



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara> (@riazisara)



ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۸۱- اگر $(-2, 2a+1) \cup (-2, -3a-1)$ یک همسایگی متقارن محذوف به شعاع ε باشد، آن گاه مرکز همسایگی متقارن $(a - \varepsilon, a + 2\varepsilon)$ کدام است؟

- (۱) $5/5$ (۲) $9/5$ (۳) -6 (۴) -8

شما پاسخ نداده اید

۸۲- با توجه به $y = 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$ ، کمترین و بیشترین مقدار y به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

- (۱) وجود ندارد، ۳ (۲) ۳، وجود ندارد.
(۳) ۴ و ۵ (۴) وجود ندارد، وجود ندارد.

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، انواع دنباله ، دنباله - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۹۰- اگر قدرمطلق تفاضل سوپریمم و اینفیمم دنباله‌ی $a_n = \frac{kn-1}{2n-5}$ برابر ۳ باشد، مقدار منفی k کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -4 (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{16}{5}$

شما پاسخ نداده اید

۸۴- اولین جمله از دنباله‌ی $a_n = \cos \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}$ که در بازه‌ی $(0, 1)$ قرار می‌گیرد، کدام است؟

- (۱) a_1 (۲) a_2 (۳) a_3 (۴) a_4

شما پاسخ نداده اید

۸۵- در مورد کراننداری دنباله‌ی $\left\{ \frac{3 \times 6 \times 9 \dots \times 3n}{(n^2+1)(n-1)!} \right\}$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) کران‌دار (۲) از بالا کران‌دار - از پایین بی‌کران
(۳) از پایین کران‌دار - از بالا بی‌کران (۴) از بالا و پایین بی‌کران

۸۶- دنباله‌ی $a_n = \frac{\binom{k+1}{3}}{n!}$ نزولی است، k چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، دیفرانسیل و انتگرال، همگرایی و اگرایی دنباله‌ها، دنباله - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۸۷- دنباله‌ی $a_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+k}{n} \right\rfloor & ; n \text{ زوج} \\ \left\lfloor \frac{2n+k}{n+2} \right\rfloor & ; n \text{ فرد} \end{cases}$ همگراست. حدود k کدام است؟ $([])$ ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) $0 < k \leq 4$ (۲) $0 < k \leq 3$ (۳) $0 \leq k < 2$ (۴) $0 \leq k < 4$

شما پاسخ نداده اید

۸۸- در اثبات همگرایی دنباله‌ی $a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n} & ; n \text{ زوج} \\ \frac{n+2}{n} & ; n \text{ فرد} \end{cases}$ و با استفاده از تعریف، برای هر $\varepsilon > 0$ حداقل M

کدام است؟ $([])$ ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (۲) $\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (۳) $\left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (۴) $\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon+1} \right\rfloor + 1$

شما پاسخ نداده اید

۸۹- در دنباله‌ی $\left\{ \sqrt{\frac{2^n+3}{2}} \right\}$ به ازای $n \geq M$ ، جملات دنباله از عدد مثبت k بزرگ‌تر می‌شوند. کمترین مقدار

$M \in \mathbb{N}$ کدام است؟ $([])$ ، علامت جزء صحیح است.

- (۱) $\left\lfloor \log_2 k^2 - 3 \right\rfloor$ (۲) $\left\lfloor \log_2 k^2 - 6 \right\rfloor$ (۳) $\left\lfloor \log_2 k^2 - 2 \right\rfloor$ (۴) $\left\lfloor \log_2 k^2 - 3 \right\rfloor$

شما پاسخ نداده اید

۸۳- دنباله‌ی $a_n = \left\{ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right\}$ کدام وضع زیر را دارد؟

- (۱) صعودی و همگرا (۲) نزولی و همگرا (۳) صعودی و واگرا (۴) نزولی و واگرا

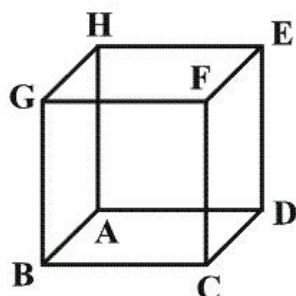
شما پاسخ نداده اید

۱۱۲- تصویر قائم بردار $a = (1, 6, 5)$ ، روی بردار $b = (1, 2, 3)$ کدام بردار است؟

- (۱) $(2, 4, 6)$ (۲) $(3, 6, 9)$ (۳) $(4, 8, 12)$ (۴) $(5, 10, 15)$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۳- شکل زیر مکعبی به ضلع واحد را نشان می‌دهد. حاصل $(\overrightarrow{2CE} - \overrightarrow{DG}).(\overrightarrow{3AC} + \overrightarrow{BH})$ کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) -۳
(۳) ۲
(۴) -۲

شما پاسخ نداده اید

۱۱۴- اندازه‌ی بردارهای a و b به‌ترتیب $2\sqrt{3}$ و ۴ و زاویه‌های آن‌ها با محور x ها به‌ترتیب $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ است.

