



**سایت ویژه ریاضیات** [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات**

**دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی**

**نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور**

**دانلود نرم افزارهای ریاضیات**

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)



## ریاضی ، حسابان ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۹۱- اگر  $\sin 2\alpha < 0$  و  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) > 0$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیهی مثلثاتی قرار دارد؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر  $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- (۱)  $3$  یا  $-\frac{1}{3}$   
(۲)  $-3$  یا  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $2$  یا  $-\frac{1}{3}$   
(۴)  $-2$  یا  $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\cos 4x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{47}{81}$   
(۲)  $\frac{47}{81}$   
(۳)  $\frac{15}{36}$   
(۴)  $-\frac{15}{36}$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- حاصل  $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{12}) + \tan^{-1}(\cot(\frac{-\pi}{4}))$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{65\pi}{84}$   
(۲)  $\frac{5\pi}{84}$   
(۳)  $-\frac{5\pi}{84}$   
(۴)  $-\frac{65\pi}{84}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- جواب کلی معادلهی  $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$   
(۲)  $k\pi - \frac{\pi}{4}$   
(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$   
(۴)  $k\pi - \frac{\pi}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۶- ساده شده ی عبارت  $\frac{2\cos 40^\circ - 1}{\sin 50^\circ}$  کدام است؟

(۱)  $4\sin 10^\circ$

(۲)  $4\cos 10^\circ$

(۳)  $-4\sin 10^\circ$

(۴)  $-4\cos 10^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۹۷- دامنه ی تابع  $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$  به صورت بازه ی  $[\alpha, \beta]$  است.  $\alpha + \beta$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۹۸- مجموع جواب های معادله ی  $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  در بازه ی  $[0, \pi]$  کدام است؟

(۱)  $\pi$

(۲)  $\frac{13\pi}{12}$

(۳)  $\frac{7\pi}{6}$

(۴)  $\frac{5\pi}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- انتهای کمان جواب های معادله ی  $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$  بر روی دایره ی مثلثاتی، رئوس کدام چندضلعی است؟

(۱) شش ضلعی

(۲) مربع

(۳) مثلث قائم الزاویه

(۴) مثلث متساوی الاضلاع

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- کدام یک از جملات زیر نادرست است؟

(۱) دوره ی تناوب تابع  $y = 5 \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ ، برابر  $\frac{2\pi}{3}$  است.

(۲) تابع  $y = \cot x$ ، روی بازه ی  $(0, \pi)$  نزولی است.

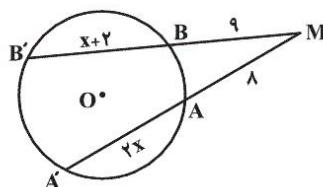
(۳) تابع  $y = \tan x$ ، روی بازه ی  $(0, \pi)$  صعودی است.

(۴) کتانژانت یک زاویه، با تانژانت متمم همان زاویه برابر است.

شما پاسخ نداده اید

## ریاضی ، هندسه ی ۲ ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۱۲۱- با توجه به اندازه های روی شکل، در دایره ی  $C(O, 7)$ ، فاصله ی مرکز دایره از وتر بزرگ تر کدام است؟



(۱)  $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

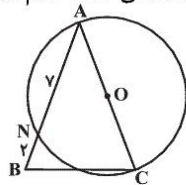
(۲)  $7\sqrt{3}$

(۳)  $2\sqrt{6}$

(۴)  $3\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- در شکل مقابل، مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  متساوی الساقین،  $AN = 7$  و  $BN = 2$  و  $O$  مرکز دایره است. اندازه ی قاعده ی  $BC$  کدام است؟



(۱) ۴

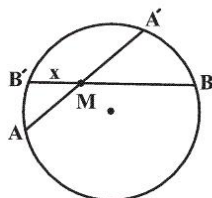
(۲) ۴/۸

(۳) ۶

(۴) ۷/۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- در شکل زیر،  $AB$  قطری از دایره است و دو وتر  $AA'$  و  $BB'$  در نقطه ی  $M$  با هم برخورد کرده اند. اگر  $MA = 4$ ،  $MA' = 6$ ،  $MB = 8$  و



$MB' = x$ ، آن گاه تفاضل اندازه ی مربعات وترهای  $AB'$  و  $A'B$ ، کدام است؟

(۱) ۱۶

(۲) ۲۱

(۳) ۲۴

(۴) ۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- دو دایره به شعاع های ۴ و ۹ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی آن ها یک واحد از طول خط المרכזین کم تر باشد، وضعیت نسبی دو دایره کدام است؟

(۲) مماس برون

(۱) متخارج

(۴) مماس درون

(۳) متقاطع

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- دو دایره ی  $C(O, 4)$  و  $C'(O', 3)$  با خط المרכזین به طول  $7\sqrt{2}$  متخارجند. اگر  $M$  نقطه ی تماس مماس مشترک داخلی دو دایره با دایره کوچک باشد، بیش ترین فاصله ی  $M$  از نقاط دایره ی بزرگ تر کدام است؟

(۲)  $4 + \sqrt{65}$

(۱)  $-4 + \sqrt{65}$

(۴)  $4 + \sqrt{54}$

(۳)  $-4 + \sqrt{54}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- کدام تناظر  $R^2 \rightarrow R^2$  با ضابطه ی داده شده، یک تبدیل است؟

(۲)  $T(x, y) = (x, y^2 - 1)$

(۱)  $T(x, y) = (x + y, 1)$

(۴)  $T(x, y) = (x + y, x)$

(۳)  $T(x, y) = (1, -y)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- نقاط  $A = (-2, 3)$ ،  $B = (6, 5)$  و  $C = (3, 1)$  رأس های یک مثلث اند. ضابطه ی انتقالی که تحت آن رأس  $C$  به پای میانه ی وارد بر ضلع مقابل، تصویر می شود کدام است؟

(۲)  $T(x, y) = (x + 1, y - 3)$

(۱)  $T(x, y) = (x - 1, y + 3)$

(۴)  $T(x, y) = (x + 1, y + 3)$

(۳)  $T(x, y) = (x - 1, y - 3)$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- نگاشت  $M$  را به صورت «اگر نقطه ی  $P$  روی خط  $L$  باشد، آنگاه  $M(P) = P$  و اگر نقطه ی  $P$  روی خط  $L$  نباشد، آنگاه  $M(P) = P'$ ، به طوری که  $P'$  محل تقاطع خط  $L$  و عمودی است که از نقطه ی  $P$  بر خط  $L$  رسم می شود» تعریف کرده ایم. در مورد نگاشت  $M$ ، کدام مورد صحیح است؟  
(۱) یک به یک و ایزومتري است.  
(۲) یک به یک است ولی ایزومتري نیست.  
(۳) یک به یک نیست ولی ایزومتري است.  
(۴) نه یک به یک و نه ایزومتري است.

