



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)



۱۴۱- مکان هندسی نقطه‌هایی در فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله و از خط Δ به فاصله‌ی d باشند، کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) سطح یک دایره
(۲) سطح یک کره
(۳) سطح جانبی یک استوانه‌ی نامتناهی
(۴) دو خط موازی

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- با توجه به شکل‌های زیر، تعداد کوچک‌ترین نیم‌دایره‌ها در مرحله‌ی هشتم کدام است؟



- (۱) ۵۱۱ (۲) ۲۵۵ (۳) ۲۵۶ (۴) ۱۲۸

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- نقطه‌ی T را در صفحه‌ی مثلث ABC در نظر بگیرید. اگر سه مثلث TAB ، TAC و TBC مساحت برابر داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی T را می‌گویند:

- (۱) محل تلاقی میان‌های ΔABC است.
(۲) محل تلاقی ارتفاع‌های ΔABC است.
(۳) محل تلاقی عمودمنصف‌های ΔABC است.
(۴) محل تلاقی نیم‌سازهای ΔABC است.

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- در مثلث ABC ، طول ضلع AB مساوی ۴ و طول میانه‌ی AM برابر ۵ است. حدود تغییرات طول ضلع AC کدام است؟

- (۱) $۵ < AC < ۹$ (۲) $۶ < AC < ۱۴$
(۳) $۸ < AC < ۱۲$ (۴) $۷ < AC < ۱۶$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلثی روی یکی از اضلاع آن قرار دارد. اگر فاصله‌ی این نقطه تا دو ضلع دیگر ۹ و ۱۲ باشد، فاصله‌ی محل هم‌رسی میانه‌های این مثلث تا وسط ضلع بزرگ‌تر آن کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) $۷/۵$ (۴) $۲/۵$

شما پاسخ نداده اید

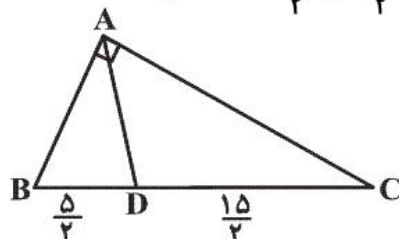
۱۴۶- با مفروضات $\hat{B} = 60^\circ$ و اضلاع $AB = 6 \text{ cm}$ و $AC = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ ، چند مثلث غیرهمنهشت ABC ، قابل رسم است؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- در مثلث قائم الزاویه ی زیر، نیمساز وارد بر وتر، روی وتر قطعاتی به طول $\frac{15}{2}$ و $\frac{5}{2}$ ایجاد می کند. مساحت

مثلث ABC کدام است؟



- (۱) $12/5$ (۲) ۱۵ (۳) ۳۰ (۴) ۲۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$)، ارتفاع وارد بر ساق، آن را به نسبت ۳ به ۲ تقسیم می کند ($2AH = 3HC$). اگر پاره خط EH موازی BC رسم شود، مجموع فواصل نقطه ی دل خواه N روی EH تا دو ساق مثلث چه کسری از ساق مثلث است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{3}{15}$ (۳) $\frac{12}{5}$ (۴) $\frac{12}{25}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدبی به غیر از یکی از زوایا، برابر 840° درجه است. تعداد قطرهای این n ضلعی محدب کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- مساحت شکل حاصل از برخورد نیمسازهای خارجی یک مستطیل، چهار برابر مساحت شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی آن است. طول این مستطیل، چند برابر عرض آن است؟

- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۸۱- اگر هر کالا ۱۰۰ تومان فروخته و سود حاصل برای فروش x کالا برحسب تومان از تابع

$$P(x) = 100x - 2100 + x^2$$
 محاسبه شود، هزینه تقریبی تولید یازدهمین کالا چند تومان است؟

(۱) ۷۰ (۲) ۳۰

(۳) ۱۱۰ (۴) ۱۳۰

شما پاسخ نداده اید

۸۲- تابع $f(x) = (2x-1)\operatorname{sgn} x$ در $x = \frac{1}{2}$ چه وضعیتی دارد؟ (sgn ، تابع علامت است).

(۱) پیوسته و مشتق پذیر است. (۲) بازگشت پذیر است.

(۳) زاویه دار است. (۴) ناپیوسته است.

شما پاسخ نداده اید

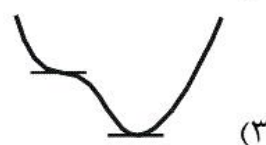
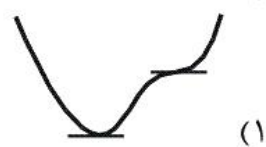
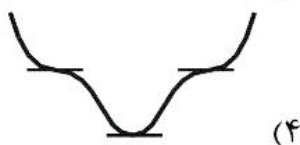
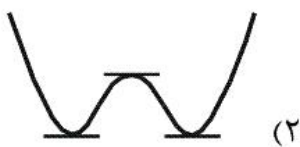
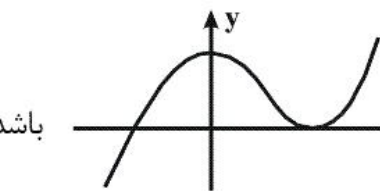
۸۳- خط $y = 3x + a$ بر منحنی $f(x) = bx^2 + x + c$ در نقطه‌ی $A(1,2)$ مماس است. مقدار $a + b - c$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱

(۳) -۲ (۴) ۲

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اگر نمودار مشتق تابع پیوسته‌ی f به صورت x باشد، در این صورت نمودار f کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۸۵- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , |x| \leq 1 \\ x + |x| & , |x| > 1 \end{cases}$ روی R مشتق پذیر باشد، حاصل $2a + b + 4c$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

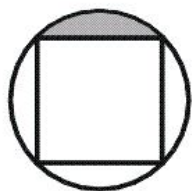
۸۶- $f(x) = |ax^3 + 3x - a - 3|$ در $x = 1$ مشتق پذیر است. a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- آهنگ تغییر لحظه‌ای مساحت قسمت هاشورخورده نسبت به طول ضلع مربع، زمانی که محیط دایره برابر $4\sqrt{2}\pi$ باشد، چند برابر $(\pi - 2)$ است؟



(۲) $\sqrt{2}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس راست و چپ بر منحنی تابع $f(x) = \frac{|\sin x| \cos x}{1 - \cos x}$ در نقطه‌ای به طول $x = \pi$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{4}$

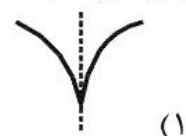
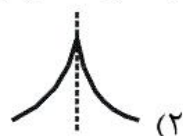
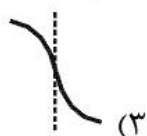
(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{4}{3}$

(۱) $\frac{3}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- نمودار تابع $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ در همسایگی $x = -1$ ، کدام است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۰- نقطه‌ی مشتق ناپذیری تابع $y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1}$ در کدام بازه‌ی زیر قرار دارد؟

(۴) $(-2, -1)$

(۳) $(1, 2)$

(۲) $(-1, 0)$

(۱) $(0, 1)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، هندسه‌ی تحلیلی، - ۱۳۹۴۱۱۲۳

۱۱۱- کم‌ترین فاصله‌ی مرکز مقطع مخروطی به معادله‌ی $-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$ ، از نقاط واقع بر محیط آن کدام است؟

(۴) ۶

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- در هذلولی به معادله‌ی $12x^2 - 2y^2 = 3$ ، درکانون خطی بر محور کانونی عمود می‌کنیم تا هذلولی را در نقاط M و N قطع نماید. اندازه‌ی MN کدام است؟

(۲) ۶

(۱) ۴

(۴) ۱۲

(۳) ۸

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- اگر محورهای مختصات را حول مبدأ به اندازه ی مناسب دوران دهیم تا سهمی $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4y = 1$

استاندارد شود، رأس سهمی به نقطه ی $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-5\sqrt{2}}{2}\right)$ منتقل می شود. رأس سهمی قبل از دوران، کدام

نقطه بوده است؟

- (۱) $(1, -4)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(-1, -4)$ (۴) $(1, 4)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- مختصات یکی از رئوس هذلولی با کانون‌های $F(3, 1)$ و $F'(0, 1)$ و گذرنده از نقطه ی $P(0, 5)$ کدام است؟

- (۱) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (۲) $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$
(۳) $(1, 1)$ (۴) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- دو خط به معادلات $y = \pm\sqrt{3}x$ ، مجانب‌های یک هذلولی افقی هستند. اگر فاصله ی یک کانون از رأس

نزدیک به آن برابر ۲ باشد، معادله ی این هذلولی کدام است؟

- (۱) $3x^2 - 2y^2 = 9$ (۲) $2x^2 - 3y^2 = 9$
(۳) $x^2 - 3y^2 = 12$ (۴) $3x^2 - y^2 = 12$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- اندازه ی کوچک‌ترین قطر بیضی به معادله ی $x^2 + y^2 - xy + x + y = 2$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲
(۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- به ازای کدام مقدار m ، معادله ی $x^2 - y^2 + 2x - 4y + m = 0$ ، معادله ی یک هذلولی نیست؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۱۸- اگر $F = (-2, 3)$ و $F' = (8, 3)$ ، کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز $\frac{5}{3}$ باشند، این هذلولی:

(۱) محورهای مختصات را در ۴ نقطه قطع می‌کند.

