



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

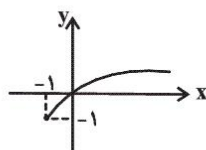
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)

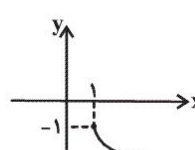


ریاضی ، حسابان ، - ۱۳۹۴۱۰۲۵

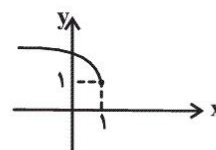
۷۱- چند تا از نمودارهای زیر با ضابطه‌ی ارائه شده برای آن‌ها متناسب است؟



پ) $y = \sqrt{x+1} + 1$



ب) $y = -\sqrt{x-1} - 1$



الف) $y = \sqrt{-x+1} - 1$

۱ (۲)

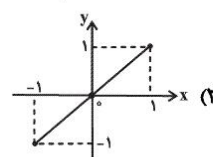
صفر (۱)

۳ (۴)

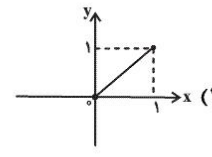
۲ (۳)

شما پاسخ نداده اید

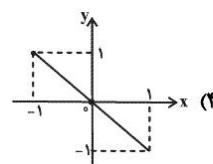
۷۲- اگر $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$ ، نمودار $f.g$ کدام است؟



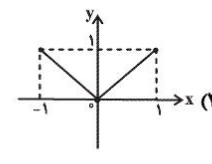
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۳- اگر $f(x) = \log x$ و $g = \{(-1,1), (1,2), (10, \frac{1}{4}), (100,1), (0,4), (4,0)\}$ ، آن‌گاه برد تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ شامل چند عضو متمایز است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 1-2x & ; x \geq 0 \\ x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = x-3$ ، مقدار عبارت $\frac{(2f-g)(3)}{(f+2g)(-1)}$ کدام است؟

$\frac{10}{12}$ (۲)

$\frac{10}{7}$ (۱)

صفر (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۷۵- اگر $\sqrt{3} \cos^2 x + \sin^2 x = f(\tan x) + f(\cot x)$ ، حاصل $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$
(۳) صفر (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۷۶- اگر $f(x) = \log_3(x-2)$ و $g(x) = \sqrt{5-x}$ ، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $(5, 128)$ (۲) $(2, 5]$
(۳) $[9, 84]$ (۴) $(3, 246]$

شما پاسخ نداده اید

۷۷- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow \boxed{f} \rightarrow 6x+k$ ، اگر $g(x) = 3x^3 - 2$ و $f(-\frac{19}{9}) = 1$ باشد، حاصل $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۹
(۳) ۳ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

۷۸- تابع $y = \left| \frac{5}{3+x} \right| + \left| \frac{11-2x}{3-x} \right|$ چگونه است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) فرد (۲) زوج
(۳) یک‌به‌یک (۴) نه زوج، نه فرد

شما پاسخ نداده اید

۷۹- اگر f تابعی فرد، g تابعی زوج و $1 + \frac{1}{x^2} + x^2 + 3x^3 = f(\sin x) + g(x + \frac{1}{x})$ باشد، آن‌گاه $g(3)$ کدام است؟ ($D_{f(x)} = D_{g(x)} = \mathbb{R}$)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{7}{4}$
(۳) ۲ (۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۸۰- تابع $f(x) = |2x-6| - |x+1|$ در کدام بازه‌ی زیر صعودی اکید است؟

- (۱) $[-1, 3]$ (۲) $[-1, +\infty)$
(۳) $(-\infty, -1]$ (۴) $[3, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۸۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ چگونه است؟

- (۱) صعودی اکید (۲) نزولی اکید

(۳) ابتدا صعودی- سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی- سپس صعودی

شما پاسخ نداده اید

۸۲- تابع با دامنه‌ی R ، نزولی اکید و $f(2)=0$ است. اگر دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{(x^2+2x)f(x)}$ به صورت $(-\infty, c] \cup [a, b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۸۳- اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ مفروض باشد، ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x)=1-2x^3$
- (۲) $f^{-1}(x)=8x^3-2$
- (۳) $f^{-1}(x)=2x^3-1$
- (۴) معکوس پذیر نیست.

شما پاسخ نداده اید

۸۴- در کدام یک از توابع زیر $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ است؟

- (۱) $f(x)=2x+3 : D_f = [-1, 2]$
- (۲) $f(x)=3x-2 : D_f = [1, 3]$
- (۳) $f(x)=-x+1 : D_f = [-1, 2]$
- (۴) $f(x)=-x+3 : D_f = [0, 2]$

شما پاسخ نداده اید

۸۵- کدام گزینه یک تابع یک به یک را مشخص می کند؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

- (۱) $y=x|x-2|$
- (۲) $y=x+[x]$
- (۳) $y=x[x]$
- (۴) $y=\begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$

شما پاسخ نداده اید

۸۶- اگر $f(x)=\log_3^x$ و $g(x)=\sqrt{1-2\sin x}$ باشد، دامنه‌ی معکوس تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[0, \frac{1}{3})$
- (۲) $(-1, 1)$
- (۳) $(-\infty, \frac{1}{3}]$
- (۴) $(-\frac{1}{3}, 0)$