اندازه‌ی تصویر بردار $a - b$ روی محور x ها کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۵- اگر بردارهای a و b و c چنان باشند که $a + 2b + 3c = 0$ ، آن‌گاه حاصل $a \times b + b \times c + c \times a$ کدام است؟

- (۱) $6(b \times c)$ (۲) $2(b \times a)$ (۳) $3(a \times c)$ (۴) ۰

شما پاسخ نداده اید

۱۱۶- دو بردار $a = (2, 1, 2)$ و $b = (1, 2, 1)$ مفروض هستند. حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $a + b$ ، $a - b$ و $a \times b$ ساخته می‌شود، کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۳۶ (۴) ۵۴

شما پاسخ نداده اید

۱۱۷- اگر $|a| = \sqrt{5}$ ، $|b| = 2$ ، $|c| = \sqrt{6}$ و $b + e_a = c \times a$ باشد، زاویه بین دو بردار a و b کدام است؟

- (۱) 90° (۲) 120° (۳) 60° (۴) 150°

ریاضی ، هندسه‌ی تحلیلی ، خط و صفحه - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۱۱۸- معادله خط D که از مبدا مختصات بگذرد و بر دو خط $\Delta : (x = 2y, z = 1)$ و $\Delta' : (2x = 3y, y = z - 1)$ عمود باشد، کدام است؟

(۱) $2x = y = 4z$ (۲) $x = -y = 4z$ (۳) $2x = -y = 4z$ (۴) $x = y = -4z$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۹- دو خط $x + 1 = y = z + 2$ و $\frac{x-m}{3} = y - 3 = \frac{z-1}{2}$ متقاطعند. m کدام است؟

(۱) -2 (۲) 2 (۳) -3 (۴) 3

شما پاسخ نداده اید

۱۲۰- یک ضلع مربعی روی خط $D : \frac{x-1}{2} = y - 3 = z + 1$ منطبق و یک رأس آن $A(0, 1, 1)$ است. مقدار

مساحت مربع کدام است؟

(۱) $\frac{25}{6}$ (۲) $\frac{25}{3}$ (۳) 8 (۴) 9

شما پاسخ نداده اید

۱۱۱- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-1, 0, 1)$ نسبت به خط $\begin{cases} \frac{2}{3}y + z = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $(5, \frac{-24}{13}, \frac{-23}{13})$ (۲) $(5, -5, \frac{1}{3})$ (۳) $(3, \frac{-24}{3}, \frac{3}{13})$ (۴) $(3, -5, \frac{7}{3})$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۱۲۱- چند درخت مختلف با ۶ رأس وجود دارد به‌طوری‌که در هر یک از آن‌ها $\Delta = 3$ باشد؟

(۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

شما پاسخ نداده اید

۱۲۲- گراف G از مرتبه‌ی ۹ و اندازه‌ی q مفروض است. اگر با حذف یک یال از این گراف، گراف حاصل منتظم

شود، با اضافه کردن حداقل چند یال به گراف G ، این گراف منتظم می‌شود؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

شما پاسخ نداده اید

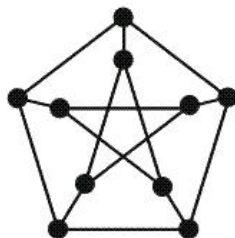
۱۲۳- گراف شکل روبه‌رو چند دور به طول ۶ دارد؟

۱۲ (۱)

۱۰ (۲)

۱۵ (۳)

۲۰ (۴)



شما پاسخ نداده اید

۱۲۴- چند گراف ساده وجود دارد که در آن $p + q = 10$ بوده و گراف بازه‌ای نباشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۵- در گراف G ، بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر $2q + p = 19$ و $\Delta = 5$ باشد، آن گاه

چند مسیر به طول ۳ در این گراف وجود دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۶- گرافی ۳۳ یال دارد. در ماتریس مجاورت این گراف، حداقل چند صفر دیده می‌شود؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۹ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۷- دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های یک گراف ساده همبند از اندازه‌ی ۷، به صورت $a, b, c, 2, 3, 5$ است. در این

گراف چند دور وجود دارد؟

۴ بدون دور

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۲۸- حاصل ضرب درایه‌های قطری مربع ماتریس مجاورت در یک گراف ۵ رأسی برابر ۱۲۸ است. این گراف با حذف

چند یال، همبند و فاقد دور می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۲۹- اگر مجموع درایه‌های قطری مربع ماتریس مجاورت یک درخت ۱۲ باشد، حاصل ضرب این درایه‌ها حداکثر

چند است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

شما پاسخ نداده اید

۱۳۰- در گراف ساده‌ای از مرتبه ۱۰، با آغاز از یکی از رئوس گراف، به‌طور متوالی همه‌ی یال‌ها را دقیقاً یک‌بار طی

کرده و به رأس آغازین باز می‌گردیم، حداکثر و حداقل اندازه‌ی گراف کدام است؟

- (۱) ۱۰, ۴۰ (۲) ۲۰, ۴۵ (۳) ۲۰, ۴۰ (۴) ۱۰, ۴۵

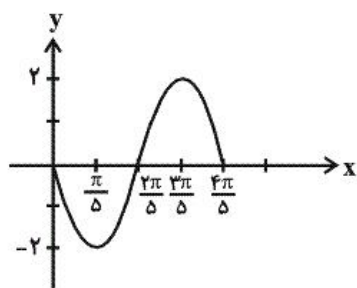
شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، ریاضی پایه ، مثلثات - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۱۰۱- در کدام نواحی از دایره‌ی مثلثاتی، $\tan \alpha > \sin \alpha$ است؟

- (۱) اول و دوم (۲) اول و سوم
(۳) دوم و چهارم (۴) اول و چهارم

شما پاسخ نداده اید



۱۰۲- نمودار تابع $y = a \sin bx$ داده شده است. حاصل ab کدام است؟ ($b > 0$)

- (۱) ۵ (۲) -۵
(۳) ۱۰ (۴) -۱۰

شما پاسخ نداده اید

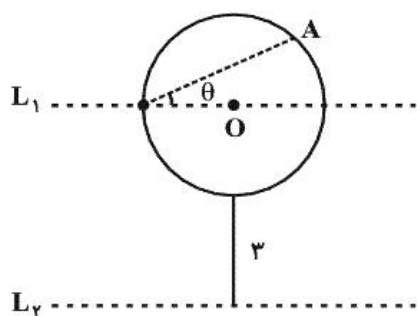
۱۰۳- حاصل عددی $\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \dots + \cos \frac{8\pi}{9}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) صفر (۴) $-\frac{1}{2}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۴- در شکل زیر خطوط L_1 و L_2 موازیند و مرکز دایره به شعاع ۲ واحد بر روی خط L_1 قرار دارد. اگر فاصله‌ی

نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره تا خط L_2 برابر ۳ واحد باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L_2 کدام است؟



(۱) $5 + 1 \cdot \sin \theta$

(۲) $3 + 1 \cdot \sin 2\theta$

(۳) $5 + 2 \sin \theta$

(۴) $5 + 2 \sin 2\theta$

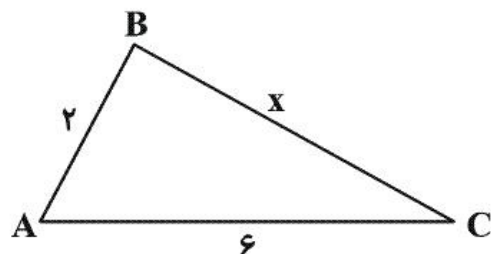
شما پاسخ نداده اید

۱۰۵- اگر $-25^\circ < x < 30^\circ$ و $\cos 2x = \frac{2m-1}{2}$ ، مجموعه‌ی تمام مقادیر m در کدام فاصله است؟

- (۱) $(1, \frac{3}{2}]$ (۲) $[1, \frac{5}{2})$ (۳) $(1, \frac{3}{2})$ (۴) $(2, 3)$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۶- اگر مساحت مثلث مقابل برابر ۳ باشد، مقدار x^2 کدام است؟



(۱) $20 - 4\sqrt{3}$

(۲) $40 - 12\sqrt{3}$

(۳) $10 + 2\sqrt{3}$

(۴) $40 - 6\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۷- حاصل $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

شما پاسخ نداده اید

۱۰۸- اگر $\sin 2x + \cos 2x = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

- (۱) ۳ یا $-\frac{1}{2}$ (۲) -۳ یا $\frac{1}{2}$
(۳) ۲ یا $-\frac{1}{3}$ (۴) -۲ یا $\frac{1}{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۰۹- اگر $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

شما پاسخ نداده اید

۱۱۰- حاصل عددی $A = \cos 2^\circ + \cos 4^\circ - \frac{\sin 7^\circ}{2 \sin 1^\circ}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، هندسه ۱ ، مساحت و قضیه فیثاغورس - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۱۴۱- مساحت یک مستطیل به اضلاع a, b ($a > b$) ، با مساحت یک لوزی به اقطار d و d' ($d > d'$) برابر است. اگر

قطر بزرگ لوزی با قطر مستطیل و قطر کوچک لوزی با ضلع بزرگ مستطیل مساوی باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام عدد

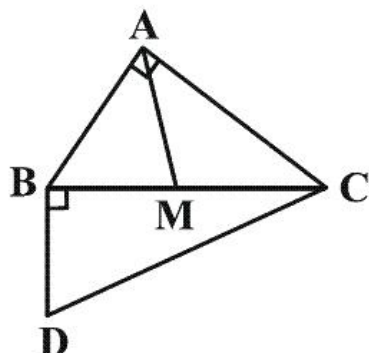
است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $2\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۲- در شکل زیر $AM = 6\text{cm}$ میانه‌ی وارد بر ضلع BC می‌باشد. اگر مثلث‌های ABC و BDC به ترتیب در

رأس‌های A و B قائم‌الزاویه باشند و مساحت مثلث BDC برابر با 30 سانتی‌متر مربع باشد، اندازه‌ی DC



کدام است؟

(۲) ۱۴

(۱) ۱۵

(۴) ۱۶

(۳) ۱۳

شما پاسخ نداده اید

۱۴۳- در مثلث ABC که $AB = AC = 6$ و $BC = 4$ است. اندازه‌ی ارتفاع وارد بر AB کدام است؟

(۲) $4\sqrt{6}$

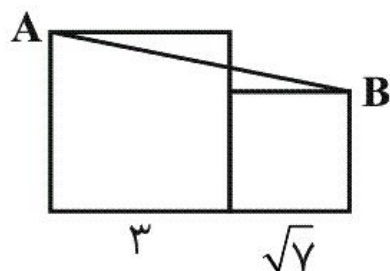
(۱) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(۴) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(۳) $4\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۴- مطابق شکل، دو مربع به ضلع‌های 3 و $\sqrt{7}$ کنار هم قرار گرفته‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟



(۲) $4\sqrt{2}$

(۱) ۵

(۴) ۶

(۳) $4\sqrt{3}$

شما پاسخ نداده اید

۱۴۵- در یک شش ضلعی منتظم، فاصله‌ی محل برخورد قطرهای بزرگ از یکی از قطرهای کوچک، ۱ واحد است.

مساحت این شش ضلعی کدام است؟

$8\sqrt{3}$ (۴)

$6\sqrt{3}$ (۳)

$3\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

شما پاسخ نداده اید

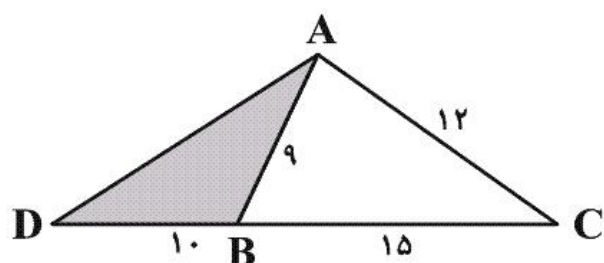
۱۴۶- مساحت مثلث ABD کدام است؟

۲۷ (۲)

۲۴ (۱)

۳۶ (۴)

۳۰ (۳)



شما پاسخ نداده اید

۱۴۷- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، طول‌های دو قاعده ۴ و ۸ واحد و طول ساق $4\sqrt{2}$ واحد است. طول قطر