(۲) محورهای مختصات را در دو نقطه قطع می‌کند و در یک نقطه، بر محورهای مختصات، مماس است.

(۳) محورهای مختصات را قطع نمی‌کند.

(۴) در دو نقطه بر محورهای مختصات، مماس است.

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- نوع مقطع مخروطی $y = x \pm \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

(۱) نقطه (۲) تهی

(۳) بیضی (۴) هذلولی

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- فاصله‌ی کانونی مقطع مخروطی $xy - 3x + 2y - 16 = 0$ کدام است؟

(۱) $4\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{10}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، - ۱۳۹۴۱۱۲۳

۱۲۱- اگر یک رابطه‌ی همنهشتی، Z را به ۸ کلاس هم‌ارزی افراز کند و $\overline{5a}$ و $\overline{3a+b}$ و $4a-2$ همگی در یک

کلاس قرار داشته باشند، در این صورت چند مقدار دو رقمی برای b وجود خواهد داشت؟

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- باقیمانده‌ی تقسیم 13^{27} بر ۱۷ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۳- باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $4^{3k+3} + 3^{6k+3}$ بر عدد ۱۳ برابر است با: ($k \geq 0$)

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) ۰
(۴) ۰ یا ۲

شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- رقم دهگان کوچکترین عدد چهار رقمی که مضرب ۹ بوده و باقیمانده تقسیم آن بر دو عدد ۵ و ۷ برابر ۲ است، کدام می باشد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- اگر $a \equiv 13 \pmod{54}$ و $a \equiv 3 \pmod{28}$ ، آنگاه باقیمانده تقسیم $2a + 10$ بر ۳۶ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۳۱
(۳) ۲۶
(۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- اگر باقی مانده $3x + 2$ بر ۵، برابر ۳ شود، باقی مانده $4x + 3$ بر ۱۰ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- اگر $a \equiv 3 \pmod{10}$ و $b \equiv 2 \pmod{5}$ ، که b عددی فرد است، آنگاه رقم یکان عدد $a^{17} + b^{23}$ کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۵
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۶

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- اگر باقی مانده‌های تقسیم دو عدد چهار رقمی $\overline{3m2n}$ و $\overline{n2m3}$ بر ۱۱ برابر باشد، باقیمانده‌ی تقسیم عدد $m + n$ بر ۱۱، کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۸
(۳) ۵
(۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- اگر معادله‌ی $15x - 12y = 2a - 1$ در مجموعه‌ی Z دارای جواب باشد، آن گاه a کدام است؟ ($a \in Z$)

(۲) $5k + 2$

(۱) $3k + 2$

(۴) $5k + 1$

(۳) $3k + 1$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در معادله‌ی سیاله‌ی خطی $9x + 13y = 7$ ، مقدار y به کدام دسته هم‌ارزی تعلق دارد؟ ($x, y \in Z$)

(۲) $[5]_9$

(۱) $[4]_9$

(۴) $[6]_9$

(۳) $[3]_9$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، - ۱۳۹۴۱۱۲۳

۹۱- اگر $A = \{1, 2, 3, -1, -2\}$ و تابع f روی A به صورت $f = \{(x, 2x - 1) | x \in A\}$ تعریف شده باشد، $f + f^{-1}$ چند عضو دارد؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

شما پاسخ نداده اید

۹۲- تابع f یک به یک بوده و نمودار آن محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. اگر $g(x) = 2f^{-1}(5 - x) + 3$ ، آنگاه $g^{-1}(3)$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۳

(۲) ۳

(۱) -۲

شما پاسخ نداده اید

۹۳- حاصل $\sin^{-1}(\cos x \sin x)$ به ازای $x = \frac{13\pi}{12}$ کدام است؟

(۴) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{15}}{4}$

(۳) $\cos^{-1} \frac{3}{4}$

(۲) $\sin^{-1} \frac{3}{4}$

(۱) $\sin^{-1} \frac{\sqrt{15}}{4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۴- اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد، ضابطه‌ی معکوس تابع $g(x) = 2 - f\left(\frac{1}{x}\right)$ در دامنه‌ی تعریف آن، کدام است؟

(۴) $\frac{1}{f^{-1}(-2-x)}$

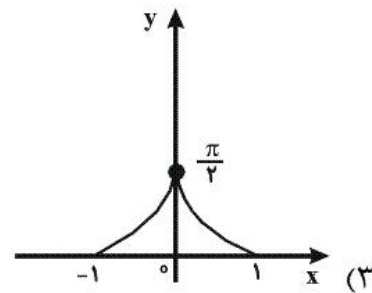
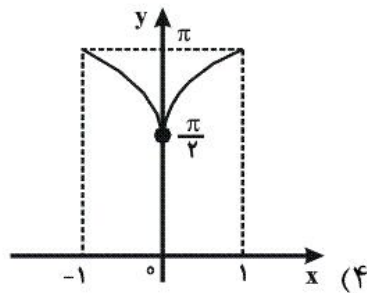
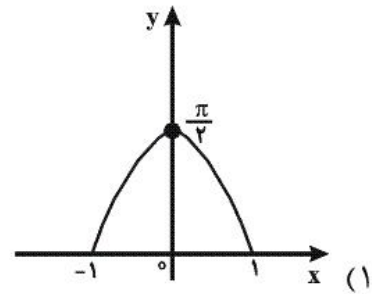
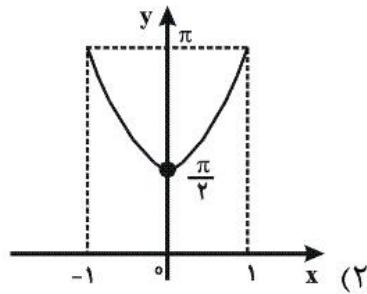
(۳) $\frac{1}{f^{-1}(2-x)}$

(۲) $\frac{1}{f^{-1}(x-2)}$

(۱) $\frac{1}{f^{-1}(2+x)}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- نمودار تابع $f(x) = \cos^{-1}(-|x|)$ به کدام صورت زیر است؟



شما پاسخ نداده اید

۹۶- به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+a & x < 1 \\ 3x+1 & x \geq 1 \end{cases}$ می تواند یک به یک باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۹۷- به ازای چند مقدار m در تابع $f(x) = \frac{3m^2x-1}{(6m+3)x-3}$ ، نمودارهای f و f^{-1} بر هم منطبق می شوند؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) بی شمار

شما پاسخ نداده اید

۹۸- اگر $x < -2$ و $f(x) = x^2 + 4x$ ، ضابطه ی $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+4}$ (۲) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$
(۳) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ (۴) $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x+4}$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- اگر $f = \{(0,1), (2,a), (b,-3), (4,5)\}$ و $f \circ f^{-1} = \{(1,m), (3,3), (n,n), (k^2+4,p)\}$ باشند، مقادیر $a+m+n+p+k$ کدام است؟

- (۱) ۵ یا ۷ (۲) ۵ یا ۳ (۳) ۳ یا ۷ (۴) ۳ یا ۵ یا ۷

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- چه تعداد از توابع زیر یک به یک می‌باشند؟

(ب) $f(x) = 2 + |x|$

(الف) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(د) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