شما پاسخ نداده اید

۸۷- تابع $y=f(x)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T=\frac{2}{3}$ است. اگر در بازه‌ی $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ضابطه‌ی این تابع برابر $f(x)=1-\frac{3}{4}x$ باشد، ضابطه‌ی آن در بازه‌ی

$(\frac{1}{3}, 2)$ کدام است؟

- (۱) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$
- (۲) $y=-\frac{3}{4}x+5$
- (۳) $y=-\frac{3}{4}x+4$
- (۴) $y=-\frac{3}{4}x+3$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- کدام تابع پله‌ای است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۱) $y = x^{[x]}$

(۲) $y = [x]^x$

(۳) $y = [x]^{[x]}$

(۴) $y = x[x]$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- برد تابع $f(x) = (x - 4[\frac{x}{4}] - 1)^2$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۶

(۴) ۱۷

شما پاسخ نداده اید

۹۰- مجموعه جواب نامعادله $2[x]^2 - 3[x] - 9 \leq 0$ کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۱) $[-\frac{3}{2}, 3]$

(۲) $(-2, 3]$

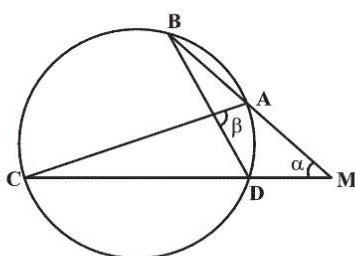
(۳) $[-1, 4)$

(۴) $(-2, 4)$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ی ۲ ، - ۱۳۹۴۱۰۲۵

۹۱- در شکل زیر اگر $\widehat{BAC} = 3\widehat{ABD}$ ، آن گاه زاویه ی β چند برابر زاویه ی α است؟



(۱) $\frac{3}{2}$

(۲) ۲

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) ۳

شما پاسخ نداده اید

۹۲- در دایره‌ای به شعاع ۵، بیش‌ترین فاصله ی نقاط دایره از وتری به طول ۸ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۷

(۳) $\frac{15}{2}$

(۴) ۸

شما پاسخ نداده اید

۹۳- در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۹ و ۱۲، طول بزرگ‌ترین قطعه‌ای که دایره‌ی محاطی داخلی روی ضلع‌ها جدا می‌کند، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳

(۳) ۵ (۴) ۷

شما پاسخ نداده اید

۹۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول ضلع‌های قائمه‌ی ۳ و ۴، دایره‌ی محاطی خارجی مماس بر وتر، در نقاط A و B بر امتداد دو ضلع دیگر مماس است.

طول AB کدام است؟

(۱) ۶ (۲) $6\sqrt{2}$

(۳) ۱۰ (۴) $10\sqrt{2}$

شما پاسخ نداده اید

۹۵- در یک چندضلعی محاطی، لزوماً:

(۱) همه‌ی ضلع‌ها بر یک دایره مماس هستند.

(۲) عمودمنصف‌های ضلع‌ها هم‌رسند.

(۳) مرکز دایره‌ی محیطی داخل چندضلعی قرار دارد.

(۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هم‌رس نیستند.

شما پاسخ نداده اید

۹۶- کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB را در نظر بگیرید. اگر اندازه‌ی AB دو برابر فاصله‌ی مرکز دایره‌ی شامل کمان درخور از این پاره‌خط

باشد، زاویه‌ی حاده‌ی α کدام است؟

(۱) 60° (۲) 30°

(۳) 45° (۴) 75°

شما پاسخ نداده اید

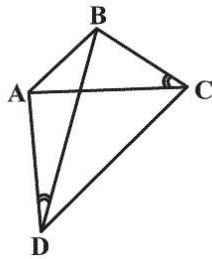
۹۷- پاره خط $AB = 3\text{cm}$ در صفحه مفروض است. در این صفحه، چند نقطه مانند C وجود دارد به طوری که $\hat{ACB} = 45^\circ$ و فاصله ی نقطه ی C از

نقطه ی وسط پاره خط AB برابر 3cm باشد؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۴ (۴) هیچ

شما پاسخ نداده اید



۹۸- در شکل روبه‌رو اگر $\hat{ADB} = \hat{ACB}$ ، آن‌گاه دایره ی محیطی مثلث ABC از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

(۱) D (۲) وسط CD

(۳) وسط BD (۴) وسط AD

شما پاسخ نداده اید

۹۹- در مثلثی با دو زاویه ی 70° و 80° ، قطری از دایره ی محیطی مثلث که از رأس زاویه ی سوم می‌گذرد، ضلع روبه‌رو به آن رأس را با کدام زاویه قطع

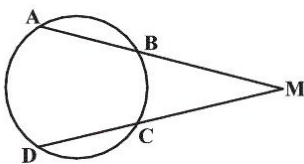
می‌کند؟

(۱) 80° (۲) 75°

(۳) 85° (۴) 70°

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- امتداد دو وتر AB و CD از دایره‌ای به شعاع R، با زاویه ی 30° در بیرون دایره متقاطعند. اگر $BC = R$ ، آن‌گاه طول AD کدام است؟



(۱) $R\sqrt{3}$ (۲) $R\sqrt{2}$

(۳) $\frac{3R}{\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{4R}{3}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، جبر و احتمال ، - ۱۳۹۴۱۰۲۵

۱۰۱- برای مجموعه ی $A = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\{\phi\} \subseteq A$ و $\{\phi\} \notin A$ (۲) A دارای ۱۶ زیرمجموعه است.