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- به ازای چه مقادیری از  $a$ ، تبدیل  $T(x, y) = (ax + ay, ay - ax)$ ، ایزومتري است؟

(۲)  $\pm 1$

(۱)  $\pm \sqrt{2}$

(۴)  $\pm \frac{1}{2}$

(۳)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- مساحت تصویر مثلث  $ABC$  با رأس های  $A(6, 0)$ ،  $B(0, -4)$  و  $C(0, 0)$ ، تحت تبدیل  $T(x, y) = (x + 4, y - 4)$  کدام است؟

(۲) ۸

(۱) ۴

(۴) ۱۶

(۳) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

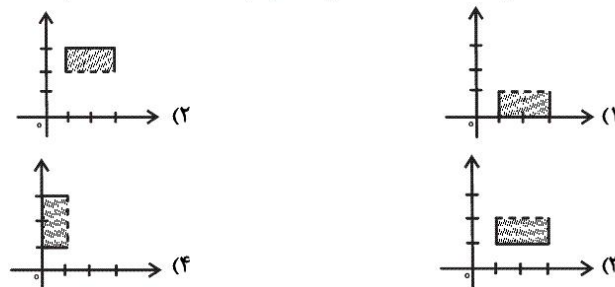
## ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۱۴۱- تعداد اعضای کدام یک از رابطه‌های زیر، متناهی است؟ (تمام رابطه‌ها روی مجموعه‌ی  $Z$  تعریف شده‌اند).

- (۱)  $xRy \Leftrightarrow y > x^2$   
(۲)  $xRy \Leftrightarrow y = x^2$   
(۳)  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 25$   
(۴)  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- اگر  $A = [1, 2]$  و  $B = [0, 2]$  باشند، آنگاه نمودار  $A \times B - B \times A$  کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد اول یک‌رقمی باشد و  $B = \{2k+1 : k \in A\}$ ، آنگاه مجموعه‌ی  $A^2 - B^2$  چند زیرمجموعه دارد؟

- (۱)  $2^{12}$   
(۲)  $2^8$   
(۳)  $2^9$   
(۴)  $2^7$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- دو رابطه‌ی  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x\}$  و  $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$  داده شده‌اند. تعداد عضوهای  $T \cap S$  کدام است؟

- (۱) ۱۸  
(۲) ۱۷  
(۳) ۱۶  
(۴) ۱۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- اگر  $A$  یک مجموعه‌ی ۵ عضوی و  $B$  یک مجموعه‌ی ۶ عضوی باشد، به‌طوری که  $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$ ، آنگاه  $(A \Delta B) \times (B - A)$  چند عضوی است؟

- (۱) ۱۱  
(۲) ۱۲  
(۳) ۵۵  
(۴) ۶۶

شما پاسخ نداده اید

۱۴۶- تعداد افزایندهای مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  به‌گونه‌ای که همواره ۱ و ۲ در یک مجموعه باشند، کدام است؟

- (۱) ۱۵  
(۲) ۱۰  
(۳) ۵  
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- کدام یک از روابط زیر هم‌ارزی نیست؟

- (۱)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 - c^2 = d - b$  (روی  $\mathbb{R}$ )  
(۲)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^b = c^d$  (روی  $\mathbb{N}$ )  
(۳)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + c = b + d$  (روی  $\mathbb{N}$ )  
(۴)  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 - c^2 = b^2 - d^2$  (روی  $\mathbb{Z}$ )

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- رابطه‌ی هم‌ارزی  $R$  روی مجموعه‌ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  به‌صورت زیر تعریف شده است. کلاس هم‌ارزی  $[2]$  دارای چند عضو است؟

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2)\}$$

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- رابطه‌ی  $aRb \Leftrightarrow a|b$  روی مجموعه‌ی  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$  چه تعداد از خاصیت‌های بازتابی، تقارنی و تعدی را دارد؟

- |       |       |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) |
| ۳ (۳) | ۰ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه رابطه‌ی  $R$  روی  $A^2$ ، به صورت  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$  تعریف می‌شود. این رابطه، مجموعه‌ی  $A^2$  را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟

- |       |       |
|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) |
| ۶ (۳) | ۷ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

## ریاضی ، حسابان-سوالات موازی ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۱۱۱- اگر  $\sin 2\alpha < 0$  و  $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) > 0$  باشد، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

- |         |           |
|---------|-----------|
| اول (۱) | دوم (۲)   |
| سوم (۳) | چهارم (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- اگر  $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$  باشد، مقدار  $\tan x$  کدام است؟

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| ۳ یا $-\frac{1}{4}$ (۱) | ۳ یا $-\frac{1}{4}$ (۲) |
| ۲ یا $-\frac{1}{3}$ (۳) | ۴ یا $-\frac{1}{3}$ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر  $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\cos 4x$  کدام است؟

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| $-\frac{47}{81}$ (۱) | $\frac{47}{81}$ (۲)  |
| $\frac{15}{36}$ (۳)  | $-\frac{15}{36}$ (۴) |

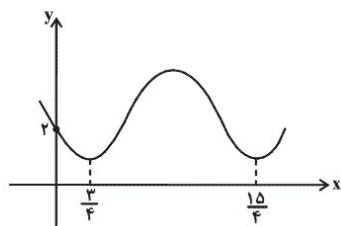
شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- حاصل عبارت  $\frac{1}{\sin 10^\circ} + 8 \sin^2 10^\circ$  کدام است؟

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| ۲ $\sin 10^\circ$ (۱) | ۲ $\cos 10^\circ$ (۲) |
| ۶ (۳)                 | ۳ (۴)                 |

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. حاصل  $2a + 3b$  کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۴

(۳) ۲

(۴)  $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- حاصل عبارت  $\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ$  کدام است؟

(۲)  $\sin 50^\circ$

(۱)  $\cos 50^\circ$

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- حاصل عبارت  $\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$  کدام است؟

(۲)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴)  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۳)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- حاصل عبارت  $\cos 10^\circ (4 \sin^2 10^\circ - 1)$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۱)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $-\sqrt{3} \sin 20^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- حاصل عبارت  $\frac{\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ}{\sin 40^\circ}$  کدام است؟

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۴)  $\frac{1}{6}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- اگر عبارت  $\tan x - \cot x = \frac{1}{y}$  باشد، حاصل  $\cot(x + \frac{\pi}{4})$  کدام است؟

(۲)  $\frac{23}{7}$

(۱)  $\frac{7}{23}$

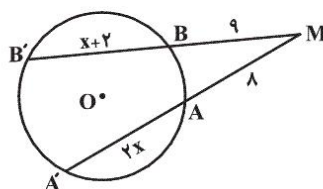
(۴)  $\frac{15}{8}$

(۳)  $\frac{8}{15}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۲- سوالات موازی ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۱۳۱- با توجه به اندازه‌های روی شکل، در دایره‌ی  $C(O, 7)$  ، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر بزرگ‌تر کدام است؟



(۲)  $7\sqrt{3}$

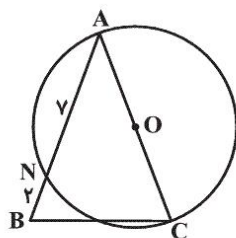
(۴)  $3\sqrt{2}$

(۱)  $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $2\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- در شکل مقابل، مثلث ABC در رأس A متساوی‌الساقین،  $AN = 7$  و  $BN = 2$  و O مرکز دایره است. اندازه‌ی قاعده‌ی BC کدام است؟



(۱) ۴

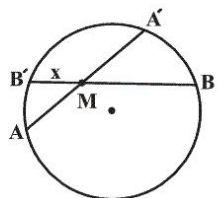
(۲)  $4/8$

(۳) ۶

(۴)  $7/2$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- در شکل زیر، AB قطری از دایره است و دو وتر  $AA'$  و  $BB'$  در نقطه‌ی M با هم برخورد کرده‌اند. اگر  $MA = 4$  ،  $MA' = 6$  ،  $MB = 8$  و  $MB' = x$  ، آن‌گاه تفاضل اندازه‌ی مربعات وترهای  $AB'$  و  $A'B$  ، کدام است؟



(۲) ۲۱

(۴) ۲۵

(۱) ۱۶

(۳) ۲۴

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی آن‌ها یک واحد از طول خط‌المركزین کم‌تر باشد، وضعیت نسبی دو دایره کدام