(ج) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۱- تابع $f(x) = x^2 - 7x - 8$ با کدام دامنه یک به یک است؟

(۴) $(0, +\infty)$

(۳) $(-3, -1)$

(۲) $(-2, 4)$

(۱) $(-1, 6)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۲- دامنه و برد تابع $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right)$ کدام است؟

(۲) $D_f = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty), R_f = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

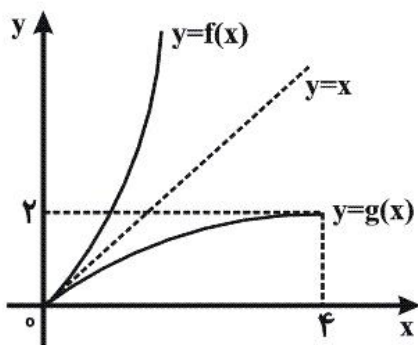
(۱) $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, R_f = \{\frac{\pi}{2}\}$

(۴) $D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty), R_f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(۳) $D_f = \left[-1, \frac{-1}{2}\right), R_f = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- بر طبق نمودار مقابل دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ نسبت به خط $y = x$ متقارن می‌باشند. تابع



$y = (g \circ f)(x)$ با کدام گزینه برابر است؟

(۱) $y = x \quad 0 \leq x \leq 4$

(۲) $y = x \quad 0 \leq x \leq 2$

(۳) $y = -x \quad 0 \leq x \leq 4$

(۴) $y = -x \quad 0 \leq x \leq 2$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی $y = 2x^3 + x + 54$ با معکوس خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) $3\sqrt{2}$

(۳) ۳

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) $\sqrt{6}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- دامنه‌ی تابع معکوس $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-x}$ کدام است؟

(۴) $[0, 2]$

(۳) $[-3, 3]$

(۲) $[0, 3]$

(۱) $[-2, 2]$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- معکوس تابع $f(x) = \tan(2x)$ در کدام یک از بازه‌های زیر یک تابع است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (۲) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (۴) $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- ضابطه‌ی معکوس تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 2 \\ 2x - 1 & , x < 2 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $y = \begin{cases} -\sqrt{x} & , x \geq 4 \\ \frac{1}{2}x - 1 & , x < 3 \end{cases}$ (۲) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , x < 2 \end{cases}$
(۳) $y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , x < 3 \end{cases}$ (۴) $y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x \geq 2 \\ \frac{1}{2x - 1} & , x < 2 \end{cases}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $f^{-1}(x) - f(4) = x + 6$ و $f(x)$ یک تابع خطی باشد، آن گاه $f(4)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۱۱ (۴) -۱۱

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- حاصل عبارت $\frac{\sin(6 \cos^{-1} \frac{1}{4})}{2 \sin(3 \cos^{-1} \frac{1}{4})}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{11}{16}$ (۲) $-\frac{13}{16}$ (۳) $\frac{11}{16}$ (۴) $\frac{13}{16}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- حاصل عبارت $\sin^{-1}(\cos 6x \cos 5x - \sin 5x \sin 6x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{3\pi}{8}$ (۳) $-\frac{\pi}{8}$ (۴) $-\frac{3\pi}{8}$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۱- اگر $a^P = 10k + 7$ ، آن گاه رقم یکان عدد a^{P+4} کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۳ (۲) |
| ۶ (۳) | ۷ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- اگر عدد $(6^n - 3^n)$ مضرب ۲۵ باشد، کوچک ترین عدد طبیعی n کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۰ (۱) | ۱۵ (۲) |
| ۱۶ (۳) | ۲۰ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۳- اگر عدد $a + 7^{200}$ مضرب ۱۹ باشد، کوچک ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۴ (۱) | ۵ (۲) |
| ۶ (۳) | ۸ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در رابطه ی هم ارزی $R = \{ (x, y) \mid x, y \in Z, \forall (x - y) \}$ ، عدد ۳۹ با کدام عدد داده شده، در یک کلاس

هم ارزی قرار دارد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۹۵ (۱) | ۹۶ (۲) |
| ۹۷ (۳) | ۹۸ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- به چند طریق می توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

- | | |
|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) |
| ۵ (۳) | ۶ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- اگر یک عدد چهاررقمی به صورت $\overline{a7 \circ b}$ مضرب ۴۴ باشد ولی مضرب ۵۵ نباشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۱۱ (۱) | ۱۲ (۲) |
| ۱۳ (۳) | ۱۴ (۴) |

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- اگر عدد $2x^2 - x - 6$ ، مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی x ، کدام است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- از رابطه‌ی همنهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$ ، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه‌ی ۷ نادرست است؟

$a \equiv 4$ (۲)

$a \equiv 3$ (۱)

$3a \equiv 2$ (۴)

$2a \equiv -1$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- معادله‌ی همنهشتی $72x \equiv 1^{31}$ ، در مجموعه‌ی اعداد سه رقمی طبیعی چند جواب دارد؟

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

۳۳ (۴)

۳۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰، عدد $42 + 7^n$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۹ (۴)

۸ (۳)

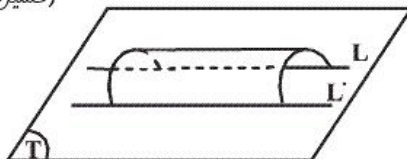
شما پاسخ نداده اید



ریاضی، هندسه ۲، - ۱۳۹۴/۱۲/۲۳

۱۴۱-

(مسین فابیو)



مکان هندسی نقطه‌هایی در
فضا که از دو صفحه موازی
به یک فاصله باشند، یک
صفحه موازی بین آنهاست

دقیقا در وسط، همچنین می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی در فضا که از یک خط
ثابت به فاصله d باشند، سطح جانبی یک استوانه نامتناهی به شعاع
قاعده d است. محل برخورد این دو مکان می‌تواند دو خط موازی باشد. (مانند
 L و L' در شکل بالا)

(هندسه ۲- تمرین ۵ و ۶- صفحه ۳۷)

۴✓

۳

۲

۱

۱۴۲-

(مسین فابیو)

مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد کوچک‌ترین نیم دایره‌ها	۱	۲	۴	2^{n-1}

بنابراین تعداد کوچک‌ترین نیم دایره‌ها در مرحله هشتم $2^{8-1} = 128$ تا است.
(هندسه ۲- صفحه‌های ۷ تا ۱۰)

۴✓

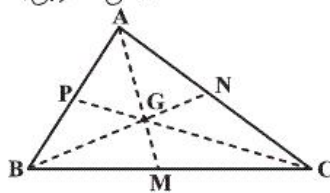
۳

۲

۱

۱۴۳-

(علی ساوچی)



می‌دانیم اگر میانه‌های مثلث را رسم کنیم،
شش مثلث با مساحت‌های یکسان تولید
می‌شود. بنابراین اگر از نقطه هم‌رسی
میانه‌های هر مثلث به سه رأس آن وصل کنیم،
سه مثلث با مساحت برابر ایجاد می‌شود، یعنی در شکل بالا:

$$S(\triangle GAB) = S(\triangle GBC) = S(\triangle GAC)$$

پس نقطه T محل هم‌رسی میانه‌های $\triangle ABC$ است.