این دوزنقه چند واحد است؟

$6\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۱)

۸ (۴)

$8\sqrt{2}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۸- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ ، فاصله‌ی پای ارتفاع نظیر وتر از ضلع قائم بزرگ‌تر

کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۲)

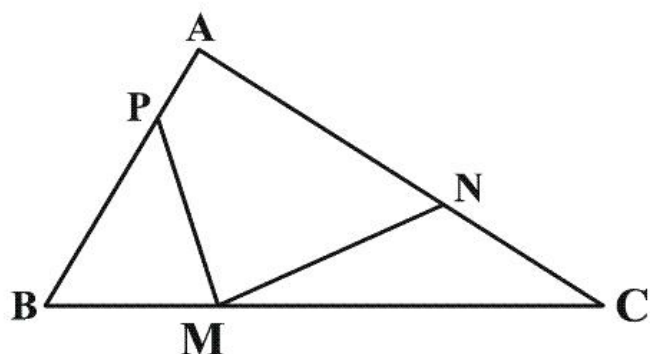
$\frac{8}{\sqrt{5}}$ (۱)

۲ (۴)

$3\sqrt{5}$ (۳)

شما پاسخ نداده اید

۱۴۹- در شکل زیر $\frac{AP}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$ است. حاصل $\frac{S_{PMB}}{S_{MNC}}$ کدام است؟



(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

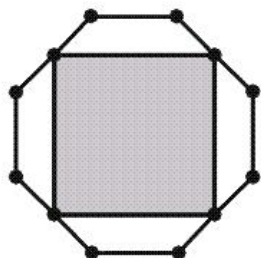
(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۱

شما پاسخ نداده اید

۱۵۰- رئوس مربع سایه زده شده، وسط‌های اضلاع هشت‌ضلعی منتظم‌اند. اگر طول هر ضلع هشت ضلعی منتظم برابر

۲ واحد باشد، مساحت این مربع کدام است؟



(۱) $4(1 + 4\sqrt{4})$

(۲) $2(3 + 2\sqrt{2})$

(۳) $4(1 + 2\sqrt{4})$

(۴) $4(3 + 2\sqrt{2})$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۹۱- مجموعه جواب نامعادله $5 - 2x < |x - 4|$ ، به کدام صورت است؟

(۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$

(۱) $(1, 5)$

(۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

(۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$

شما پاسخ نداده اید

۹۸- حاصل کسر $\frac{0./\overline{692}}{0./\overline{1}+0./\overline{235}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{692}{335}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{692}{345}$

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، انواع دنباله ، دنباله - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۹۴- کوچکترین جملهی دنبالهی $a_n = n^3 - 12n^2 + 128$ کدام است؟

- (۱) ۱۲۸ (۲) -۶۴ (۳) -۲۵۶ (۴) -۱۲۸

شما پاسخ نداده اید

۹۷- دنبالهی $a_n = (-1)^n \frac{3n-4}{2n-19}$ چند جملهی منفی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

شما پاسخ نداده اید

۱۰۰- دنبالهی $a_n = \frac{\log(n^5+1)}{\log(n^3+1)}$ کدام وضع را دارد؟

- (۱) نزولی، همگرا (۲) نزولی، واگرا
(۳) صعودی، همگرا (۴) صعودی، واگرا

شما پاسخ نداده اید

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، همگرایی و اگرایی دنباله ها ، دنباله - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۹۵- دنبالهی $\{(2^n + 4^n)(2^{-n} + 4^{-n})\}$

- (۱) همگرا به ۱ است. (۲) همگرا به ۲ است.

- (۳) همگرا به $\frac{5}{2}$ است. (۴) واگراست.

شما پاسخ نداده اید

۹۶- کدام دنباله همگراست؟

$$\sin(n\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(n\pi - \frac{\pi}{4}) \quad (۲)$$

$$\sin(n\pi + \frac{\pi}{4}) + \cos(n\pi + \frac{\pi}{4}) \quad (۱)$$

$$\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(n\pi + \frac{\pi}{4}) \quad (۴)$$

$$\sin(n\pi + \frac{\pi}{4})\cos(n\pi + \frac{\pi}{4}) \quad (۳)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۹- رابطه‌ی $\{a_n\}$ که در آن $a_0 = 1$ و $a_n = a_{n-1}(\cos \frac{x}{2^n})$ ، با در نظر گرفتن $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ ، به ازای

$x = \frac{\pi}{6}$ به کدام عدد همگراست؟

$$\frac{6}{\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۲- اگر جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{3}{2^n}\right\}$ برای مقادیر $n \geq n_0$ در بازه‌ی $(0, 0.1875)$ قرار گیرند، کوچک‌ترین مقدار n_0

کدام است؟

$$4 \quad (۴)$$

$$5 \quad (۳)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$7 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۹۳- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با شرط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ کدام خاصیت را دارد؟

(۲) کراندار - نزولی

(۱) بی‌کران

(۴) همگرا

(۳) واگرا

شما پاسخ نداده اید

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۱۳۱- در گرافی $p = 20$ و $q = 17$ ، این گراف حداکثر چند رأس منفرد دارد؟

$$23 \quad (۴)$$

$$21 \quad (۳)$$

$$13 \quad (۲)$$

$$15 \quad (۱)$$

شما پاسخ نداده اید

۱۳۲- درجه‌ی رأس‌های گراف همبند G به‌صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و b و a است. کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

$$4 \quad (۴)$$

$$3 \quad (۳)$$

$$2 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۱۳۳- در یک گراف کامل، حاصل ضرب اندازه و مرتبه‌ی آن 50 می‌باشد. در این گراف، چند دور با طول 4 وجود دارد؟

۱۶ (۴)