است؟

(۲) مماس برون

(۴) مماس درون

(۱) متخارج

(۳) متقاطع

شما پاسخ نداده اید



۱۳۵- دو دایره  $C(O, 4)$  و  $C'(O', 3)$  با خط‌المركزین به طول  $2\sqrt{2}$  متخارجند. اگر  $M$  نقطه‌ی تماس مماس مشترک داخلی دو دایره با دایره

کوچک باشد، بیش‌ترین فاصله‌ی  $M$  از نقاط دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

$$(1) -4 + \sqrt{65} \quad (2) 4 + \sqrt{65}$$

$$(3) -4 + \sqrt{54} \quad (4) 4 + \sqrt{54}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', 2R)$  مفروضند. اگر طول مماسی که از مرکز دایره‌ی کوچک‌تر بر دایره‌ی بزرگ‌تر رسم می‌شود برابر  $2R\sqrt{3}$  باشد،

طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

$$(1) R\sqrt{5} \quad (2) R\sqrt{7}$$

$$(3) R \quad (4) \text{ مماس مشترک داخلی ندارند.}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- دو دایره  $C(O, 4)$  و  $C'(O', 5)$  در نقاط  $A$  و  $B$  متقاطع‌اند. اگر نقطه‌ی  $M$  روی امتداد  $AB$  به گونه‌ای انتخاب شود که  $MO' = 6$  باشد،

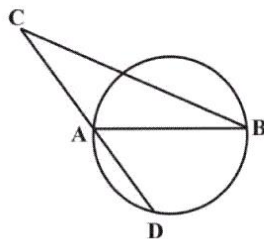
آنگاه طول  $MO$  چقدر است؟

$$(1) 3\sqrt{2} \quad (2) 2\sqrt{6}$$

$$(3) 5 \quad (4) 3\sqrt{3}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- در شکل مقابل  $AB = AC = 1$  و  $AB$  قطر دایره است. اگر  $AD = \frac{2}{3}$ ، مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟



$$(1) \frac{\sqrt{5}}{6} \quad (2) \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$(3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{2}{5}$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- اگر فرض شود «در مثلثی مجذور طول نیمساز یک زاویه‌ی داخلی از حاصل‌ضرب طول اضلاع این زاویه کم‌تر است»، آنگاه این فرض:

(۱) همواره درست است.

(۲) تنها زمانی درست است که این زاویه حاده باشد.

(۳) تنها زمانی درست است که این زاویه منفرجه باشد.

(۴) همواره نادرست است.

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۱۳ و طول مماس مشترک خارجی ۲۴ مفروضند. مساحت کوچک‌ترین دایره‌ی مماس بر این دو دایره کدام است؟

- (۱)  $81\pi$  (۲)  $16\pi$
- (۳)  $25\pi$  (۴)  $36\pi$

شما پاسخ نداده اید

## ریاضی ، حسابان-گواه ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

۸۱- اگر  $\tan \theta = ۰/۲$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

- (۱) -۲ (۲)  $1/۲$
- (۳) ۲ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۸۲- اگر  $\alpha + \beta = ۱۳۵^\circ$  و  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$
- (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- حاصل عبارت  $\frac{\sin \Delta a - \sin 3a}{\cos \Delta a - \cos 3a}$  به ازای  $a = ۷/۵^\circ$ ، کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{3}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- عبارت  $(\cos ۱۰^\circ - \cos ۷^\circ)(\tan ۷^\circ - \cot ۱۰^\circ)$  برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $-\sqrt{3}$
- (۳)  $2\cos 20^\circ$  (۴)  $\sin ۸0^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۸۵- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos^3 x \sin(3\pi - x) - \sin^3 x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{4}$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

- (۱)  $\frac{k\pi}{4}$  (۲)  $\frac{k\pi}{2}$
- (۳)  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos \Delta x \cos 3x = \cos^2 x$  کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{4}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2}$

(۳)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۴)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۳)  $k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۴)  $k\pi + \frac{\pi}{8}$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{\cos \Delta x \cos 3x - \sin 3x \sin x}{\cos 2x} = 1$ ، به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{3}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2}$

(۳)  $\frac{2k\pi}{5}$

(۴)  $\frac{2k\pi}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$  به کدام صورت است؟

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۹۰- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$  به کدام صورت است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

(۱)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

(۲)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

(۳)  $k\pi + \frac{\pi}{6}$

(۴)  $k\pi + \frac{\pi}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- اگر  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- اگر  $\alpha + \beta = 135^\circ$  و  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$  باشد، حاصل عبارت  $A = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{3}{4}$

(۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $-\frac{4}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- حاصل عبارت  $\frac{\sin \Delta a - \sin^3 a}{\cos \Delta a - \cos^3 a}$  به ازای  $a = 7/5^\circ$ ، کدام است؟

(۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $-\sqrt{3}$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- عبارت  $(\tan 70^\circ - \cot 10^\circ)(\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)$  برابر کدام است؟

(۱)  $1$  (۲)  $-\sqrt{3}$

(۳)  $2 \cos 20^\circ$  (۴)  $\sin 80^\circ$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$  باشد، آنگاه  $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{5}$

(۳)  $\frac{1}{5}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- حاصل عبارت  $\cos 20^\circ \cos 40^\circ + \cos^2 80^\circ$  کدام است؟

(۱)  $\cos 10^\circ$  (۲)  $\sin 70^\circ$

(۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- حاصل عبارت  $\frac{1}{\cos 2^\circ} - 4 \cos 4^\circ$  برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲) ۱  
(۳)  $\sqrt{3}$   
(۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر  $\tan \frac{2\pi}{3} \sin \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) = 1$  باشد، مقدار  $\cos 2x$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$   
(۲)  $-\frac{1}{3}$   
(۳)  $\frac{1}{3}$   
(۴)  $\frac{2}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر  $\sin x(\cos x - \sin x) = -1$  باشد، آن گاه  $\cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$  چقدر است؟

- (۱)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۲) ۳  
(۳) صفر  
(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- ساده شده ی کسر  $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^4 \theta}$  کدام است؟

- (۱)  $8 \cos^{-2} 2\theta$   
(۲)  $8 \sin^{-2} 2\theta$   
(۳)  $16 \cos^{-4} 2\theta$   
(۴)  $16 \sin^{-4} 2\theta$

شما پاسخ نداده اید



ریاضی ، حسابان ، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

-۹۱

(بهره‌مندی)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \sin \alpha < 0$$

در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی سینوس منفی و کسینوس مثبت است.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۵ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۹۲

(کدام املایی)

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{و} \quad \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

داریم:

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5}$$

اگر فرض کنیم  $\tan x = t$  داریم:

$$\frac{2t + 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow 10t + 5 - 5t^2 = -1 - t^2$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 10t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 3 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۹۳

(سید عادل مرتضوی)

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9} \quad (*)$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 1 - \frac{128}{81} = \frac{-47}{81}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\tan^{-1}(\cot(\frac{-\pi}{7})) = \tan^{-1}(\tan(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7}))$$

$$= \tan^{-1}(\tan \frac{9\pi}{14}) = \frac{9\pi}{14} - \pi = \frac{-5\pi}{14} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \text{عبارت} = \frac{5\pi}{12} - \frac{5\pi}{14} = \frac{5\pi}{84}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۹۵

(میثم ممزله‌لویی)

ابتدا از رابطه  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  استفاده می‌کنیم:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow \text{معادله: } \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۳)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۶