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)

۴

۳

۲

۱✓

۱۴۴-

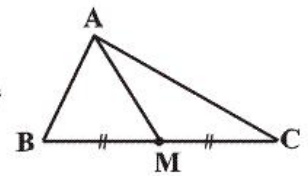
(مهمد ابراهیم گیتی زاده)

نکته (تمرین ۹ صفحه ۲۹ کتاب درسی): در مثلث ABC ، اگر AM ، میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد، آنگاه:

$$\frac{|AC - AB|}{2} < AM < \frac{AC + AB}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|AC - 4|}{2} < 5 < \frac{AC + 4}{2} \Rightarrow 6 < AC < 14$$

(هندسه ۲- صفحه ۲۹)



۴

۳

۲✓

۱

۱۴۵-

(مهمد فندان)

نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌ها در یک مثلث زمانی روی یکی از اضلاع قرار دارد که مثلث قائم‌الزاویه باشد که در این صورت محل هم‌رسی عمودمنصف‌ها وسط وتر است. مطابق شکل زیر، چهارضلعی $AH'MH$ مستطیل است و دو ضلع روبه‌روی آن با هم برابرند و چون MH و MH' عمودمنصف هستند، از وسط اضلاع AB و AC می‌گذرند. پس طبق قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

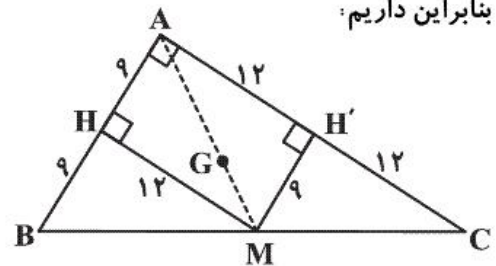
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 30$$

چون میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است و فاصله‌ی نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌ها تا وسط ضلع وارد بر آن یک سوم میانه‌ی وارد بر ضلع است، بنابراین داریم:

$$AM = \frac{BC}{2} = 15$$

$$\Rightarrow GM = \frac{AM}{3} = 5$$

(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۵ و ۳۶)



۴

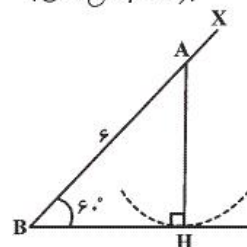
۳

۲

۱✓

۱۴۶-

(رضا عباسی اصل)



زاویه‌ی $\angle XBY = 60^\circ$ را رسم می‌کنیم، A را روی BX چنان اختیار می‌کنیم که $AB = 6$ ، به مرکز A و شعاع $3\sqrt{3}$ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم، محل تلاقی این کمان با BY ، مکان رأس C را مشخص می‌کند. فاصله‌ی A از نیم خط BY برابر است با:

$$AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3}$$

بنابراین کمان رسم شده، در یک نقطه بر BY مماس است و مسئله یک جواب دارد.
(هندسه ۲- صفحه‌های ۳۸ تا ۴۲)

۴

۳

۲✓

۱

(مفسر مفسر منش)

۱۴۷-

طبق قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AC = 3AB \quad (1)$$

از طرفی ABC ، یک مثلث قائم الزاویه است که در آن طبق قضیه فیثاغورس داریم:

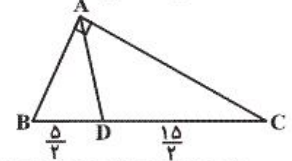
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \xrightarrow{(1)} AB^2 + (3AB)^2 = 100$$

$$10AB^2 = 100 \Rightarrow AB = \sqrt{10} \Rightarrow AC = 3\sqrt{10}$$

حال با داشتن اضلاع قائمه، مساحت را به دست می آوریم:

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times 3\sqrt{10}}{2} = 15$$

(هندسه ۲ - صفحه های ۱۳ و ۱۴)



۴

۳

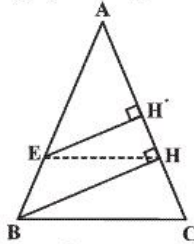
۲ ✓

۱

(مفسر مفسر کریمی)

۱۴۸-

با توجه به این که مجموع فواصل هر نقطه ی دل خواه روی EH تا ساق ها برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث AEH است، داریم:



$$AH = 3x, AB = 5x \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} BH = 4x$$

$$\frac{EH'}{BH} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{EH'}{4x} = \frac{3x}{5x} \Rightarrow EH' = \frac{12}{5}x = \frac{12}{25}(5x) = \frac{12}{25}AC$$

(هندسه ۲ - صفحه ی ۲۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مفسر مفسر کریمی)

۱۴۹-

مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب برابر $180(n-2)$ است. پس مجموع زوایای داخلی مضربی از 180 درجه است. چون کوچک ترین مضرب 180 که از 840 بزرگ تر باشد، 900 است، مجموع زوایای داخلی n ضلعی مورد نظر 900 درجه است.

$$180(n-2) = 900 \Rightarrow n-2 = 5 \Rightarrow n = 7$$

$$\text{تعداد قطر ها} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{7 \times 4}{2} = 14$$

(هندسه ۲ - صفحه های ۹ و ۱۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۵۰

(مسین فایلو)

می‌دانیم از برخورد نیمسازهای خارجی مستطیلی به ابعاد a و b ، مربعی به مساحت

$$\frac{(a+b)^2}{2} \text{ و از برخورد نیمسازهای داخلی آن مربعی به مساحت } \frac{(a-b)^2}{2} \text{ ایجاد می‌شود.}$$

فرض کنیم طول این مستطیل، k برابر عرض آن باشد ($k > 1$) یعنی $b = ka$ ، داریم:

$$\frac{(a+b)^2}{2} = 4 \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = 4 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{a+ka}{a-ka}\right)^2 = 2^2$$

$$\xrightarrow{k>1} \frac{1+k}{1-k} = -2 \Rightarrow k = 3$$

(هندسه ۲، صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، - ۱۳۹۴۱۱۲۳

-۸۱

(مرتضی روزبهانی)

$$R(x) = 100x \text{ : تابع درآمد}$$

$$C(x) = R(x) - P(x) = 100x - (10x - 2100 + x^2) \text{ : تابع هزینه}$$

$$\Rightarrow C(x) = 2100 + 90x - x^2 \Rightarrow C'(x) = 90 - 2x$$

$$C(11) - C(10) \approx C'(10) = 70 \text{ تومان}$$

هزینه‌ی تولید یازدهمین کالا

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۲۹ و ۱۳۰)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۸۲

(فریدون ساعتی)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0 \times \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)} \frac{(2x-1)\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}\right) - 0}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = 2$$

بنابراین f در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته و مشتق پذیر است.

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۸۳

(قاسم کتابچی)

مختصات نقطه‌ی $A(1, 2)$ باید در ضابطه‌ی خط و منحنی صدق کند.

$$y = 3x + a \xrightarrow{(1,2)} 2 = 3 \times 1 + a \Rightarrow a = -1 \quad (1)$$

$$y = bx^2 + x + c \xrightarrow{(1,2)} 2 = b(1)^2 + 1 + c \Rightarrow b + c = 1 \quad (2)$$

همچنین در نقطه‌ی تماس باید شیب خط و منحنی برابر باشد:

$$m_{\text{خط}} = 3$$

$$y = bx^2 + x + c \Rightarrow y' = 2bx + 1 \Rightarrow m_{\text{منحنی}} = y'(1) = 2b + 1$$

$$\Rightarrow 3 = 2b + 1 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{(2)} c = 0 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow a + b - c = -1 + 1 - 0 = 0$$

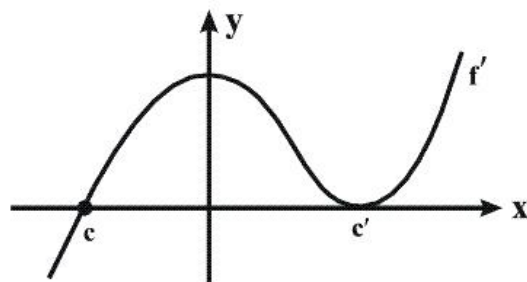
(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۲۵ و ۱۲۶)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱



در نقطه‌ی $x = c'$ هرچند $f' = 0$ است. اما چون به ازای $x > c'$ و $x < c'$ ،

f' مثبت است، پس همواره در اطراف این نقطه شیب خط مماس بر نمودار f

مثبت است.