(۳) $A - \phi = \{\{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$ (۴) $A - \{\phi, \{\phi\}\} = \{\{\phi, \{\phi\}\}\}$

شما پاسخ نداده اید

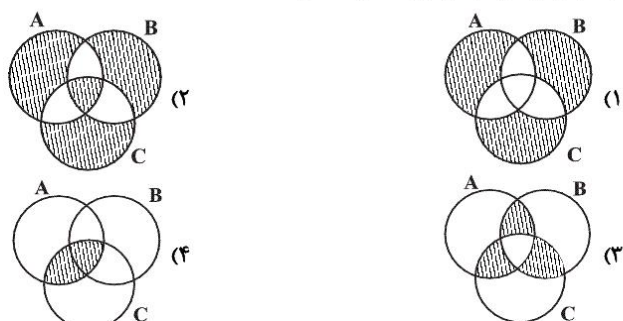
۱۰۲- مجموعه $A_n = (1 - n, \frac{1}{n})$ به ازای اعداد طبیعی n مفروض است. اگر $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ و $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، در این

صورت $A \Delta B$ کدام است؟

- (۱) $(-3, 0] \cup [\frac{1}{4}, 1)$ (۲) $(0, \frac{1}{4})$
(۳) $(-3, 1)$ (۴) $(-3, \frac{1}{4})$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۳- کدام نمودار، بیانگر مجموعه $(A \Delta B) \Delta C$ است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- اگر $A_m = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -m, 2^n \leq m\}$ ، آن گاه $A_4 \Delta A_5$ چند عضو دارد؟ ($m \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- حاصل عبارت $(A \Delta B) \cup [(A \cup B)' \cup (A \cap B)]$ کدام است؟ (U مجموعه جهانی است.)

- (۱) $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$ (۲) $(A \Delta B)'$
(۳) U (۴) ϕ

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر برای سه مجموعه غیر تهی A ، B و C ، داشته باشیم $A - B = A - C$ ، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $B = C$ (۲) $A \cup B = A \cup C$
(۳) $A \cap B = A \cap C$ (۴) $B - A' = C - A$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- اگر $n(A \cap B) = 5$ ، $n(A \cup B) = 20$ و $n(A - B) = 11$ ، مجموعه $(A \Delta B) - A$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $n(A) = 2$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $P(P(A) - \{\phi\})$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۵۱۲ (۴) ۶۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- متمم مجموعه $A \cup (A' - B)'$ نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟

- (۱) $A - B$ (۲) $B - A$ (۳) $A \cup B$ (۴) $A' - B$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- A و B، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی جهانی U هستند. اگر مجموعه‌ی $B - A$ دارای ۶ عضو و مجموعه‌های B و $A' \cap B'$ ، به ترتیب دارای ۱۱ و

۱۲ عضو باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $A \Delta B'$ ، چند عضو دارد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۲۳ (۱) | ۱۸ (۲) |
| ۱۷ (۳) | ۱۳ (۴) |

شما پاسخ نداده اید



ریاضی ، حسابان ، - ۱۳۹۴۱۰۲۵

-۷۱

(سعید زوارقی)

ضابطه‌ی قسمت (الف) به صورت $y = \sqrt{-x+1} + 1$ باید باشد. ضابطه‌ی قسمت (ب) درست است. ضابطه‌ی قسمت (پ) نیز باید به صورت $y = \sqrt{x+1} - 1$ باشد.

(حسابان- صفحه‌های ۵۳ تا ۶۴)

۴

۳

۲✓

۱

-۷۲

(فریدون ساعتی)

ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع $f.g$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow D_f : \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

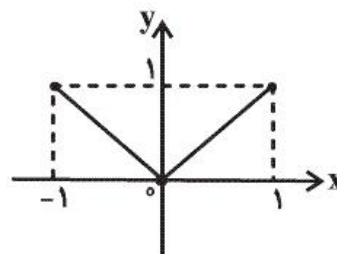
$$\Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow D_g : \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{1 - x^2} \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

$$D(f \times g) = D_f \cap D_g = [-1, 1]$$

$$(f \times g)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \times \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ = \sqrt{1 - 1 + x^2} = |x|$$



(حسابان- صفحه‌های ۶۴ تا ۶۹)

۴

۳✓

۲

۱

-۷۳

(مهمرمصطفی ابراهیمی)

$$\left. \begin{aligned} D_f &= \{x > 0\} \\ D_g &= \{-1, 1, 10, 100, 0, 4\} \end{aligned} \right\} \text{ و } D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \{1, 10, 100, 4\} - \{4\} = \{1, 10, 100\}$$

دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ دارای ۳ عضو است. حالا مقادیر این تابع را به‌ازای این

۳ عضو به‌دست می‌آوریم:

$$y(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\log 1}{1} = 0$$

$$y(10) = \frac{f(10)}{g(10)} = \frac{\log 10}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

۴

۳

۲ ✓

۱

-۷۴

(کریم نصیری)

$$\begin{aligned} \frac{(2f - g)(3)}{(f + 2g)(-1)} &= \frac{2f(3) - g(3)}{f(-1) + 2g(-1)} \\ &= \frac{2(1 - 2 \times 3) - (3 - 3)}{(-1)^2 + 2(-1 - 3)} = \frac{2 \times (-5) - 0}{1 + 2 \times (-4)} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۶۳ تا ۶۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

راه حل اول:

کافی است در عبارت صورت مسئله x را به $\frac{\pi}{2} - x$ تبدیل کنیم.