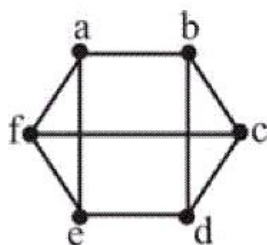
۱۵ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۴- در گراف ۳- منتظم مقابل، چند دور با طول 5 وجود دارد؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۵- در یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن 8 باشد، با افزودن چند یال گراف کامل می‌شود؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۶- با شش بازه‌ی $(6, 9)$ ، $(3, 8)$ ، $(3, 4)$ ، $(2, 5)$ ، $(1, 4)$ ، $(2, 1)$ از اعداد حقیقی یک گراف بازه‌ها می‌سازیم. در

گراف حاصل چند مسیر مختلف از رأس متناظر $(2, 1)$ به رأس متناظر $(3, 4)$ موجود است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۷- به یکی از گراف‌های همبند فاقد دور که درجه‌ی رأس‌های غیر مینیمم آن 2 ، 3 ، 4 ، 5 می‌باشد، فقط یک یال

چنان اضافه می‌کنیم که دوری با بیش‌ترین طول ممکن حاصل شود. طول این دور کدام است؟

۸ (۴)

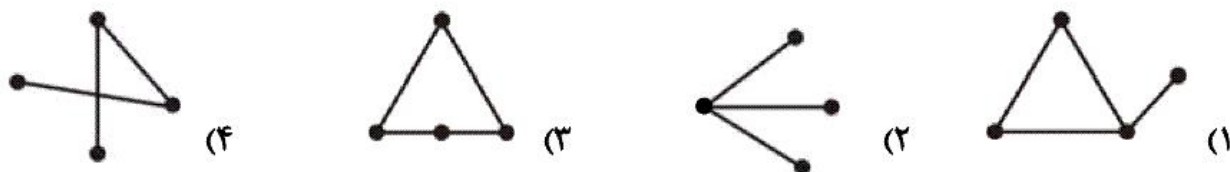
۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

شما پاسخ نداده اید

۱۳۸- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، متناظر با کدام گراف است؟



شما پاسخ نداده اید

۱۳۹- اگر A ماتریس مجاورت درخت T و حاصلضرب درایه‌های قطری ماتریس A^2 برابر 120 باشد، آنگاه درخت T حداقل چند رأس از درجه‌ی 1 دارد؟

- (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱) ۵

شما پاسخ نداده اید

۱۴۰- گرافی دارای 8 رأس و 23 یال است. بیش‌ترین مقدار $\Delta(G) - \delta(G)$ کدام است؟ Δ (ماکزیمم درجه و δ مینیمم درجه‌ی رئوس است)

- (۴) ۶ (۳) ۳ (۲) ۱ (۱) ۵

شما پاسخ نداده اید



ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۴۰۸۲۲

۸۱-

(معمّر طاهر شعاعی)

مرکز همسایگی متقارن محذوف $(-2, 2a+1) \cup (-2, -1-3a)$ عدد -2 است. پس:

$$\frac{2a+1-3a-1}{2} = -2 \Rightarrow -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

شعاع همسایگی متقارن محذوف: $\varepsilon = 2a+1-(-2) = 8+1+2 = 11$

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \text{ متقارن همسایگی متقارن} = \frac{a-\varepsilon+a+\varepsilon}{2}$$

$$= a + \frac{\varepsilon}{2} = 4 + \frac{11}{2} = 9.5$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۴۰ و دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۲ تا ۱۵)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

۸۲-

(معمّر طاهر شعاعی)

با توجه به نامساوی مثلث $|a+b| \leq |a|+|b|$ داریم:

$$|2x-1| \leq |2x|+|-1| \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} 1 \leq \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$$

$$\Rightarrow 4-1 \geq 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|} \Rightarrow y \leq 3$$

یعنی تابع $y = 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$ دارای بیشترین مقدار ۳ است و کمترین مقدار آن

وجود ندارد.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۹۰

(هادی پلاور)

نکته: در دنباله‌های هموگرافیک اگر ریشه‌ی مخرج بزرگتر از یک باشد، به ازای یکی از اعداد طبیعی قبل و بعد ریشه‌ی مخرج، سوپریمم و اینفیمم به دست می‌آید و اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از یک باشد، حد دنباله و a_1 ، سوپریمم و اینفیمم دنباله می‌شوند.

در این سؤال، ریشه‌ی مخرج بزرگ‌تر از یک و برابر $\frac{5}{2}$ است. پس یکی از جمله‌های a_3 و a_4 ، سوپریمم و اینفیمم دنباله است.

$$|a_3 - a_4| = 3 \Rightarrow \left| \frac{3k-1}{1} - \frac{2k-1}{-1} \right| = 3 \Rightarrow |5k-2| = 3$$

$$5k-2 = \pm 3 \Rightarrow k = 1, \frac{-1}{5} \xrightarrow{k < 0} k = \frac{-1}{5}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۸۴

(محمدرضا شوکتی بیرق)

a_1 تنها جمله‌ی دنباله است که منفی می‌باشد. این دنباله، صعودی و همگرا به ۱ می‌باشد. پس a_4 ، اولین جمله‌ی دنباله است که در بازه‌ی $(0, 1)$ قرار می‌گیرد.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

☐ ۴

☐ ۳

☒ ۲

☐ ۱

-۸۵

(حبیب شفیعی)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 \times 1) \times (3 \times 2) \times \dots \times (3 \times n)}{(n^2 + 1)(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n!}{(n^2 + 1)(n-1)!}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \times n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n} = +\infty$$

بنابراین دنباله از بالا بی کران است و چون دنباله مثبت است، از پایین کران‌دار است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

طبق تعریف دنباله‌ی نزولی داریم:

$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{\left(\frac{k+1}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\left(\frac{k+1}{3}\right)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{k+1}{3}}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{k+1}{3} \leq n+1$$