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۳۱ و ۱۳۲)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & , \quad |x| \leq 1 \\ x + |x| & , \quad |x| > 1 \end{cases} \quad \text{داریم:}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ ax^2 + bx + c & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ 2ax + b & , \quad -1 < x < 1 \\ 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

برای این که تابع f روی \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، لازم است در نقاط $x = \pm 1$ مشتق پذیر و در نتیجه پیوسته باشد.

$$x = 1 \Rightarrow \text{شرط پیوستگی در } x = 1 \Rightarrow a + b + c = 2 \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow \text{شرط پیوستگی در } x = -1 \Rightarrow a - b + c = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a + c = 1 \quad (3)$$

$$x = 1 \Rightarrow \text{شرط مشتق پذیری در } x = 1 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (4)$$

$$x = -1 \Rightarrow \text{شرط مشتق پذیری در } x = -1 \Rightarrow -2a + b = 0 \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow b = 1, a = \frac{1}{2} \xrightarrow{(3)} c = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + b + 4c = 4$$

(مسابقان - صفحه های ۱۶۶ تا ۱۶۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

راه حل اول:

عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود. پس عبارت داخل قدرمطلق بر $x - 1$ بخش‌پذیر است.

$$ax^3 + 3x - a - 3 = (x - 1)(ax^2 + ax + (a + 3))$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| |ax^2 + ax + (a + 3)| - 0}{x - 1}$$

$$= \pm(3a + 3)$$

برای اینکه حاصل حد فوق و در نتیجه مشتق در نقطه‌ی $x = 1$ وجود داشته باشد، باید حاصل حد فوق برابر صفر شود. چون درغیراین صورت حاصل حد فوق یکتا نخواهد بود.

$$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

راه حل دوم:

اگر $x = 1$ ریشه‌ی عبارت داخل قدرمطلق باشد، برای اینکه f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، باید مشتق عبارت داخل قدرمطلق را نیز صفر کند.

$$g(x) = ax^3 + 3x - a - 3$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 3 \Rightarrow g'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۶)

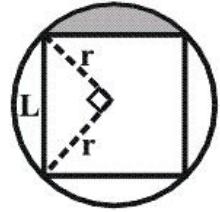
۴

۳

۲✓

۱

$$\text{محیط دایره: } 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$



$$L = \sqrt{2}r \xrightarrow{r = 2\sqrt{2}} L = 4$$

$$S = \frac{(\pi r^2 - 2r^2)}{4} = \frac{(\pi - 2)}{4} r^2 = \frac{(\pi - 2)}{4} \frac{L^2}{2}$$

$$= \frac{(\pi - 2)}{8} L^2 \Rightarrow \frac{dS}{dL} = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right) L \xrightarrow{L=4} (\pi - 2)$$

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۲۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi + t)\cos(\pi + t)}{t(1 - \cos(\pi + t))} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-\sin t \times (-1)}{t(1 - (-1))}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$$

به همین طریق برای محاسبه‌ی $f'_+(\pi)$ داریم:

$$m = f'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{(-\sin x)\cos x}{(x - \pi)(1 - \cos x)} = -\frac{1}{2}$$

اگر θ زاویه‌ی بین دو نیم مماس با شیب‌های m و m' باشد، داریم:

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})}{1 + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})} \right| = \left| \frac{1}{\frac{3}{4}} \right| = \frac{4}{3}$$

(دیفرانسیل، صفحه‌ی ۱۳۴)

۴

۳

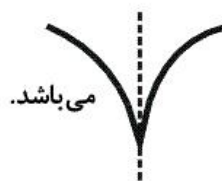
۲ ✓

۱

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{(x^2-1)^2} - 0}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2} \sqrt[5]{(x-1)^2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{(x+1)^5}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(-1) = \frac{\sqrt[5]{4}}{0^+} = +\infty \\ f'_-(-1) = \frac{\sqrt[5]{4}}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



بنابراین شکل تابع اطراف $x = -1$ به صورت

می باشد.

(دیفرانسیل، صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

(ممد رضا شوکتی بیرق)

تابع $y = \sqrt[3]{x^3 + x + 1}$ در ریشه‌ی عبارت $x^3 + x + 1$ مشتق‌ناپذیر است.

عبارت $x^3 + x + 1$ به ازای $x = 0$ مثبت و به ازای $x = -1$ منفی است. پس

طبق قضیه‌ی مقدار میانی در بازه‌ی $(-1, 0)$ دارای ریشه است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

با دسته‌بندی جمله‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$$

$$\Rightarrow -9(x^2 + 8x) + 16(y^2 - 6y) = 144$$

$$\Rightarrow -9[(x+4)^2 - 16] + 16[(y-3)^2 - 9] = 144$$

$$\Rightarrow -9(x+4)^2 + 16(y-3)^2 = 144$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی یک هذلولی قائم:}} \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x+4)^2}{16} = 1$$

پس در این هذلولی $a^2 = 9$ است و می‌دانیم کم‌ترین فاصله‌ی مرکز هذلولی تا نقاط روی محیط، برابر a است که در اینجا برابر ۳ می‌شود.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

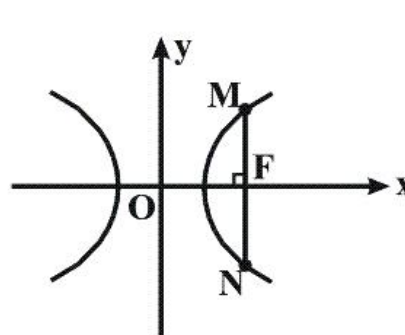
۴

۳

۲ ✓

۱

(تفسیر مبنی‌نژاد)



$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$O \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \Rightarrow x_F = 0 + \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

از آن‌جا که نقاط M و N ، روی هذلولی بوده و طولی برابر کانون هذلولی (F) دارند، داریم:

$$12x^2 - 2y^2 = 3 \Rightarrow 12 \times \frac{7}{4} - 2y_M^2 = 3 \Rightarrow y_M^2 = 9 \Rightarrow y_M = 3$$

$$\Rightarrow MF = 3 \Rightarrow MN = 2MF = 6$$

(هندسه تحلیلی، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

(امیرحسین ابومثوب)

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{2}{0} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

پس زاویه مناسب برای دوران برابر $\frac{\pi}{4}$ است. با توجه به رابطه‌ی بین مختصات

در دستگاه قدیم و جدید، داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(هنرسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۴

۳

۲

۱✓

(رضا عباسی اصل)

$$|PF - PF'| = 2a \Rightarrow |5 - 4| = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$FF' = 2c \Rightarrow 3 = 2c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{F + F'}{2} = \left(\frac{3}{2}, 1\right) = (\alpha, \beta)$$

$$A = (a + \alpha, \beta) \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow A = (2, 1)$$

$$A' = (-a + \alpha, \beta) \Rightarrow A' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow A' = (1, 1)$$

(هنرسه تحلیلی، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۴)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۱۵

(معمربراهیم گیتی زاده)

شیب‌های مجانب‌های افقی $\pm \frac{b}{a} = \pm \sqrt{3}$ و نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها، $O(\alpha = 0, \beta = 0)$ مرکز هذلولی است.



$$FA = OF - OA = c - a = 2$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} c - a = 2 \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2, c = 4$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow 3x^2 - y^2 = 12$$

(هندسه تحلیلی، صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۱۶

(معمربعلی نادرپور)

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-1}{1-1} \Rightarrow \text{تعریف نشده} : 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases}$$

پس از جایگذاری در معادله‌ی داده شده، به معادله‌ی $x'^2 + 3y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 4$

$$\text{و در نتیجه } 1 = \frac{(x' + \sqrt{2})^2}{6} + \frac{y'^2}{2} \text{ می‌رسیم، پس:}$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - (y^2 + 4y + 4 - 4) = -m$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - (y+2)^2 = -m - 3$$

$$\text{O} = (-1, -2) \text{ : مرکز هذلولی}$$

علامت x^2 و y^2 ، مخالف یکدیگر است، پس شرط اول هذلولی بودن را دارد.
همچنین که مختصات نقطه‌ی O نباید در معادله صدق کند. زیرا اگر صدق کند
معادله‌ی حاصل، معادله‌ی دو خط متقاطع است نه هذلولی.

$$(-1+1)^2 - (-2+2)^2 \neq -m - 3$$

$$\Rightarrow -m - 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$$

پس به ازای $m = -3$ ، معادله‌ی داده شده، معادله‌ی هذلولی نیست.

(هنرسه تملیلی، صفه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲

۱ ✓

با توجه به مختصات کانون‌ها، هذلولی افقی است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} FF' = 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \\ e = \frac{c}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

مرکز هذلولی (O') وسط دو کانون قرار دارد، پس داریم $O' = (3, 3)$ و

معادله‌ی هذلولی عبارت است از:

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

$$\xrightarrow{x=0} \frac{(y-3)^2}{16} = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ یک جواب}$$

هذلولی در یک نقطه بر محور y ها مماس است.

$$\xrightarrow{y=0} \frac{(x-3)^2}{9} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = \frac{225}{16} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{4} \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{دو جواب}$$

هذلولی در دو نقطه، محور x ها را قطع می‌کند.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۷۰ تا ۷۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

راه اول:

بدون استفاده از دوران می‌توان گفت $1 - x^2 \geq 0$ پس $-1 \leq x \leq 1$. چون دامنه محدود است پس هذلولی نیست و در ضمن نقطه و تهی نیز قطعاً نمی‌باشد.