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3f\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) + f\left(\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 3f(\cot x) + f(\tan x) = 3\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\begin{aligned} (-3) \times & \begin{cases} 3f(\tan x) + f(\cot x) = 3\cos^2 x + \sin^2 x \\ \Rightarrow 3f(\cot x) + f(\tan x) = 3\sin^2 x + \cos^2 x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3f(\tan x) - 3f(\cot x) = -3\cos^2 x - 3\sin^2 x \\ + 3f(\cot x) + f(\tan x) = 3\sin^2 x + \cos^2 x \end{cases}$$

$$-2f(\tan x) = -2\cos^2 x \Rightarrow f(\tan x) = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow f(\tan x) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\tan x \rightarrow t} f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم:

کافی است $x = \frac{3\pi}{4}$ قرار دهیم:

$$x = \frac{3\pi}{4} : 3f\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\cot\frac{3\pi}{4}\right) = 3\cos^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 4f(-1) = 2 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}$$

(مسئله - صفحه های ۹۹ تا ۷۶)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۷۶

(ایمان پینی فروشان)

دامنه‌ی تابع f برابر $x > 3$ و دامنه‌ی تابع g برابر $x \leq 5$ است.

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in D_f \Rightarrow x > 3 \quad (1)$$

$$f(x) \in D_g \Rightarrow \log_3^{(x-3)} \leq 5 \Rightarrow x-3 \leq 3^5 \Rightarrow x \leq 246 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} D_{g \circ f} = (3, 246]$$

(مسئله‌های ۶۹ تا ۷۶)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۷۷

(فریدون ساعتی)

ابتدا مقدار k را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x)) = 6x + k \Rightarrow f(3x^3 - 2) = 6x + k \text{ و } f(-\frac{19}{9}) = 1$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 2 = -\frac{19}{9} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f(-\frac{19}{9}) = 6(-\frac{1}{3}) + k = 1 \Rightarrow k = 3$$

پس رابطه‌ی $f(3x^3 - 2) = 6x + 3$ برقرار است. برای پیدا کردن $f(1)$

داریم:

$$3x^3 - 2 = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 6(1) + 3 \Rightarrow f(1) = 9$$

(مسئله‌های ۶۹ تا ۷۶)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

دامنه‌ی تابع متقارن است. ضابطه‌ی آن را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \left[\frac{5}{3+x} \right] + \left[\frac{6-2x+5}{3-x} \right] = \left[\frac{5}{3+x} \right] + \left[\frac{2(3-x)}{3-x} + \frac{5}{3-x} \right]$$

$$f(x) = \left[\frac{5}{3+x} \right] + \left[2 + \frac{5}{3-x} \right] = \left[\frac{5}{3+x} \right] + \left[\frac{5}{3-x} \right] + 2$$

$$f(-x) = \left[\frac{5}{3-x} \right] + \left[\frac{5}{3+x} \right] + 2 = f(x)$$

بنابراین تابع f زوج است.

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۷۶ تا ۷۹ و ۹۹ تا ۱۰۲)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهم‌مصطفی ابراهیمی)

اگر در عبارت داده شده x را قرینه کنیم، با توجه به این که تابع f فرد

و تابع g زوج است، داریم:

$$f(\sin(-x)) + g(-x - \frac{1}{x}) = 2(-x)^2 + (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} + 1$$

$$\Rightarrow -f(\sin x) + g(x + \frac{1}{x}) = -2x^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$$

$$+ f(\sin x) + g(x + \frac{1}{x}) = 2x^2 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$$

$$2g(x + \frac{1}{x}) = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 2$$

$$\Rightarrow g(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 + 1$$

$$\Rightarrow g(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 1 \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t} g(t) = t^2 - 1$$

$$\xrightarrow{t=3} g(3) = 3^2 - 1 = 8$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۹)

۴ ✓

۳

۲

۱

۸۰-

(فریدون ساعتی)

اگر تابع را به صورت چندضابطه‌ای بنویسیم، داریم:

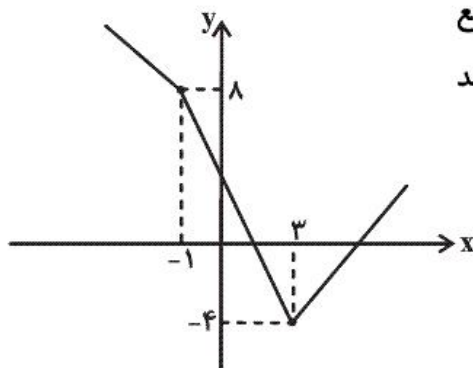
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6 + x + 1 & ; x < -1 \\ -2x + 6 - x - 1 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ 2x - 6 - x - 1 & ; x > 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x + 7 & ; x < -1 \\ -3x + 5 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ x - 7 & ; x > 3 \end{cases}$$

طبق شکل مشخص است که تابع

f در $[3, +\infty)$ صعودی اکید

است.