(محمدرضا مصطفی ابراهیمی)

$$\frac{2 \cos 4^\circ - 1}{\sin 5^\circ} = \frac{2(\cos 4^\circ - \frac{1}{2})}{\sin 5^\circ} = \frac{2(\cos 4^\circ - \cos 6^\circ)}{\sin 5^\circ}$$

$$= \frac{2(-2 \sin 5^\circ \sin(-1^\circ))}{\sin 5^\circ} = 4 \sin 1^\circ$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

۹۷-

(حبیب شفیعی)

$$-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 1 \xrightarrow{x \neq -1} |x-1| \leq |x+1|$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 + 2 = 2$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

۹۸-

(محمدرضا شجاعی)

$$1 + \tan x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos x \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 2 \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)(2 \cos x - 1) = 0$$

۴

۳

۲ ✓

۱



(معمدرضا شوکتی بیرق)

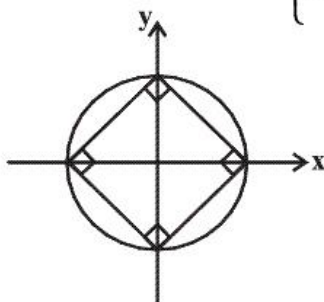
$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

با استفاده از اتحاد در دو طرف معادله، می‌توان نوشت:

$$-\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x) = -\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 3x) \Rightarrow \cos 3x = \cos x$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

با توجه به شکل زیر، مربع تشکیل می‌شود:



(مسایان- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۳۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

نکته: اگر  $a$  و  $k$  اعدادی غیر صفر باشند، آنگاه دوره‌ی تناوب توابع

$$y = k \cot(ax), y = k \tan(ax) \text{ برابر } \frac{\pi}{|a|} \text{ است.}$$

توجه داشته باشید که دوره‌ی تناوب توابع مثلثاتی تنها به ضریب داخل

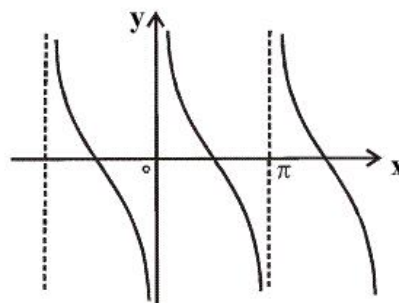
کمان تابع  $(a)$  بستگی دارد و هیچ ارتباطی به ضریب کل تابع  $(k)$

ندارد. با توجه به نکته‌ی فوق گزینه‌ی «۱» صحیح است.

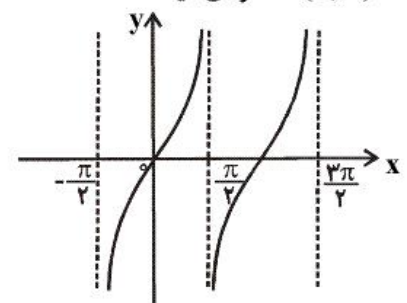
با توجه به نمودار تابع  $y = \cot x$ ، گزینه‌ی «۲» نیز صحیح است. با

توجه به نمودار تابع  $y = \tan x$ ، درمی‌یابیم که این تابع روی بازه‌ی

$(0, \pi)$  صعودی نیست.



$f(x) = \cot x$



$f(x) = \tan x$

گزینه‌ی «۴»، بیانگر رابطه‌ی صحیح زیر است:

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه‌ی ۲، - ۱۳۹۴۱۲۱۴

از رابطه‌ی طولی در دایره، می‌توانیم بنویسیم:

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

$$\Rightarrow 8(8 + 2x) = 9(9 + x + 2)$$

$$\Rightarrow 64 + 16x = 99 + 9x$$

$$\Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5$$

پس وتر بزرگ‌تر عبارت است از  $AA'$ . به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در

$$\text{مثلث } OAH \text{ داریم: } OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{2 \times 5}{2}\right)^2} = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow OH = 2\sqrt{6}$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۷۴ تا ۷۸)

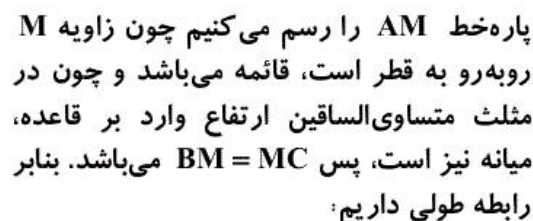
۴

۳ ✓

۲

۱

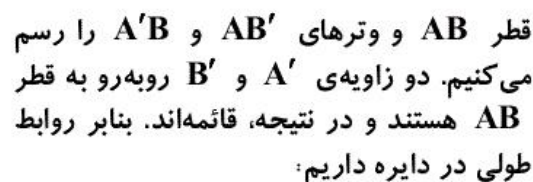
(محسن محمد کریم)



(V A U V P, 500000 - 200000)

1

(نوید مجیدی)



اکنون بنابر قضیه‌ی فیثاغورس در  $\triangle AB'B$  و  $\triangle AA'B$  می‌توانیم بنویسیم:

(V A U V P, 500000 - 200000)

1

(هنريک سرکيسان)

$$\Rightarrow 2d = 26 \Rightarrow d = 13$$

1

$$MN^2 = OO'^2 - (R + R')^2 = (7\sqrt{2})^2 - 7^2 = 98 - 49 = 49$$

MN بر دایره بزرگ مماس است بنا به رابطه‌ی طولی مماس و قاطع

$$MN^2 = ME.MF \Rightarrow 49 = ME.(ME + 8) \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow ME^2 + 8ME - 49 = 0 \Rightarrow ME = -4 \pm \frac{\sqrt{64 + 196}}{2} = -4 \pm \sqrt{65}$$

$$\xrightarrow{MN > 0} MN = -4 + \sqrt{65}$$

دورترین فاصله‌ی M تا نقطه‌ی دایره‌ی بزرگ = ME + EF

$$= -4 + \sqrt{65} + 8 = 4 + \sqrt{65}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۳ تا ۸۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۲۶

(محمد ابراهیم گیتی‌زاده)

تبدیل، نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است. به راحتی می‌توان نشان داد که نگاشت  $T(x, y) = (x + y, x)$ ، یک به یک است. به مثال نقض گزینه‌های دیگر توجه کنید:

$$T(0, 1) = T(1, 0) = (1, 1) \quad \text{گزینه (۱)}$$

$$T(1, 1) = T(1, -1) = (1, 0) \quad \text{گزینه (۲)}$$

$$T(1, 0) = T(0, 0) = (1, 0) \quad \text{گزینه (۳)}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۷

(نوید مفیدی)

پای میانه‌ی وارد از C بر ضلع مقابل (ضلع AB)، برابر است با نقطه‌ی

$$M = \left(\frac{6-2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (2, 4) \quad \text{در نتیجه:}$$

وقتی که تحت یک انتقال، نقطه‌ی  $C = (3, 1)$  به  $M = (2, 4)$  نگاشته

می‌شود، طول نقطه یک واحد کم می‌شود و به عرض آن ۳ واحد افزوده

می‌شود، ضابطه‌ی انتقال مورد نظر به صورت  $T(x, y) = (x - 1, y + 3)$

است. (هندسه ۲- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۸

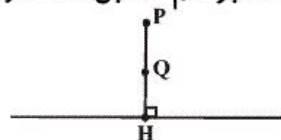
(امیر حسین ابومحبوب)

این نگاشت، یک به یک نیست زیرا مطابق شکل نقطه‌ی H، تصویر نقاط

P و Q است. این نگاشت ایزومتري نیست زیرا فاصله‌ی نقاط P و Q

در شکل، مقداری مثبت است ولی تصویر دو نقطه بر هم منطبق است و

فاصله‌ی بین تصویر آن‌ها برابر صفر است.