کافی است نامساوی فوق به ازای $n=1$ درست باشد تا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار

باشد. پس داریم:

$$\frac{k+1}{3} \leq 2 \Rightarrow k+1 \leq 6 \Rightarrow k \leq 5 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 1, 2, 3, 4, 5$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

با توجه به این که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+k}{n} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+k}{n+2} = 2$ باید داشته باشیم

$$\frac{n+k}{n} \geq 1 \text{ و } \frac{2n+k}{n+2} < 2 \text{ تا جزء صحیح هر دو عبارت برابر یک گردد و دنباله}$$

همگرا شود.

$$\begin{cases} \frac{n+k}{n} \geq 1 \Rightarrow n+k \geq n \Rightarrow k \geq 0 \\ \frac{2n+k}{n+2} < 2 \Rightarrow 2n+k < 2n+4 \Rightarrow k < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq k < 4$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴ ✓

۳

۲

۱

(مدرس رضا شوکتی بیرق)

واضح است که حد دنباله، برابر ۱ است.

بنا به تعریف، فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ عددی دلخواه باشد، باید M ای پیدا کنیم که برای هر n که $n \geq M$ است، نامساوی زیر برقرار باشد.

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \frac{2}{n} < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n > \frac{1}{\varepsilon} \\ n > \frac{2}{\varepsilon} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} n > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow M \geq \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عیب شفیع)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2^n + 3}{2}} = +\infty \Rightarrow \forall k > 0 \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n > k$$

عبارت فوق یعنی به ازای هر عدد حقیقی و مثبت k ، عددی طبیعی مانند M یافت می‌شود که هرگاه $n \geq M$ ، $a_n > k$.

$$\sqrt{\frac{2^n + 3}{2}} > k \Rightarrow \frac{2^n + 3}{2} > k^2 \Rightarrow 2^n > 2k^2 - 3$$

$$\Rightarrow n > \log_2 2k^2 - 3 \Rightarrow n \geq \left[\log_2 2k^2 - 3 \right] + 1$$

$$\Rightarrow n \geq \left[\log_2 2k^2 - 3 + 1 \right] \Rightarrow n \geq \left[\log_2 k^2 - 2 \right]$$

بنابراین حداقل مقدار M برابر $\left[\log_2 k^2 - 2 \right]$ است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۰)

۴

۳

۲✓

۱

(محمدرضا شوکتی بیرق)

با استفاده از اتحاد مزدوج خواهیم داشت:

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

ملاحظه می‌شود که دنباله‌ی فوق به $\frac{1}{2}$ همگرا بوده و با افزایش n مخرج کاهش

می‌یابد، لذا کسر افزایش می‌یابد، پس دنباله‌ی فوق صعودی است.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

۴

۳

۲

۱✓

-۱۱۲

(سیرامیر ستوده)

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{(1, 6, 5) \cdot (1, 2, 3)}{1^2 + 2^2 + 3^2} b = \frac{1 + 12 + 15}{14} b = 2b = (2, 4, 6)$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

-۱۱۳

(سیرامیر ستوده)

مبدأ مختصات را، نقطه‌ی A در نظر می‌گیریم و راستای AB را محور x راستای AD را محور y و راستای AH را محور z در نظر می‌گیریم. بنابراین مختصات رئوس مکعب به صورت زیر است:

$$A = (0, 0, 0)$$

$$E = (0, 1, 1)$$

$$B = (1, 0, 0)$$

$$F = (1, 1, 1)$$

$$C = (1, 1, 0)$$

$$G = (1, 0, 1)$$

$$D = (0, 1, 0)$$

$$H = (0, 0, 1)$$

و داریم:

$$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0), \overrightarrow{BH} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{CE} = (-1, 0, 1) \\ \text{و } \overrightarrow{DG} = (1, -1, 1)$$

بنابراین:

$$(3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH}) \cdot (2\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{DG}) = (2, 3, 1) \cdot (-3, 1, 1) \\ = -6 + 3 + 1 = -2$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۶ و ۱۷)

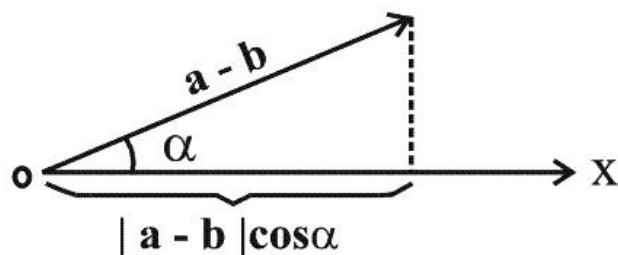
☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

اندازه‌ی تصویر $a - b$ روی محور x ها برابر است با: $|a - b| \cos \alpha$



که در آن α زاویه‌ی بردار $a - b$ با محور x هاست.

از طرفی داریم:

$$|a - b| \cos \alpha = |a - b| |i| \cos \alpha = |a - b| \cdot i = a \cdot i - b \cdot i$$

$$= |a| |i| \cos \frac{\pi}{6} - |b| |i| \cos \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \frac{1}{2} = 3 - 2 = 1$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۴ تا ۲۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\begin{cases} (a + 2b + 3c) \times b = 0 \Rightarrow a \times b + 0 + 3(c \times b) = 0 \\ c \times (a + 2b + 3c) = 0 \Rightarrow c \times a + 2(c \times b) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \times b = 3(b \times c) \\ c \times a = 2(b \times c) \end{cases}$$

$$a \times b + b \times c + c \times a = 3(b \times c) + b \times c + 2(b \times c) = 6(b \times c)$$

(هندسه تحلیلی - مشابه تمرین ۷ - صفحه‌ی ۳۳)