(مسایان - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴ ✓

۳

۲

۱

۸۱-

(امیر قربانی)

ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}} = \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \stackrel{x \in [1, +\infty)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{x})^2}}$$

$$x > x' \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x'^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{x'^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} > \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x'^2}}} \Rightarrow f(x) > f(x')$$

پس f صعودی اکید است.

(مسایان، صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۸۲

(قسم کتابی)

چون f نزولی اکید و $f(2) = 0$ است، لذا به ازای $x > 2$ ، $f(x) < 0$ و
به ازای $x < 2$ ، $f(x) > 0$ است. عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت
می‌کنیم:

x	-2	0	2
$f(x)$	+	+	+
$x^2 + 2x$	+	-	+
$(x^2 + 2x)f(x)$	+	-	+

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2$$

(مسابقه - صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۴

۳

۲ ✓

۱

$$y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} \Rightarrow y^3 = \frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow 2y^3 = x+1 \Rightarrow x = 2y^3 - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = 2y^3 - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x^3 - 1$$

(مسابقه - صفحه‌های ۹۰ تا ۹۵)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۸۴

(سعید زوارقی)

زمانی تساوی $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ برقرار است که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و
برد f یکسان باشد که تنها گزینه‌ی «۳» این ویژگی را دارد.

(مسابقه، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۵ تا ۹۵)

۴

۳ ✓

۲

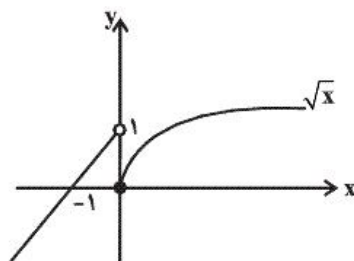
۱

برای گزینه‌های «۱» و «۳» مثال نقض ارائه می‌کنیم:

یک‌به‌یک نیست. $y = 0 \Rightarrow x = 0, 2 \Rightarrow (2, 0), (0, 0)$ گزینه «۱»

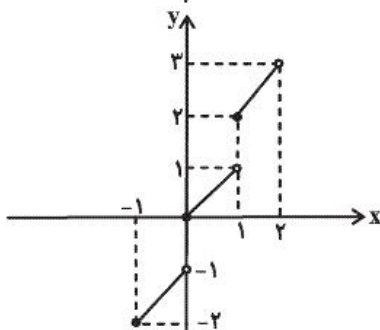
یک‌به‌یک نیست. $y = 0 \Rightarrow x = 0, 5 \Rightarrow (0, 5), (0, 0)$ گزینه «۳»

در گزینه «۴»، نمودار تابع به شکل زیر است:



از نمودار مشخص است که این

تابع یک‌به‌یک نیست.



قسمتی از نمودار تابع گزینه «۲»

نیز به صورت روبه‌رو است. این تابع

یک‌به‌یک است.

(مسابقه - صفحه‌های ۸۵ تا ۸۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

دامنه‌ی معکوس تابع fog، همان برد تابع fog است، پس:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \log_3 \sqrt{1-2\sin x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\sin x \leq 2$$

$$\Rightarrow -1 \leq 1-2\sin x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-2\sin x} \leq \sqrt{3}$$

بنابراین:

$$\log_3 \sqrt{1-2\sin x} \leq \log_3 \sqrt{3} \Rightarrow (fog)(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_{(fog)} = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

(مسایان- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۶ و ۸۹ تا ۹۵)

۴

۳ ✓

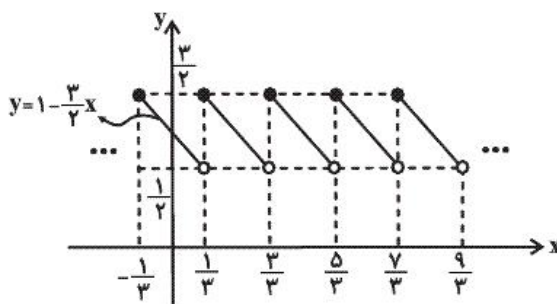
۲

۱

(معمرمصطفی ابراهیمی)

برای آن که تابع f متناوب باشد، باید نمودار آن در دوره‌ی تناوبش

تکرار شود و نمودار به شکل زیر خواهد بود:



ضابطه‌ی پاره‌خطی را می‌خواهیم که در بازه‌ی $[\frac{7}{3}, \frac{9}{3}]$ رسم شده است.

این خط از نقطه‌ی $(\frac{7}{3}, \frac{3}{2})$ می‌گذرد و با خطوط دیگر موازی است. پس

شیب آن برابر $m = -\frac{3}{2}$ می‌باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(x - \frac{7}{3})$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{10}{2} = -\frac{3}{2}x + 5$$

(مسایان- صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

تابع $y = [x]^x$ پله‌ای نیست، زیرا مثلاً در بازه $[2, 3)$ به صورت $y = 2^x$ است که ثابت نیست.

تابع $y = x[x]$ پله‌ای نیست، زیرا مثلاً در بازه $[1, 2)$ به صورت $y = x$ است که ثابت نیست.