(هندسه ۲- مشابه تمرین ۸- صفحه‌ی ۹۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۹

(امیرعباس پیروز)

$$T(A) = A' \Rightarrow (ax + ay, ay - ax) = (x', y')$$

از آنجا که تبدیل ایزومتري فاصله‌ها را ثابت نگه می‌دارد، فاصله‌ی نقاط  $A$  و  $A'$  باید از مبدأ یکسان باشد، یعنی:

$$OA = OA' \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2(x+y)^2 + a^2(y-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2a^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2} |a| \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۳۰

(محمود مضمري)

تبدیل  $T$  یک انتقال است و انتقال، مقدار مساحت را تغییر نمی‌دهد و چون مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه و طول‌های اضلاع قائمه ۶ و ۴ می‌باشند،

(هنر سه ۲- مشابه تمرین ۹- صفحه‌ی ۹۶)

$$S_{\Delta} = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ پس}$$

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۴/۱۲/۱۴

-۱۴۱

(امیر حسین ابومحبوب)

اعضای رابطه‌ی  $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$  روی مجموعه‌ی  $Z$  عبارتند از:

$$R = \{(\circ, 5), (\circ, -5), (3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4),$$

$$, (4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3), (5, \circ), (-5, \circ)\}$$

در واقع گزینه‌ی «۴»، نقاط روی یک دایره (فقط با مختصات صحیح) را معرفی می‌کند که قطعاً تعداد آن محدود و متناهی است. در حالی که گزینه‌ی «۱»، نقاط درون یک سهمی، گزینه‌ی «۲»، نقاط روی یک سهمی و گزینه‌ی «۳»، نقاط خارج یک دایره (همگی با مختصات صحیح) را بیان می‌کنند که تعداد اعضای همگی آن‌ها نامتناهی است.

(پیرو احتمال - صفحه‌های ۶۰ تا ۶۵)

۴ ✓

۳

۲

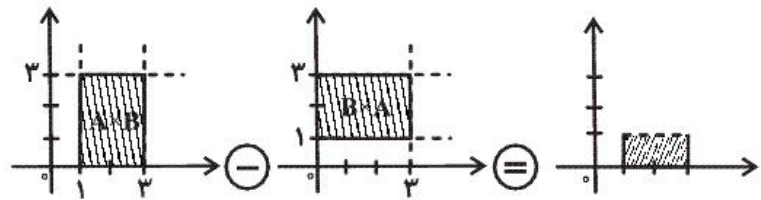
۱



۱۴۲-

(همیدگروسی)

ابتدا نمودار  $A \times B$  و سپس  $B \times A$  را رسم کرده و آن گاه  $B \times A$  را از  $A \times B$  حذف می‌کنیم.



(جهت احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۴۳-

(نوید مپیری)

در آغاز باید توجه کنیم که:  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  و  $B = \{5, 7, 11\}$   
حال از جبر مجموعه‌ها می‌توانیم به سادگی ثابت کنیم که  
پس  $A \cap B = \{5, 7\}$  از آن جا که  $|A^2 - B^2| = |A|^2 - |A \cap B|^2$   
 $|A^2 - B^2| = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$  خواهیم داشت:

$$\Rightarrow (A^2 - B^2) = 2|A^2 - B^2| = 2 \times 12$$

(جهت احتمال - مشابه تمرین ۳- بند (پ) - صفحه‌ی ۵۹)

۴

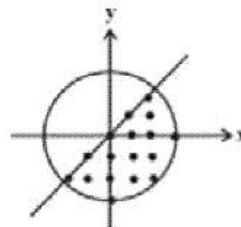
۳

۲

۱ ✓

۱۴۴-

(نوید مپیری)



نمودار  $T$ ، ناحیه‌ی پایین و روی خط  $y = x$  و نمودار  
 $S$ ، نقاط با مختصات صحیح روی محیط و درون  
یک دایره به شعاع ۳ و مرکز مبدأ مختصات است.  
۱۷ نقطه‌ی نمایش داده شده در شکل روبه‌رو،  
پاسخ سؤال هستند.

(جهت احتمال - صفحه‌های ۶۰ تا ۶۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۴۵-

(هنریک سرکیسیان)

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

پس در این سؤال نتیجه می‌گیریم  $A$  و  $B$  جدا از هم هستند، پس:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = A \cup B$$

$$B - A = B$$

$$\Rightarrow |(A \Delta B) \times (B - A)| = |(A \cup B) \times B| = |A \cup B| \times |B|$$

$$= (5 + 6) \times 6 = 66$$

(جهت احتمال - صفحه‌های ۵۶ تا ۶۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۴۶-

(سیدوید زوالفقاری)

کافی است تعداد افرازه‌های مجموعه‌ی  $\{1, 3, 4\}$  را یافته، سپس در هر مجموعه‌ای که ۱ موجود بوده، ۲ را نیز اضافه کنیم. با توجه به این‌که تعداد افرازه‌های یک مجموعه‌ی ۳ عضوی ۵ تا است، پس جواب برابر ۵ است.

$$B_1 = \{\{1, 3, 4\}\} \Rightarrow A_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$$

$$B_2 = \{\{\}, \{3, 4\}\} \Rightarrow A_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$B_3 = \{\{3\}, \{1, 4\}\} \Rightarrow A_3 = \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$$

$$B_4 = \{\{4\}, \{1, 3\}\} \Rightarrow A_4 = \{\{4\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$B_5 = \{\{\}, \{3\}, \{4\}\} \Rightarrow A_5 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

(پیرواختمال - صفحه‌های ۶۵ و ۶۶)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۴۷-

(رضا پورحسینی)

رابطه‌ی گزینه‌ی (۳) روی  $N^2$  خاصیت بازتابی ندارد، زیرا:

$$(a, b)R(a, b) \Rightarrow a + a = b + b \Rightarrow$$

$$2a = 2b \Rightarrow a = b$$

یعنی در صورتی بازتابی دارد که  $a = b$  باشد و برای همه‌ی اعداد طبیعی برقرار نیست پس هم‌ارزی نیست. (پیرواختمال - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۴۸-

(فرزاد پوادی)

می‌دانیم دسته‌ی هم‌ارزی  $[a]$  عبارت است از مجموعه‌ای که اعضای آن با  $a$  (که نماد کلاس می‌باشد)، رابطه‌ی  $R$  دارند. به زبان ریاضی داریم:

$$[a] = \{x : xRa\}$$

با توجه به رابطه‌ی  $R$ ، دسته‌ی هم‌ارزی  $[2]$  شامل عضوهایی از  $A$  خواهد بود که با ۲ رابطه دارند.

چون داخل  $R$ ، زوج‌مرتبه‌های  $(2, 2)$ ،  $(2, 4)$  و  $(4, 2)$  مشاهده می‌شوند، لذا می‌توان نتیجه گرفت که  $2R2$  و  $2R4$ . پس:

$$[2] = \{2, 4\}$$

یعنی  $[2]$  دارای ۲ عضو می‌باشد.

(پیرواختمال - صفحه‌های ۶۶ تا ۶۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۴۹

(فهرزاد هجادی)

$$x^6 - 1 = 0 \Rightarrow (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^6 - 1 = 0\} \Rightarrow A = \{-1, 1\}$$

رابطه‌ی «بخش‌پذیری» روی مجموعه‌ی  $A = \{-1, 1\}$  به صورت  $R = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$  می‌باشد که دارای هر سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی می‌باشد.