۴

۳

۲

۱ ✓

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 3, 3), \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (2, 1, 2) \\ \mathbf{b} &= (1, 2, 1) \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-3, 0, 3) \end{aligned}$$

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot ((\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))|$$

$$= |(3, 3, 3) \cdot ((1, -1, 1) \times (-3, 0, 3))| = |(3, 3, 3) \cdot (-3, -6, -3)|$$

$$= |-9 - 18 - 9| = |-36| = 36$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۴

۳✓

۲

۱

(معمّر فندان)

-۱۱۷

می‌دانیم $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ بر \mathbf{a} عمود است، پس $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$ حال دو طرف رابطه

$$\mathbf{b} + \mathbf{e}_a = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad \text{را در } \mathbf{a} \text{ ضرب داخلی می‌کنیم.}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{e}_a) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_a = 0$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta + |\mathbf{a}| |\mathbf{e}_a| \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta + |\mathbf{a}| = 0$$

$$|\mathbf{b}| \cos \theta + 1 = 0 \xrightarrow{|\mathbf{b}|=2} 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$$

تذکر: بردار \mathbf{e}_a ، بردار یکه است و در نتیجه $|\mathbf{e}_a| = 1$.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۲، ۱۶ و ۲۸)

۴

۳

۲✓

۱

- ۱۱۸

(معمد ابراهیم کیتی زاده)

$$\text{و } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \text{ معادلات خطوط } \Delta \text{ و } \Delta' \text{ با فرض } y = t \text{ به ترتیب به صورت}$$

$$\text{می‌باشد، یعنی بردارهای هادی آنها به ترتیب } \mathbf{u} = (2, 1, 0) \text{ و } \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{3}{2}, 1, 1\right) \text{ هستند. چون خط } D \text{ بر این دو خط عمود است، پس بردار هادی}$$

آن یعنی \mathbf{v} به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{u}' = (1, -2, \frac{1}{2}) \text{ یا } (2, -4, 1)$$

معادله‌ی خط D عبارت است از:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1} \Rightarrow 2x = -y = 4z$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

$$x + 1 = y = z + 2 = t \Rightarrow \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = t - 2 \end{cases}$$

اکنون این روابط را در معادله‌ی دوم جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{t - 1 - m}{3} = t - 3 = \frac{t - 3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 1 - m = 3t - 9 \Rightarrow 2t = 8 - m \\ 2t - 6 = t - 3 \Rightarrow t = 3 \end{cases} \quad (*)$$

(*)

$$\Rightarrow 2(3) = 8 - m \Rightarrow m = 2$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۴

۳

۲ ✓

۱

(مهندس ابراهیم کیتی زاده)

طول ضلع مربع فاصله نقطه $A(0,1,1)$ از خط D است. $u = (2,1,1)$ بردار هادی خط D و $B(1,3,-1)$ نقطه‌ای روی خط D

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times u|}{|u|}$$

فاصله نقطه A از خط D

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times u = (1, 2, -2) \times (2, 1, 1) = (4, -5, -3)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times u| = \sqrt{50}, \quad |u| = \sqrt{6}$$

$$h = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} \Rightarrow S = \frac{25}{3}$$

مساحت مربع

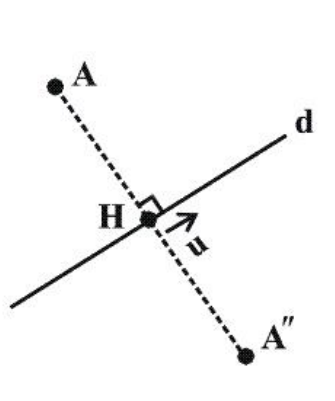
(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

۴

۳

۲ ✓

۱



$$d \begin{cases} 2y = -3z - 3 = t \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{t}{2} \\ z = \frac{t+3}{-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2, \frac{t}{2}, \frac{t+3}{-3})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2, \frac{t}{2}, \frac{t+3}{-3})$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow (2, \frac{t}{2}, \frac{t+3}{-3}) \cdot (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{2} + \frac{t+3}{-3} = 0 \Rightarrow 13t + 24 = 0 \Rightarrow t = -\frac{24}{13}$$

$$\Rightarrow H = (2, -\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})$$

$$A'' = 2H - A = (4, \frac{-24}{13}, \frac{-10}{13}) - (-1, 0, 1) = (5, \frac{-24}{13}, \frac{-23}{13})$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۵ تا ۴۲)

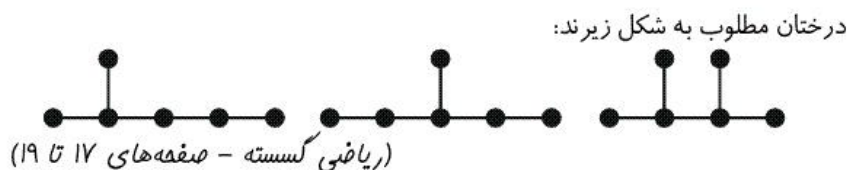
۴

۳

۲

۱ ✓

ریاضی ، ریاضیات گسسته ، گراف‌ها و کاربردهای آن ، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۴۰۸۲۲



۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۲۲

(علیرضا سیف)

اگر فرض کنیم با حذف یک یال درجه‌ی همه‌ی رئوس برابر ۲ شده پس ۲ باید عددی زوج باشد چون اگر فرد باشد تعداد رأس‌های فرد، عددی فرد خواهد بود. حال اگر با اضافه کردن حداقل یال بخواهیم منتظم شود درجه‌ی رئوس نمی‌تواند $r+1$ باشد چون عددی فرد است. پس درجه‌ی همه‌ی رئوس برابر $r+2$ خواهد بود. اگر فرض کنیم تعداد یال‌هایی که قرار است اضافه شود x باشد، داریم:

$$\begin{cases} r \times 9 = 2(q-1) \\ (r+2) \times 9 = 2(q+x) \end{cases} \rightarrow x=8$$