تابع $y = [x]^{[x]}$ پله‌ای است، زیرا در هر بازه به صورت $[k, k+1)$ به صورت $y = k^k$ در می‌آید که تابعی ثابت است. ($k \in \mathbb{Z} - \{0\}$)

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(محبوب شفیعی)

-۸۹

می‌دانیم همواره $1 < u - [u] \leq 0$ است. پس:

$$f(x) = \left(4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right) - 1\right)^2$$

$$0 \leq \frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right] < 1 \Rightarrow 0 \leq 4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right) < 4$$

$$\Rightarrow -1 \leq 4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right) - 1 < 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right) - 1\right)^2 < 9 \xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} \{0, 1, 2, 3, \dots, 8\}$$

که شامل ۹ عدد صحیح است.

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

فرض می‌کنیم $[x] = A$ ، داریم:

$$2[x]^2 - 3[x] - 9 \leq 0 \Rightarrow 2A^2 - 3A - 9 \leq 0.$$

$$\Rightarrow (A - 3)(2A + 3) \leq 0.$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq A \leq 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq [x] \leq 3 \Rightarrow -1 \leq x < 4$$

مجموعه جواب نامعادله به صورت $[-1, 4)$ است.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۹۹ تا ۱۰۲)

۴

۳ ✓

۲

۱

(معمد ابراهیم گیتی‌زاده)

$$\widehat{BAC} = 3\widehat{ABD} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = 3 \times \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 3\widehat{AD}$$

α زاویه بین امتداد دو وتر AB و CD و β زاویه بین دو وتر AC و BD است.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = \frac{3\widehat{AD} - \widehat{AD}}{2} = \widehat{AD} \\ \beta = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = 2\widehat{AD} \end{cases} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

(هندسه ۲ - صفحه‌های ۵۷، ۵۸ و ۶۸ تا ۷۴)

۴

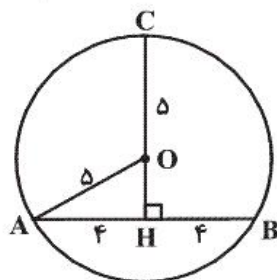
۳

۲ ✓

۱

۹۲-

(رضا عباسی اصل)



دایره‌ی $C(O, 5)$ و وتر AB به طول ۸ را در نظر می‌گیریم. از O بر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن وتر را نصف می‌کند، پس:

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = 4$$

حال:

$$\Delta OAH : OH^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow OH = 3$$

مطابق شکل، بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره تا AB برابر است با:

$$CH = R + OH = 5 + 3 = 8$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

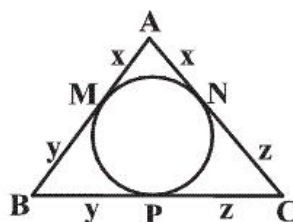
☐ ۱

۹۳-

(شروین سیاح‌نیا)

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابر است. بنابراین داریم:

$$AM = AN = x \text{ و } BM = BP = y \text{ و } CN = CP = z$$



$$\begin{cases} AB = x + y = 7 \\ AC = x + z = 9 \\ BC = y + z = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB + AC + BC = 2(x + y + z) = 28$$

$$\Rightarrow x + y + z = 14 \xrightarrow{x+y=7} z = 7 \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 5$$

بزرگ‌ترین قطعه‌ی ایجاد شده $z = 7$ است.

(هنر سه ۲- مثال ۱- صفحه‌ی ۵۲)

☒ ۴

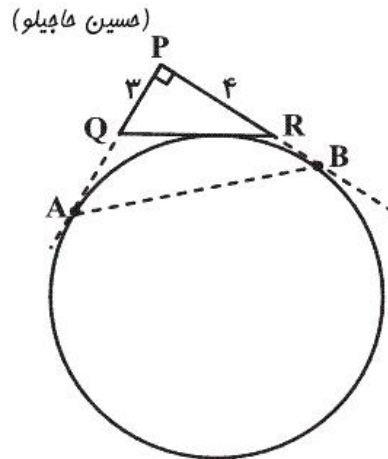
☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۹۴-

نکته: طول مماسی که از هر رأس یک مثلث بر دایره‌ی محاطی خارجی روبه‌رو به آن رأس رسم می‌شود، نصف محیط مثلث است.



$$QR = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

با توجه به این نکته در شکل بالا داریم:

$$PA = PB = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6$$

حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین PAB، داریم:

$$AB = \sqrt{2} PA = 6\sqrt{2}$$

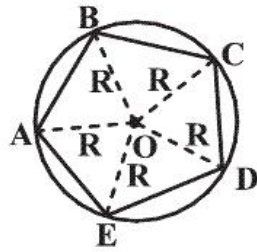
(هندسه ۲ - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

۴

۳

۲ ✓

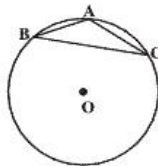
۱



اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که تمام
رأس‌های یک چندضلعی روی محیط آن دایره
واقع باشد، آن چندضلعی محاطی نامیده
می‌شود، با توجه به شکل روبه‌رو، چون
فاصله‌ی مرکز O از B و C به یک فاصله

است پس روی عمودمنصف BC است و برای اضلاع دیگر نیز می‌توان
چنین نتیجه گرفت، پس: «عمودمنصف‌های ضلع‌های چندضلعی محاطی
هم‌رسانند.»

رد گزینه‌های دیگر:



گزینه‌ی «۱»: در مورد چندضلعی محیطی درست است.