راه دوم:

$$(y - x)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 1 =$$

$$B^2 - 4AC = 4 - 8 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{بیضی} \\ \text{نقطه} \\ \text{تهی} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = 0, y = 0) \text{ مرکز} \\ f'(y) = 0 &\rightarrow \end{aligned}$$

$$F(0,0) = -1 < 0 \rightarrow \text{بیضی است}$$

(هنر سه تالیلی، صفحه‌های ۸۳ تا ۹۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۲۰

(کیوان دارایی)

در واقع این رابطه همان $(\underbrace{x+2}_X)(\underbrace{y-3}_Y) = 10$ می باشد که همان

$XY = 10$ است.

زاویه دوران محورهای مختصات برای این که مقطع مخروطی مورد نظر،

استاندارد شود، برابر 45° است و داریم:

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

$$XY = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 = 10$$

$$\Rightarrow \frac{x'^2}{20} - \frac{y'^2}{20} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 20 + 20 = 40$$

$$c = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{10}$$

(هنرسه تجلیلی، صفحه های ۸۳ تا ۹۰)

۴

۳

۲✓

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

-۱۲۱

$$\begin{aligned} \Delta a &\equiv fa - 2 \Rightarrow a \times 1.0 + \Delta \times 1.1 \equiv fa - 2 \Rightarrow a + \Delta.0 \equiv fa - 2 \\ &\Rightarrow 3a \equiv \Delta 2 \Rightarrow 3a \equiv 4 \Rightarrow 3a \equiv 12 \Rightarrow a \equiv 4 \xrightarrow{a \text{ رقم است.}} a = 4 \\ 3a + b &\equiv fa - 2 \Rightarrow a \times 1.0 + 3 \times 1.1 + b \equiv fa - 2 \\ &\Rightarrow a + 3.0 + b \equiv fa - 2 \xrightarrow{a=4} 34 + b \equiv 16 - 2 \\ &\Rightarrow b \equiv -2.0 \Rightarrow \Delta | b + 2.0 \Rightarrow b = \Delta k - 2.0 \\ 1.0 \leq \Delta k - 2.0 < 1.0 &\Rightarrow 3.0 \leq \Delta k < 12.0 \\ &\Rightarrow 4 \leq k \leq 14 \Rightarrow k: \text{تعداد } 14 - 4 + 1 = 11 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳✓

۲

۱

(معموری ناظمی)

-۱۲۲

$$13^2 \equiv -1 \Rightarrow 13^{26} \equiv -1 \Rightarrow 13^{27} \equiv -13 \Rightarrow 13^{27} \equiv 4$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

(سید عادل رضا مرتضوی)

-۱۲۳

$$\begin{aligned} 3^3 &\equiv 1 \Rightarrow (3^3)^{2k} \equiv (1)^{2k} \Rightarrow 3^{6k} \equiv 1 \Rightarrow 3^{6k+3} \equiv 1 \times 3^3 \\ &\Rightarrow 3^{6k+3} \equiv 27 \equiv 1 \\ 4^3 &\equiv -1 \Rightarrow (4^3)^k \equiv (-1)^k \Rightarrow 4^{3k} \times 4^3 \equiv (-1)^k \times (-1)^3 \\ &\Rightarrow 4^{3k+3} \equiv (-1)^k \times (-1) \equiv (-1)^{k+1} \\ &\Rightarrow 3^{6k+3} + 4^{3k+3} \equiv 1 + (-1)^{k+1} = \begin{cases} 0: & k \text{ زوج} \\ 2: & k \text{ فرد} \end{cases} \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴✓

۳

۲

۱

(سید امیر ستوده)

-۱۲۴

از $a \equiv 2$ و $a \equiv 2$ نتیجه می‌شود $a \equiv 2$ و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 0 \equiv 72 \\ a \equiv 2 \equiv 72 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 72 \Rightarrow a \equiv 72 \equiv 1017$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(هومن نورانی)

-۱۲۵

$$\begin{aligned} a \equiv 13 &\Rightarrow a \equiv 13 \equiv 4 \equiv 4 + 3 \times 9 \equiv 31 \\ a \equiv 3 &\Rightarrow a \equiv 3 \equiv 3 + 7 \times 4 \equiv 31 \end{aligned} \Rightarrow a \equiv 31 \equiv -5$$

$$2a \equiv -10 \Rightarrow 2a + 10 \equiv 0$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(علی ایمانی)

-۱۲۶

$$3x + 2 \equiv 3 \Rightarrow 3x \equiv 1 \Rightarrow 3x \equiv 1 + 5$$

$$\Rightarrow 3x \equiv 6 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$4x + 3 = 4(5k + 2) + 3 = 20k + 11 = 10(2k + 1) + 1 = 10m + 1$$

در نتیجه باقی‌مانده‌ی تقسیم $4x + 3$ بر ۱۰، برابر یک خواهد شد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲ ✓

۱

(میلاد منصوری)

-۱۲۷

چون $b \equiv 2$ است لذا $b = 5n + 2$. چون b فرد است، لذا n نیز فرد است.
پس $n = 2k + 1$ و لذا $b = 5(2k + 1) + 2 = 10k + 7$. این یعنی
لذا $b \equiv 7$.

$$\begin{aligned} a^{17} + b^{23} &\equiv a + b^3 \equiv 3 + 7^3 \equiv 3 + 49 \times 7 \equiv 3 + 9 \times 7 \\ &\equiv 3 + 63 \equiv 66 \equiv 6 \end{aligned}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۲۸

(محمدرضا دلورنژاد)

$$\overline{3m2n} \equiv n - 2 + m - 3$$

$$\overline{n2m3} \equiv 3 - m + 2 - n$$

$$\overline{3m2n} \equiv \overline{n2m3} \Rightarrow n + m - 5 \equiv 5 - m - n$$

$$\Rightarrow 2n + 2m \equiv 10 \Rightarrow n + m \equiv 5$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۲۹

(محمدرضا دلورنژاد)

می‌دانیم شرط وجود جواب معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax + by = c$ این است که

$$c | (a, b) \text{ پس } (a, b) | (15, -12) \text{ پس } 3 | 2a - 1, \text{ یعنی } 2a - 1 \equiv 0$$

$$\Rightarrow 2a \equiv 1 \Rightarrow 2a \equiv 3 + 1 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2a \equiv 4 \\ (2, 3) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow a = 3k + 2$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۱۳۰

(علی سعیدی زار)

چون فقط یکی از متغیرها را می‌خواهیم بهتر است به معادله هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$9x + 13y \equiv 7 \Rightarrow 13y \equiv 7 \Rightarrow 4y \equiv 7 \Rightarrow 4y \equiv 16$$

$$\Rightarrow y \equiv 4 \Rightarrow y \in [4]_9$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۹۱

(بایک سادات)

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (-1,-3), (-2,-5)\}$$

$$f^{-1} = \{(1,1), (3,2), (5,3), (-3,-1), (-5,-2)\}$$

$$D_{f+f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = \{1,3\}$$

$$f + f^{-1} = \{(1,2), (3,7)\}$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و حسابان - صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

۴
۳
۲✓
۱

-۹۲

(عمیدرضا رنگی)

نمودار تابع f محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $(0,3)$ قطع می‌کند.

$$y = 2f^{-1}(5-x) + 3 \xrightarrow{\text{وارون}} x = 2f^{-1}(5-y) + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(5-y) = \frac{x-3}{2} \Rightarrow y = 5 - f\left(\frac{x-3}{2}\right) = g^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow g^{-1}(3) = 5 - f(0) = 5 - 3 = 2$$

(حسابان - صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۴✓
۳
۲
۱

-۹۳

(بایک سادات)

$$\sin^{-1}(\cos x \sin x) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} \sin \frac{13\pi}{6}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \sin^{-1} \frac{1}{4}$$

$$= \cos^{-1}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

(حسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴✓
۳
۲
۱

-۹۴

(عمید ستاری)

$$g(x) = y \Rightarrow x = g^{-1}(y)$$

$$2 - f\left(\frac{1}{x}\right) = y \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 - y$$

$$\xrightarrow{f^{-1}(f(u))=u} f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f^{-1}(2 - y) \Rightarrow \frac{1}{x} = f^{-1}(2 - y)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{f^{-1}(2 - y)} \Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{f^{-1}(2 - y)}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{f^{-1}(2 - x)}$$

