + 7 = 83k \xrightarrow{k=1} 2n + 7 = 83 \Rightarrow n = 38$$

پس کمترین مقدار n برای آن که $d = 83$ باشد برابر $n = 38$ است که در آن صورت $11n - 3$ نیز مضرب 83 خواهد بود. پس به ازای $n \leq 37$ ، دو عدد داده شده نسبت به هم اول اند.

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۲۶

(سراسری ریاضی - ۹۴)

بمم دو عدد a و b را d فرض می‌کنیم و طبق فرض داریم

$$d = 231$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 231a' \\ b = 231b' \end{array} \right\} \Rightarrow 231(a' + b') = 2772 \Rightarrow a' + b' = 12$$

با توجه به اینکه عدد کوچک‌تر مخالف بمم است پس $b' = 5$ و $a' = 7$ و

$$a - b = (7 - 5) \times 231 = 462 \text{ در نتیجه}$$

(توجه شود که a' و b' باید نسبت به هم اول باشند)

(ریاضیات گسسته - نظریه‌ی اعداد؛ صفحه‌های ۴۰ تا ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