گزینه‌ی «۳»: شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید.

گزینه‌ی «۴»: چندضلعی‌های منتظم را در نظر بگیرید که هم محیطی هستند

و هم محاطی.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۵۲ تا ۶۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

مطابق شکل داریم:



$$AB = 2OH \Rightarrow AH = BH = OH$$

$$\Delta OHB : \tan \alpha = \frac{HB}{OH} = 1$$

$$\alpha \text{ حاده است} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

(هنرsey ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

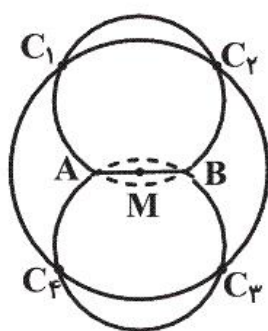
۲

۱

(علی اکبر بیغری)

با توجه به مفروضات مسأله، نقطه‌ی C هم روی کمان درخور

زاویه‌ی $\alpha = 45^\circ$ روبه‌رو به پاره‌خط $AB = 3\text{cm}$ قرار دارد و



هم روی محیط دایره‌ای به مرکز M

(نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB) و شعاع

۳cm. با توجه به شکل روبه‌رو، چهار

نقطه‌ی C1 تا C4، مطلوب هستند.

به عنوان تمرین، نشان دهید که چرا دایره‌ی به مرکز M و شعاع

۳cm، هر یک از کمان‌های بالایی و پایینی کمان درخور را در دو

نقطه قطع می‌کنند.

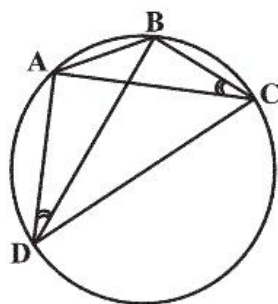
(هنرsey ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۴

۳ ✓

۲

۱



چهارضلعی ABCD محاطی است و

دایره‌ی محیطی مثلث ABC لزوماً از

نقطه‌ی D می‌گذرد.

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۶۱ تا ۶۴)

۴

۳

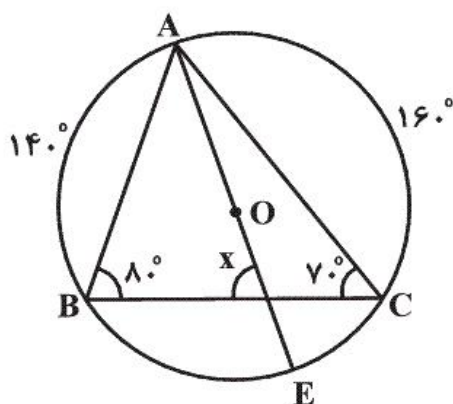
۲

۱ ✓

(معمراً ظاهر شعاعی)

۹۹-

$$\widehat{CE} + \widehat{AC} = 18^\circ \Rightarrow \widehat{CE} = 18^\circ - 16^\circ = 2^\circ$$



$$x = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CE}}{2}$$

$$= \frac{14^\circ + 2^\circ}{2} = 8^\circ$$

(هنر سه ۲- صفحه‌های ۵۶ تا ۵۹ و ۶۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(مسئله فایلو)

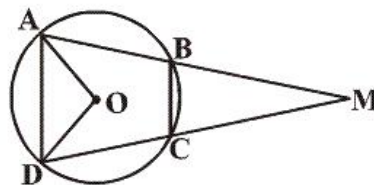
$$BC = R \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AD} - 60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 120^\circ$$

اگر از نقطه‌ی O، مرکز دایره، به نقاط A و D وصل کنیم، در

این صورت مثلث OAD متساوی الساقین بوده و داریم:



$$AD^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \widehat{AOD}$$

$$\Rightarrow AD^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AD^2 = 3R^2 \Rightarrow AD = R\sqrt{3}$$

(هندسه‌ی ۲ - صفحه‌های ۴۷ و ۴۹)

۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی، جبر و احتمال، - ۱۳۹۴۱۰۲۵

(معمومه گزینی)

گزینه‌ی «۱»: $\phi \in A$ پس $\{\phi\} \subseteq A$; از طرفی $\{\phi\} \in A$.

گزینه‌ی «۲»: A دارای ۳ عضو ϕ و $\{\phi\}$ و $\{\phi, \{\phi\}\}$ است پس دارای

$2^3 = 8$ زیرمجموعه خواهد بود.

گزینه‌ی «۳»: $A - \phi = A$.

(پرو احتمال - صفحه‌های ۳۶ تا ۴۰ و ۵۰ تا ۵۲)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۱۰۲

(معمومه گزینی)

$$A_1 = (0, 1), A_2 = (-1, \frac{1}{2}), A_3 = (-2, \frac{1}{3}), A_4 = (-3, \frac{1}{4})$$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, \frac{1}{4})$$

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-3, 1)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (-3, 1) - (0, \frac{1}{4}) = (-3, 0] \cup [\frac{1}{4}, 1)$$

(پیرواقتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۵۶)

۴

۳

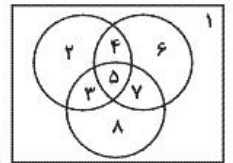
۲

۱ ✓

-۱۰۳

(رسول مفسر منشی)

اگر ناحیه‌های متفاوت را مطابق شکل زیر، شماره گذاری کنیم، آن گاه:



$$A \Delta B = \{2, 3, 6, 7\}$$

$$(A \Delta B) \Delta C = \{2, 3, 6, 7\} \Delta \{3, 5, 7, 8\} = \{2, 6, 8, 5\}$$

که نواحی ۲، ۶، ۵ و ۸، متناظر با ناحیه‌ی هاشورزده در نمودار گزینه‌ی «۲» است.