(پیروا امتال - صفحه‌های ۶۰ و ۶۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۵۰

(معصومه گرابی)

به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه‌ی  $R$  یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی  $A^2$  است.

$$[(a, b)] = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y)R(a, b)\}$$

$$= \{(x, y) \in A^2 \mid x + b = y + a\}$$

$$= \{(x, y) \in A^2 \mid x - y = a - b\}$$

از آن‌جا که  $a, b \in A$ ، پس مقادیر برای  $a - b$  عبارتند از ۳، ۲، ۱، ۰، -۱، -۲، -۳ و بنابراین تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر ۷ است.

(پیروا امتال - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۴ ✓

۳

۲

۱

ریاضی، حسابان-سوال‌های موازی، - ۱۳۹۴/۱۲/۱۴

-۱۱۱

(بهرام طالبی)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha < 0 \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \sin \alpha < 0$$

در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی، سینوس منفی و کسینوس مثبت است.

(حسابان - صفحه‌های ۱۰۴، ۱۰۵ و ۱۱۰ تا ۱۱۲)

۴ ✓

۳

۲

۱



-۱۱۲

(کتابم املایی)

به کمک اتحادهای  $\cos^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  و  $\sin^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

داریم:  $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5}$

اگر فرض کنیم  $\tan x = t$  داریم:

$$\frac{2t + 1 - t^2}{1 + t^2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow 10t + 5 - 5t^2 = -1 - t^2$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 10t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ \text{یا} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 3 \\ \text{یا} \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(مسئله‌های ۱۰۴ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۱۳

(سیر عاقل مرتضوی)

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9} \quad (*)$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81}$$

(مسئله‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا از رابطه‌ی  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  ، استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{1}{\sin 1^\circ} + 8 \left( \frac{1 - \cos 2^\circ}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sin 1^\circ} + 4(1 - \cos 2^\circ) = \frac{1}{\sin 1^\circ} + 4 - 4 \cos 2^\circ$$

حال مخرج مشترک می‌گیریم:

$$= \frac{1 + 4 \sin 1^\circ - 4 \sin 1^\circ \cos 2^\circ}{\sin 1^\circ}$$

$$= \frac{1 + 4 \sin 1^\circ - 4 \left( \frac{1}{2} [\sin(1^\circ + 2^\circ) + \sin(1^\circ - 2^\circ)] \right)}{\sin 1^\circ}$$

$$= \frac{1 + 4 \sin 1^\circ - 2(\sin 3^\circ) - 2 \sin(-1^\circ)}{\sin 1^\circ}$$

$$= \frac{1 + 4 \sin 1^\circ - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{6 \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = 6$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۱۵

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

مقدار تابع در  $x=0$  برابر ۲ است. یعنی  $y(0)=2$  می باشد، پس

$$\frac{15}{4} - \frac{3}{4} = 3 \quad \text{با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر}$$

$$a=2 \quad \text{است. با توجه به ضابطه‌ی تابع، دوره تناوب آن برابر} \quad T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \quad \text{است.}$$

پس این دو مقدار را برابر می گذاریم:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 3 \Rightarrow \frac{2}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، مقدار تابع در  $x = \frac{3}{4}$  کم تر از ۲ است. یعنی باید

$$y\left(\frac{3}{4}\right) < 2 \quad \text{باشد. اگر } b = -\frac{2}{3} \quad \text{باشد، } y\left(\frac{3}{4}\right) = 1 \quad \text{و اگر } b = \frac{2}{3} \quad \text{باشد،}$$

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \quad \text{به دست می آید. پس } b = -\frac{2}{3} \quad \text{است.}$$

$$2a + 3b = 2(2) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 - 2 = 2$$

(مسایان- صفحه های ۱۰۳ و ۱۰۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۱۶

(عباس امیدوار)

می دانیم:

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

پس:

$$\cos 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ \sin 10^\circ = \cos(40^\circ - 10^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(مسایان- صفحه های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۱۷

(میثم حمزه لوتی)

$$\text{از آن جا که } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{خواهیم داشت:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi - 3\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{-2\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(مسایان- صفحه های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۱۸-

(میثم همزه لونی)

با توجه به این که  $\sin^2 10^\circ = 1 - \cos^2 10^\circ$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ (4(1 - \cos^2 10^\circ) - 1) &= \cos 10^\circ (4 - 4\cos^2 10^\circ - 1) \\ &= \cos 10^\circ (3 - 4\cos^2 10^\circ) = 3\cos 10^\circ - 4\cos^3 10^\circ \end{aligned}$$

در نهایت با کمک رابطه‌ی  $\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$  داریم:

$$-(4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ) = -\cos^3(10^\circ) = -\cos^3 0^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۱۹-

(مهمدرضا شوکتی بیرق)

می‌دانیم  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  و  $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ ،  $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

$$\frac{\sin 10^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ}$$

پس:

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{4}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

۱۲۰-

(نمره هار هائی)

از آن جا که  $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$  ، بنابراین داریم :

$$\tan x - \cot x = -(\cot x - \tan x) = -2 \cot 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cot 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \tan 2x = -4$$

حال برای محاسبه ی  $\cot(4x + \frac{\pi}{4})$  ابتدا  $\tan(4x + \frac{\pi}{4})$  را می یابیم ، سپس آن را معکوس می کنیم :

$$\tan(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan 4x + 1}{1 - \tan 4x} \quad (*)$$

پس به مقدار  $\tan 4x$  احتیاج داریم . با توجه به این که  $\tan 2x = -4$  است ، حاصل  $\tan 4x$  را می یابیم :

$$\tan 4x = \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2(-4)}{1 - (-4)^2} = \frac{-8}{-15} = \frac{8}{15}$$

در نتیجه با توجه به (\*) داریم :

$$\tan(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\frac{8}{15} + 1}{1 - \frac{8}{15}} = \frac{\frac{8+15}{15}}{\frac{15-8}{15}} = \frac{23}{7} \Rightarrow \cot(4x + \frac{\pi}{4}) = \frac{7}{23}$$

(مسئله بان - صفحه های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

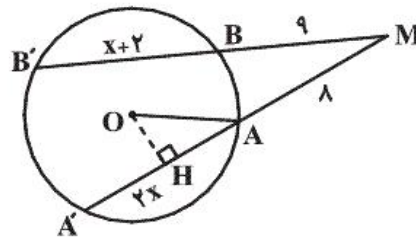
۲

۱ ✓

-۱۳۱

(نویس میبری)

از رابطه ی طولی در دایره، می توانیم بنویسیم:



$$\begin{aligned} MA \cdot MA' &= MB \cdot MB' \\ \Rightarrow 8(8+2x) &= 9(9+x+2) \\ \Rightarrow 64+16x &= 99+9x \\ \Rightarrow 7x &= 35 \Rightarrow x=5 \end{aligned}$$

پس وتر بزرگ تر عبارت است از  $AA'$ . به کمک قضیه ی فیثاغورس در

مثلث OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{2 \times 5}{2}\right)^2} = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow OH = 2\sqrt{6}$$

(هنر سه ۲- صفحه های ۷۳ تا ۷۸)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۳۲

(مفسر ممبر کریمی)

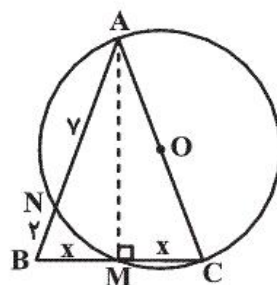
پاره خط AM را رسم می کنیم چون زاویه M

روبه رو به قطر است، قائمه می باشد و چون در

مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده،

میانه نیز است، پس  $BM = MC$  می باشد.