(مسابان - صفحه‌های ۸۹ تا ۹۵)

۴

۳✓

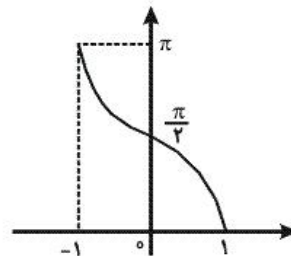
۲

۱

-۹۵

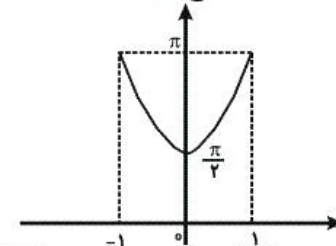
(مبیر رفعتی)

$$f(x) = \cos^{-1}(x)$$



تذکر: اگر بخواهیم از روی تابع $y = f(x)$ ، تابع $y = f(-|x|)$ را رسم کنیم، کافیه ابتدا نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کرده و طرف چپ محور y ها را حذف کنیم و به جای آن تابع طرف راست را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

$$y = \cos^{-1}(-|x|)$$



(مسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

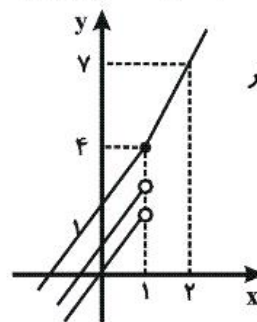
۳

۲✓

۱

-۹۶

(ممد رضا شوکتی بیرق)



ابتدا $y = 3x + 1$ را به ازای $x \geq 1$ رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل برای یک به یک بودن تابع، حداکثر مقدار

$2x + a$ در نقطه‌ی $x = 1$ برابر ۴ می‌تواند باشد:

$$2x + a \leq 4 \Rightarrow a \leq 2 \quad x=1$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶ و مسابان - صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۴

۳

۲

۱✓

-۹۷

(داوود پوافسنی)

ابتدا وارون تابع را بدست می آوریم:

$$yx(6m+3) - 3y = 3m^2x - 1 \Rightarrow yx(6m+3) - 3m^2x = 3y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y-1}{(6m+3)y - 3m^2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{(6m+3)x - 3m^2} \xrightarrow{f=f^{-1}} m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

به ازای $m = 1$ داریم: $f(x) = \frac{3x-1}{9x-3}$ و تابع به تابعی ثابت تبدیل می شود و وارون پذیر نمی باشد.

به ازای $m = -1$ داریم: $f(x) = \frac{3x-1}{-3x-3}$ و دو نمودار f و f^{-1} بر هم

منطبق می شوند پس به ازای یک مقدار m دو نمودار f و f^{-1} بر هم منطبق می شوند.

(ریاضی ۲ - صفحه های ۴۱ تا ۴۳ و مسابان - صفحه های ۱۵ تا ۹۵)

۴

۳

۲✓

۱

-۹۸

(میب شفیعی)

$$y = x^2 + 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x+2)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y+4 = (x+2)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4} = |x+2|$$

$$\xrightarrow{x < -2} \sqrt{y+4} = -x-2 \Rightarrow x = -2 - \sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+4}$$

(مسابان - صفحه های ۱۹ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱✓

-۹۹

(عنایت اله کشاورزی)

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad x \in R_f$$

نکته:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad x \in D_f$$

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = \{(1,1), (a,a), (-3,-3), (5,5)\}$$

$$= \{(1,m), (3,3), (n,n), (k^2+4,p)\}$$

$$\Rightarrow m=1, a=3, n=-3, k^2+4=p=5 \Rightarrow k=\pm 1$$

$$\Rightarrow a+m+n+k+p=7 \text{ یا } 5$$

(ریاضی ۲ - صفحه های ۴۱ تا ۴۳ و مسابان - صفحه های ۱۹ تا ۹۵)

۴

۳

۲

۱✓

$$\text{الف) } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + 1}}$$

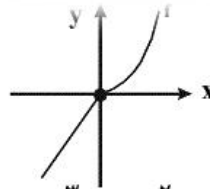
$$\xrightarrow{\text{هم علامت اند } x_1, x_2} \frac{x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2}{x_2^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x_1^2 x_2^2 + x_1^2 = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

چون x_1 و x_2 هم علامت اند، تابع یک به یک است.

یک به یک نمی باشد. $x = \pm 3 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow y = 5$: مثال نقض (ب)

ج) با توجه به نمودار تابع یک به یک است.



$$\text{د) } f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 + 1)^3 + 1 = (x_2 + 1)^3 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک است.

(ریاضی ۲ - صفحه های ۴۳ تا ۴۶ و مسابان - صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

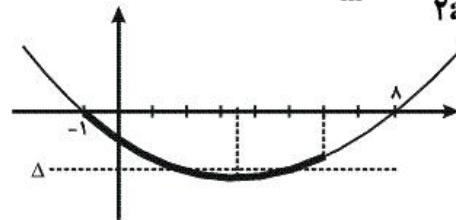
۴

۳ ✓

۲

۱

طول می نیمم تابع فوق $x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$ است.



عرض می نیمم مهم نیست. هر بازه ای که شامل می نیمم باشد تابع در آن بازه یک به یک نیست مثلاً در گزینه ی (۱) که دامنه $(-1, 6)$ است را در نظر بگیرید.

در شکل این بازه را پر رنگ تر کشیده ایم. خط افقی Δ نمودار را در دو نقطه قطع

کرده، بنابراین یک به یک نیست. تنها دامنه ای که شامل $\frac{7}{2}$ نیست، گزینه (۳) است.

(ریاضی ۲ - صفحه های ۴۳ تا ۴۶ و مسابان - صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۰۲

(عمید علیزاده)

$$-1 \leq u \leq 1 \Rightarrow \sin^{-1} u + \cos^{-1} u = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2x-1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R_f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{1+x}{2x-1}\right| \leq 1 \Rightarrow |1+x| \leq |2x-1| \Rightarrow 1+x^2+2x \leq 4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow 3x^2-6x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

(حسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۰۳

(میدر رفعتی)

چون f و g نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند. پس می‌توان f

را معکوس تابع g دانست:

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

طبق متن کتاب حسابان داریم:

$$g \circ g^{-1} = x, D_{g \circ g^{-1}} = D_{g^{-1}} = R_g$$

پس:

$$y = x, 0 \leq x \leq 2$$

(حسابان - صفحه‌های ۱۸۹ تا ۱۹۵)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۰۴

(فریدون ساعتی)

تابع f یک تابع صعودی اکید است، زیرا $f(x) = \underbrace{(2x^3)}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{(x+54)}_{\text{صعودی اکید}}$

بنابراین چنانچه f با f^{-1} نقطه‌ی تلاقی داشته باشد، نقاط تلاقی روی خط $y = x$ خواهد بود.

$$2x^3 + x + 54 = x \Rightarrow 2x^3 = -54 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow \text{نقطه‌ی تلاقی } A(-3, -3) \Rightarrow OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و حسابان - صفحه‌های ۱۸۹ تا ۱۹۵)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۰۵

(حبیب شفیعی)

می‌دانیم دامنه‌ی تابع معکوس با برد تابع اصلی برابر است.

$$x \geq 0, 9-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9 \Rightarrow D_f = [0, 9]$$

تابع f در $[0, 9]$ پیوسته است و چون معکوس‌پذیر است (یک به یک است) پس اکیدا یک‌نوا است.

$$f(0) = -3, f(9) = 3 \Rightarrow R_f = [-3, 3] \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-3, 3]$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و حسابان - صفحه‌های ۱۸۹ تا ۱۹۵)

۴

۳✓

۲

۱

-۱۰۶

(سیرغلامرضا سعادت پو)

برای اینکه معکوس تابع $\tan(2x)$ تابع باشد، باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که $\tan(2x)$ در آن یک به یک باشد، بنابراین باید بازه‌ای را انتخاب کنیم مخرج تابع در آن صفر نباشد.