(پیرواقتمال - صفحه‌های ۴۱، ۴۲ و ۵۳)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۰۴

(سروش مؤینی)

$$A_4 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -4, 2^n \leq 4\} = \{-4, -3, \dots, 2\}$$

$$A_5 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -5, 2^n \leq 5\} = \{-5, -4, \dots, 2\}$$

$$A_5 \Delta A_4 = \{-5\}$$

(پیرواقتمال - صفحه‌های ۵۳ تا ۵۵)

۴

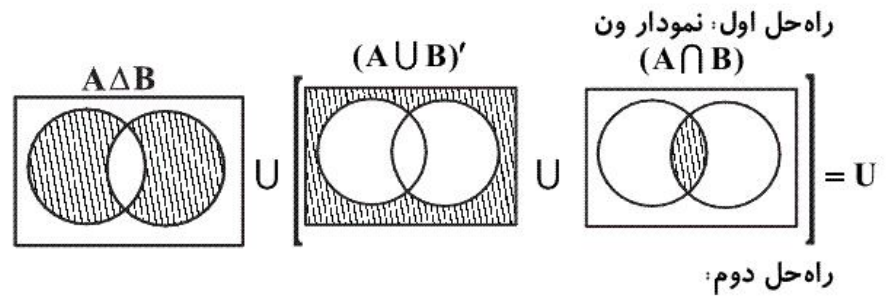
۳

۲

۱ ✓

(سعید زواری)

۱۰۵-



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \\ = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

با استفاده از عکس عمل دمرگان داریم:

$$(A \Delta B) \cup [(A \cup B)' \cup (A \cap B)] \\ = (A \Delta B) \cup [(A \cup B) \cap (A \cap B)']$$

۴

۳ ✓

۲

۱

(سیدوید زوالفقاری)

۱۰۶-

اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{1, 4\}$ و $C = \{1, 3\}$ می‌توان نشان داد گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» نادرست می‌باشند. برای اثبات درستی گزینه‌ی «۳» داریم:

$$A - B = A - C \Rightarrow A - (A \cap B) = A - (A \cap C)$$

چون در این حالت هر دو قسمتی که از A کم می‌شوند، زیرمجموعه‌ای از A هستند، پس این دو قسمت باید با هم برابر باشند، یعنی:

$$A \cap B = A \cap C$$

(پیرواحتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

۴

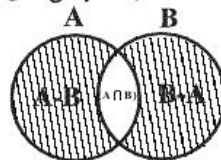
۳ ✓

۲

۱

(رضا عباسی اصل)

۱۰۷-



$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

می‌دانیم حال با توجه به نمودار ون رسم شده داریم:

$$(A \Delta B) - A = B - A$$

پس کافی است $n(B - A)$ را محاسبه کنیم. هم‌چنین با توجه به نمودار

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

واضح است که: و چون $(A - B)$ ، $(A \cap B)$ و $(B - A)$ دو به دو جدا از هم هستند، خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

$$\Rightarrow 20 = 11 + 5 + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = 4$$

(پیرواحتمال - صفحه‌های ۴۱ تا ۵۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

۱۰۸-

(رشد پورسینی)

طبق فرض، مجموعه‌ی A دارای ۲ عضو است. به عنوان مثال داریم:

$$A = \{1, 2\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$P(A) - \{\emptyset\} = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$n(P(A) - \{\emptyset\}) = 3$$

$$n[P(P(A) - \{\emptyset\})] = 2^3 = 8$$

پس $P(P(A) - \{\emptyset\})$ تعداد $2^8 = 256$ زیرمجموعه دارد.

(پیروافتمال - صفحه‌های ۳۶ تا ۴۱)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۱۰۹-

(سروش موئینی)

$$A \cup (A' - B')' = A \cup (A' \cap B)'$$

$$= A \cup (A \cup B') = (A \cup A) \cup B' = A \cup B'$$

و متمم آن می‌شود $A' \cap B$ یا همان $B - A$.

(پیروافتمال - صفحه‌های ۴۴ تا ۵۲)

☐ ۴

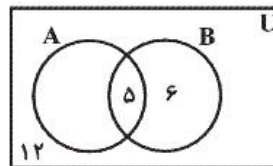
☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۱۱۰-

(مهردار ملوئری)



با توجه به فرض، می‌توان نمودار ون را به شکل مقابل رسم کرد. داریم:

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = 11 - 6 = 5$$

$$A \Delta B' = (A - B') \cup (B' - A) = (A \cap B) \cup (B' \cap A')$$

$$\Rightarrow |A \Delta B'| = |A \cap B| + |A' \cap B'| = 5 + 12 = 17$$

تذکر: دو مجموعه‌ی $A \cap B$ و $A' \cap B'$ ، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

(پیروافتمال - صفحه‌های ۴۱ تا ۵۶)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