بنابر رابطه طولی داریم:



$$x \times (2x) = 2 \times 9 \Rightarrow x=3 \Rightarrow BC=6$$

(هنر سه ۲- صفحه های ۷۳ تا ۷۸)

۴

۳✓

۲

۱

$$\begin{cases} AB^2 = AB'^2 + BB'^2 = AB'^2 + 121 \\ AB^2 = BA'^2 + AA'^2 = BA'^2 + 100 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{کم می کنیم}]{\text{رابطه ها را از هم}} BA'^2 - AB'^2 = 21$$

(هنر سه ۲- صفحه های ۷۳ تا ۷۸)

۴

۳

۲✓

۱

اگر شعاع دو دایره  $R$  و  $r$  و طول خط‌المركزین  $d$  باشد، اندازه‌ی مماس مشترک خارجی برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$$

$$d - 1 = \sqrt{d^2 - (9 - 4)^2} \quad \text{در این سؤال داریم:}$$

$$(d - 1)^2 = d^2 - 25 \Rightarrow d^2 - 2d + 1 = d^2 - 25$$

$$\Rightarrow 2d = 26 \Rightarrow d = 13$$

چون  $d = R + r$  پس دو دایره مماس برون‌اند.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۴

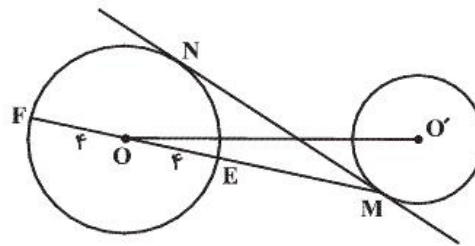
۳

۲ ✓

۱

-۱۳۵

(معمراطهر شعاعی)



بنا به فرض  $R = 4$ ،  $R' = 3$

و  $OO' = 7\sqrt{2}$ . طول مماس

مشترک داخلی دو دایره برابر

است با:

$$MN^2 = OO'^2 - (R + R')^2 = (7\sqrt{2})^2 - 7^2 = 98 - 49 = 49$$

MN بر دایره بزرگ مماس است بنا به رابطه‌ی طولی مماس و قاطع

$$MN^2 = ME \cdot MF \Rightarrow 49 = ME \cdot (ME + 8) \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow ME^2 + 8ME - 49 = 0$$

$$\Rightarrow ME = -4 \pm \frac{\sqrt{64 + 196}}{2} = -4 \pm \sqrt{65}$$

$$\xrightarrow{MN > 0} MN = -4 + \sqrt{65}$$

$ME + EF$  = دورترین فاصله‌ی M تا نقطه‌ی دایره‌ی بزرگ

$$= -4 + \sqrt{65} + 8 = 4 + \sqrt{65}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۸۲)

۴

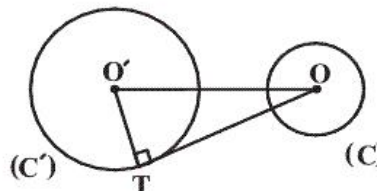
۳

۲✓

۱

(رضا پورعسینی)

-۱۳۶



$$OO'^2 = O'T^2 + OT^2$$

$$OO'^2 = 4R^2 + 12R^2 = 16R^2$$

$$\Rightarrow OO' = 4R$$

$$\text{مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (2R + R)^2} = \sqrt{16R^2 - 9R^2}$$

$$= \sqrt{7R^2} = R\sqrt{7}$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۸۰ تا ۸۲)

۴

۳

۲✓

۱



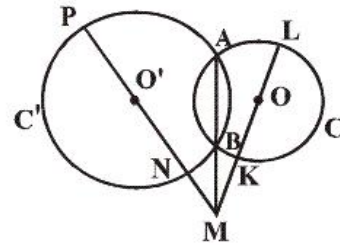
(امیر حسین ابومصوب)

اگر خط  $MO'$ ، دایره‌ی  $C'$  را در نقاط  $N$  و  $P$  قطع کند. طبق روابط طولی در دایره‌ی  $C'$  داریم:

$$MA.MB = MN.MP$$

$$= (MO' - R')(MO' + R')$$

$$= (6 - 5)(6 + 5) = 11$$



حال اگر خط  $MO$ ، دایره‌ی  $C$  را در نقاط  $K$  و  $L$  قطع کند، طبق روابط طولی در دایره‌ی  $C$  داریم:

$$MA.MB = MK.ML = (MO - R)(MO + R)$$

$$\Rightarrow 11 = MO^2 - 16 \Rightarrow MO^2 = 27 \Rightarrow MO = 3\sqrt{3}$$

(هنر سه‌ی ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۸)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\Rightarrow 2CM^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$AM^2 = AB^2 - MB^2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow AM = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$S_{(ABC)} = \frac{1}{2} AM.BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

(هنر سه‌ی ۲- صفحه‌های ۷۴ تا ۷۸)

☐ ۴

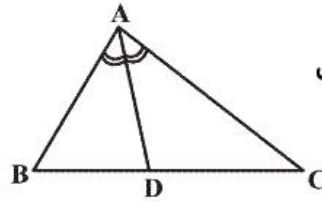
☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

۱۳۹-

(حسین فانیلو)



طبق تمرین ۳ صفحه ۷۸ کتاب درسی

می‌توان در شکل مقابل گفت:

$$AD^2 = AB.AC - BD.CD$$

از آن جا که همواره  $BD.CD > 0$ ، پس:

$$AD^2 < AB.AC$$

یعنی فرض مطرح شده همواره درست است و به حاده یا منفرجه بودن

زاویه بستگی ندارد.

(هندسه ۲- مشابه تمرین ۳ (ب)- صفحه ۷۸)

۴

۳

۲

۱ ✓

۱۴۰-

(مهمرب طاهر شعاعی)

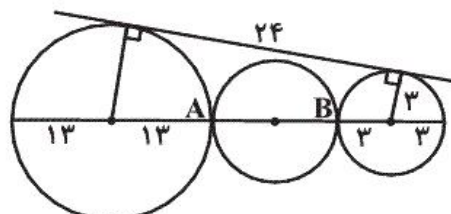
طول خط‌المرکزین دو دایره را  $d$  می‌نامیم، داریم:

$$24^2 = d^2 - (13 - 3)^2 \Rightarrow d^2 = 24^2 + 10^2 = 26^2$$

$$\Rightarrow d = 26 > 13 + 3$$

پس دو دایره برون هم‌اند و مطابق شکل، دایره‌ای به قطر  $AB$

کوچک‌ترین دایره‌ای است که بر هر دو دایره مماس است.



$$AB = 26 - 13 - 3 = 10 \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \pi \times 5^2 = 25\pi$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۷۹ تا ۸۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۸۱

(سراسری ریاضی- ۹۱)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta$$

می‌دانیم:

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(2\pi + \pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

پس کسر داده شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} \end{aligned}$$

از آنجا که مسأله مقدار  $\tan \theta$  را داده، با کمک رابطی

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{0.2} = 5$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

(حسابان- صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

$$A = \frac{(\cos \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \alpha \sin \beta)^2}{(\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\cos \alpha \sin \beta)^2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج، خواهیم داشت:

$$A = \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}$$

با استفاده از روابط مجموع و تفاضل دو کمان برای کسینوس و سینوس، خواهیم داشت:

$$A = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)} = \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta)$$