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \pm \frac{5\pi}{4}, \dots$$

گزینه‌ی (۱) شامل $\frac{3\pi}{4}$ است، پس جواب نیست.

گزینه‌ی (۲) شامل $\pm \frac{\pi}{4}$ است، پس قابل قبول نیست.

گزینه‌ی (۳) شامل $\frac{\pi}{4}$ است، پس قابل قبول نیست.

(مسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۰۷

(میرهادی سرکارفرشی)

$$\begin{cases} y = x^2, & x \geq 2 \Rightarrow y \geq 4 \quad \text{برد} \\ y = 2x - 1, & x < 2 \Rightarrow y < 3 \quad \text{برد} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = \frac{y+1}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم.}]{\text{جای } x \text{ و } y} f^{-1}(x) = \begin{cases} y = \sqrt{x}, & x \geq 4 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & x < 3 \end{cases}$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۸۹ تا ۱۹۵)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۰۸

(فریدون ساعتی)

$f^{-1}(x) = x + f(4) + 6$ بنابراین $f^{-1}(x) = x + a$ است. یعنی:

$$x + a = x + f(4) + 6 \Rightarrow f(4) = a - 6 \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = x + a \Rightarrow y = x + a \Rightarrow x = y - a \Rightarrow f(x) = x - a$$

$$\Rightarrow f(4) = 4 - a \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a - 6 = 4 - a \Rightarrow a = 5$$

$$f(4) = 5 - 6 = -1$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و مسابان - صفحه‌های ۱۸۹ تا ۱۹۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

(همید علیراه)

-۱۰۹

$$\frac{\sin(\frac{1}{4} \cos^{-1} \frac{1}{4})}{2 \sin(\frac{1}{4} \cos^{-1} \frac{1}{4})} \xrightarrow{\cos^{-1} \frac{1}{4} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}} \frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \cos \alpha = \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳

۲

۱ ✓

(همید علیراه)

-۱۱۰

$$\sin^{-1}(\cos(\frac{1}{4}x + \Delta x)) = \sin^{-1}(\cos \frac{1}{4}x)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \sin^{-1}(\cos \frac{1}{4} \frac{\pi}{4}) = \sin^{-1}(\cos \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin^{-1}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})) = \sin^{-1}(-\cos \frac{\pi}{4})$$

$$= -\sin^{-1}(\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})) = -\sin^{-1}(\sin \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۳۰)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی ، ریاضیات گسسته - گواه ، - ۱۳۹۴۱۱۲۳

(سراسری ریاضی - ۸۳)

-۱۳۱

$$a^P = 1 \cdot k + 7 \Rightarrow a^P - 7 = 1 \cdot k \Rightarrow a^P \equiv 7$$

از این رابطه معلوم می‌شود که رقم یکان a^P مساوی ۷ است و برای پیدا کردن رقم یکان a^{P+4} باید باقی‌مانده‌ی $P+4$ را بر ۴ پیدا کنیم، چون باقی‌مانده‌ی $P+4$ بر ۴ مساوی باقی‌مانده‌ی P بر ۴ است.

$$a^{P+4} \equiv a^P \equiv 7 \quad \text{رقم یکان}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۳۸ تا ۵۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۳۲

(سراسری ریاضی - ۹۱)

$$25 | 6^n - 3^n \Rightarrow 25 | 3^n (2^n - 1) \xrightarrow{(25, 3^n)=1} 25 | 2^n - 1$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 \equiv 0 \pmod{25} \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{25}$$

داریم:

$$2^{25} \equiv 7 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2^{50} \equiv 49 \equiv -1 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2^{100} \equiv 1 \pmod{25}$$

همچنین گزینه‌های ۲ و ۳ را نیز می‌توان رد کرد:

$$2^{25} \equiv 7 \pmod{25} \xrightarrow{\text{توان ۳}} 2^{75} \equiv 343 \equiv -7 \pmod{25} \Rightarrow 2^{150} \equiv -14 \equiv 11 \pmod{25}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ و ۵۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۳۳

(سراسری ریاضی - ۱۵)

طبق قضیه‌ی فرما داریم:

$$7^{18} \equiv 1 \pmod{7^{20}} \Rightarrow 7^{200} \equiv 7^{18 \times 11 + 2} \equiv 7^2 \equiv 49 \equiv -8 \pmod{7^{20}} \Rightarrow 7^{200} + 8 \equiv 0 \pmod{7^{20}}$$

لذا کوچک‌ترین عدد طبیعی a برابر ۸ است.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱ و ۵۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۳۴

(سراسری ریاضی - ۱۰)

نکته: اگر $x, y \in [a]_m$ ، آن‌گاه: $x \equiv y \pmod{m}$ در این تست چون $\forall x - y$ لذا $x \equiv y \pmod{m}$ یعنی پیمانه $m = 7$ است.

$$x \equiv 39 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 4 \xrightarrow{k=13} x = 95$$

تذکر: با امتحان کردن گزینه‌ها نیز می‌توان جواب درست را پیدا کرد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۱۳۵

(سراسری ریاضی - ۹۱)

$$150x + 250y = 3700 \Rightarrow 3x + 5y = 74$$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5k \geq 0 \\ y = 13 - 3k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 4$$

تعداد جواب‌ها: $4 - 0 + 1 = 5$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۳۶

(سراسری ریاضی خارج کشور - ۸۸)

طبق فرض عدد $a \cdot 7 \circ b$ مضرب اعداد ۴ و ۱۱ بوده ولی مضرب ۵ نیست.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مضرب ۴ باشد.} \\ \text{مضرب ۵ نباشد.} \end{array} \right\} \Rightarrow b = 4, 8$$

$$\text{مضرب ۱۱ باشد.} \Rightarrow b - 0 + 7 - a = 11k$$

$$\Rightarrow b - a = 11k - 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ a = 11 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$b = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a + b = 12$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۳۷

(سراسری ریاضی - ۹۴)

$$2x^2 - x - 6 \equiv 0 \Rightarrow (x-2)(2x+3) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 2 \\ 2x+3 \equiv 0 \Rightarrow 2x \equiv -3 \equiv 5 \Rightarrow x \equiv 25 \end{cases}$$

بزرگ‌ترین اعداد سه رقمی که در معادله‌های $x \equiv 2$ و $x \equiv 25$ صدق می‌کنند به ترتیب عبارتند از ۹۵۶ و ۹۷۹. پس ۹۷۹ بزرگ‌ترین عدد سه رقمی با مشخصات مورد نظر است و رقم یکان آن ۹ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴✓

۳

۲

۱

-۱۳۸

(سراسری ریاضی - ۸۸)

$$\text{نکته: } ac \equiv bc, (m, c) = d \Rightarrow a \equiv b, a \equiv b \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot c$$

$$\begin{array}{l} 36a \equiv 192 \Rightarrow 3a \equiv 16 \Rightarrow 3a \equiv 16 \\ \Rightarrow 3a \equiv 16 \Rightarrow 3a \equiv 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a \equiv 2 \Rightarrow 3a \equiv 9 \Rightarrow a \equiv 3 \\ a \equiv 3 \Rightarrow 2a \equiv 6 \Rightarrow 2a \equiv -1 \end{array}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲✓

۱

(سراسری ریاضی خارج کشور - ۹۰)

-۱۳۹

$$\begin{array}{c} 31 \\ 31 \quad 72 \equiv 10 \quad 31 \quad 31 \\ 72x \equiv 1 \implies 10x \equiv 1 \equiv -30 \Rightarrow x \equiv -3 \end{array}$$

$$100 \leq 31k - 3 < 1000 \Rightarrow 103 \leq 31k < 1003 \Rightarrow 4 \leq k \leq 32$$

تعداد جواب‌ها: $32 - 4 + 1 = 29$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(سراسری ریاضی - ۹۲)

-۱۴۰

$$\left. \begin{array}{l} 7^n + 42 \equiv 7^n - 1 \\ 7^3 + 1 = 344 = 8 \times 43 \end{array} \right\} \Rightarrow 7^3 + 1^3 \mid 7^n - 1^n$$

بنابراین n باید مضرب زوج از ۳ و البته کم‌تر از ۵۰ باشد.

$$n = 3 \times 2K \leq 50 \Rightarrow 1 \leq K \leq 8$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۴

۳ ✓

۲

۱