باید  $\cot(\alpha + \beta)$  و  $\cot(\alpha - \beta)$  را بیابیم، چون:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot \frac{3\pi}{4} = -1 \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

پس:

$$A = \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta) = (-1) \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

(مسئله‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5a - \sin 3a}{\cos 5a - \cos 3a} &= \frac{2 \sin \frac{5a - 3a}{2} \cos \frac{5a + 3a}{2}}{-2 \sin \frac{5a + 3a}{2} \sin \frac{5a - 3a}{2}} \\ &= \frac{2 \sin a \cos 4a}{-2 \sin 4a \sin a} = -\cot 4a \end{aligned}$$

به ازای  $a = 75^\circ$ ، مقدار  $-\cot 4a$  را می‌یابیم:

$$= -\cot 300^\circ = -\sqrt{3}$$

(مسئله‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری ریاضی - ۸۹)

$$\begin{aligned}\cot 100^\circ &= \cot(90^\circ + 10^\circ) = -\tan 10^\circ \\ &= (\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ - \cot 100^\circ) \\ &= (\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)\end{aligned}$$

با استفاده از دستور تبدیل جمع به ضرب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \quad \text{نکته} \\ &= -2 \sin\left(\frac{10^\circ + 70^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{10^\circ - 70^\circ}{2}\right) \times \frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} \\ &= -2 \times \sin 40^\circ \times \frac{-1}{2} \times \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ \sin 80^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ\end{aligned}$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سراسری تهرانی خارج از کشور - ۸۷)

از آنجایی که  $\cos(\pi + x) = -\cos x$  و  $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$  و  $\sin(3\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$  لذا در معادله، خواهیم داشت:

$$\cos 3x \sin x + \sin 3x \cos x = 0$$

با استفاده از  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ ، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \sin(x + 3x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

با استفاده از فرمول تبدیل ضرب به جمع در سمت چپ تساوی، خواهیم

$$\frac{1}{2}(\cos(\Delta x + 3x) + \cos(\Delta x - 3x)) = \cos^2 x \quad \text{داشت:}$$

اما  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ، پس:

$$\cos \Delta x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos^2 x \Rightarrow \cos \Delta x = 1$$

$$\Rightarrow \Delta x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

۸۷-

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۳)

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

۸۸-

(سراسری ریاضی - ۹۰)

در صورت کسر با استفاده از فرمول‌های تبدیل ضرب به جمع، خواهیم داشت:

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) + \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 2x)}{\cos 2x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x)}{\cos 2x} = 1$$

حال در صورت کسر با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(2 \cos 6x \cos 2x)}{\cos 2x} = 1 \Rightarrow \frac{\cos 6x \cos 2x}{\cos 2x} = 1$$

اما با شرط  $\cos 2x \neq 0$ ، خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \cos 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

ابتدا توجه کنید که:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1$$

$$= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x$$

بنابراین معادله‌ی مفروض سؤال را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$-\cos 2x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow -\cos 2x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۲۳)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

$$\Rightarrow \frac{(1 + \tan x)^2 - (1 - \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۲۳)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(2\pi + \pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

پس کسر داده شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} \end{aligned}$$

از آنجا که مسأله مقدار  $\tan \theta$  را داده، با کمک رابطه‌ی

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{خواهیم داشت:} \quad \cot \theta = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\cot \theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 2$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۰)

۴ ✓

۳

۲

۱

$$A = \frac{(\cos \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \alpha \sin \beta)^2}{(\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\cos \alpha \sin \beta)^2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج، خواهیم داشت:

$$A = \frac{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)}{(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)}$$

با استفاده از روابط مجموع و تفاضل دو کمان برای کسینوس و سینوس، خواهیم داشت:

$$A = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)} = \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta)$$

باید  $\cot(\alpha + \beta)$  و  $\cot(\alpha - \beta)$  را بیابیم، چون:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 135^\circ \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot \frac{3\pi}{4} = -1 \\ \tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$A = \cot(\alpha + \beta) \cot(\alpha - \beta) = (-1) \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \quad \text{پس:}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱



$$= \frac{\cancel{2} \sin a \cos \cancel{4} a}{-\cancel{2} \sin \cancel{4} a \sin a} = -\cot \cancel{4} a$$

به ازای  $a = 7/5^\circ$ ، مقدار  $-\cot \cancel{4} a$  را می‌یابیم:

$$-\cot \cancel{4} a = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(سراسری ریاضی - ۸۹)

-۱۰۴

$$\cot 100^\circ = \cot(90^\circ + 10^\circ) = -\tan 10^\circ$$

$$= (\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ - \cot 100^\circ)$$

$$= (\cos 10^\circ - \cos 70^\circ)(\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$$

با استفاده از رابطه‌ی تبدیل جمع به ضرب و با استفاده از رابطه‌ی

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

خواهیم داشت:

$$= -2 \sin\left(\frac{10^\circ + 70^\circ}{2}\right) \sin\left(\frac{10^\circ - 70^\circ}{2}\right) \times \frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= -2 \times \sin 40^\circ \times \frac{-1}{2} \times \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۸)

-۱۰۵

باید  $\tan \alpha$  را بیابیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

پس:

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۶

(سراسری ریاضی - ۸۶)

با استفاده از رابطه‌ی تبدیل ضرب به جمع و اتحاد  $\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos 2^\circ \cos 4^\circ = \frac{1}{2}(\cos 6^\circ + \cos 2^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2^\circ \\ \cos^2 8^\circ = \frac{1}{2}(1 + \cos 16^\circ) = \frac{1}{2}(1 + \cos(18^\circ - 2^\circ)) \\ \quad = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 2^\circ \cos 4^\circ + \cos^2 8^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2^\circ\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2^\circ\right) = \frac{3}{4}$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۰۷

(سراسری ریاضی فارج از کشور - ۸۵)

$$4 \cos 4^\circ - \frac{1}{\cos 2^\circ} = \frac{4 \cos 4^\circ \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ}$$

$$= \frac{2(2 \cos 4^\circ \cos 2^\circ) - 1}{\cos 2^\circ}$$

با استفاده از دستور تبدیل ضرب به جمع، خواهیم داشت:

$$= \frac{2(\cos(4^\circ + 2^\circ) + \cos(4^\circ - 2^\circ)) - 1}{\cos 2^\circ}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2} + \cos 2^\circ\right) - 1}{\cos 2^\circ} = \frac{1 + 2 \cos 2^\circ - 1}{\cos 2^\circ} = 2$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۰۸-

(سراسری تهری - ۸۸)

می‌دانیم  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$  ، پس :

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = -\cos x$$

همچنین :

در نتیجه :

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow (-\sqrt{3})(-\cos x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\xrightarrow{\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}} \cos 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

(مسئله - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

۱۰۹-

(آزاد ریاضی عصر - ۸۱)

با استفاده از اتحادهای  $1 + \sin^2 u = (\sin u + \cos u)^2$  و

$1 - \cos^2 u = 2\sin^2 u$  ، خواهیم داشت :

$$\sin x \cos x - \sin^2 x = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x + \cos 2x = -1$$

حال با استفاده از اتحاد  $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$  ، داریم :

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(مسئله - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

در صورت از روابط  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  و  $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$  و

در مخرج از رابطه‌ی  $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$  استفاده می‌کنیم:

$$\text{عبارت} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}}{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} = \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^4}$$

حال از رابطه‌ی  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$  داریم:

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^4} = \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴ ✓

۳

۲

۱