(ریاضی گسسته - صفحه‌های ۱۱ و ۱۲)

۴

۳✓

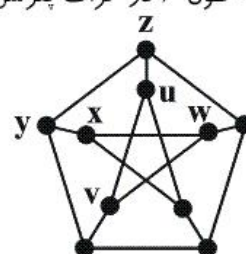
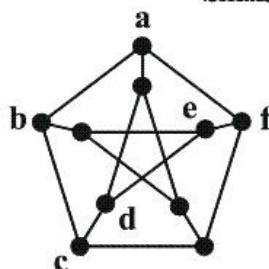
۲

۱

-۱۲۳

(سروش موثینی)

دوره‌های به طول ۶ در گراف پترسن، به صورت‌های زیر هستند:



از مدل $uvwxyzu$ پنج دور داریم.

از مدل $abcdefa$ پنج دور داریم.

پس در کل ۱۰ دور به طول ۶ داریم.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۴ و ۲۳)

۴

۳

۲✓

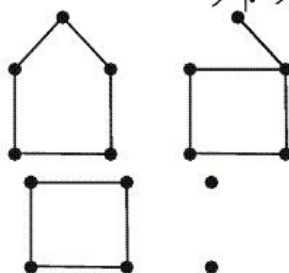
۱

-۱۲۴

(امیرحسین ابومحبوب)

اگر $p=4$ و $q=6$ باشد، گراف حتماً بازه‌ای است.

اگر $p=5$ و $q=5$ باشد، دو گراف غیربازه‌ای می‌توان رسم کرد.



اگر $p=6$ و $q=4$ باشد، یک گراف غیربازه‌ای

قابل رسم است.

اگر $7 \leq p \leq 10$ ، گراف موردنظر قطعاً بازه‌ای است.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۹ و ۱۰)

۴

۳✓

۲

۱

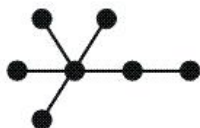
-۱۲۵

(عادل مرتضوی)

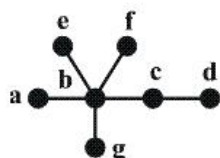
در درخت داریم: $q = p - 1$

$$2q + p = 19 \Rightarrow 2(p - 1) + p = 19 \Rightarrow 3p = 21 \Rightarrow p = 7$$

و با توجه به این که $\Delta = 5$ ، شکل به صورت مقابل رسم می شود:



اگر رئوس را نام گذاری کنیم تعداد مسیرها به طول ۳ به شکل زیر است:



$abcd, ebcd, fbcd, gbcd$

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۱۳ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۱۲۶

(امیر حسین دوست حسینی)

تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف برابر است با $2q - p^2$ ، پس باید p حداقل باشد، گرافی که ۳۳ یال دارد باید حداقل ۹ رأس داشته باشد. پس تعداد صفرهای گراف برابر است با:

$$9^2 - 2(33) = 81 - 66 = 15$$

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۲۰ و ۲۱)

۴

۳ ✓

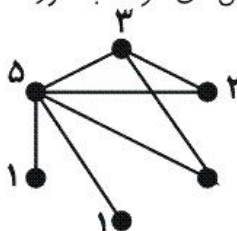
۲

۱

-۱۲۷

(سید امیر ستوده)

با توجه به قضیه $\sum \deg v_i = 2q$ نتیجه می شود که $5 + 3 + 2 + a + b + c = 14$ و لذا $a + b + c = 4$ چون گراف مورد نظر همبند است درجه ی تمام رئوس آن غیر صفر است بنابراین $a, b, c \neq 0$ که نتیجه می شود $\{a, b, c\} = \{2, 1, 1\}$ ، بنابراین دنباله ی درجه ی رأس های گراف به صورت $5, 3, 2, 2, 1, 1$ است که به صورت زیر رسم می شود.



با توجه به شکل فوق تعداد دورهای این گراف برابر ۳ است.

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

۲

۱ ✓

-۱۲۸

(سروش موئینی)

درجه‌ها: ۴, ۴, ۲, ۲, ۲ $\Rightarrow ۱۲۸ =$ ضرب درجه‌ی رئوس

دقت کنید که ۴, ۴, ۴, ۲, ۱ گراف ساده نیست. پس داریم:

$$\sum \deg V_i = 2q = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 = 14 \Rightarrow q = 7$$

$$q = p - 1 = 5 - 1 = 4 \text{ درخت}$$

پس با حذف $7 - 4 = 3$ یال، درخت ایجاد می‌شود.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۴ و ۲۰ تا ۲۲)

۱	۲	۳ ✓	۴
---	---	-----	---

-۱۲۹

(رسول مفسنی‌منش)

درایه‌های قطری مربع ماتریس مجاورت گراف ساده، درجه‌ی رئوس را نشان می‌دهند، پس

مجموع آن‌ها، مجموع درجه‌های رئوس یعنی $2q$ است پس $2q = ۱۲$ یعنی $q = ۶$

است. پس درخت ۷ رأس دارد. در درختی از مرتبه‌ی ۷ بیش‌ترین حاصل‌ضرب درجه‌ی

رئوس را درخت خطی دارد:



$$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 2^5 = 32$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

۱	۲	۳	۴ ✓
---	---	---	-----

-۱۳۰

(عارل مرتضوی)

این تعریف گراف اویلری است و می‌دانیم در گراف اویلری درجه‌ی تمامی رئوس زوج است.

$p = ۱۰$ است پس باید درجات کوچک‌تر یا مساوی ۹ باشد و از طرفی چون اویلری است

و درجه‌ی هر رأس نیز باید زوج باشد بنابراین درجات باید کوچک‌تر یا مساوی ۸ باشد و

چون دنبال حداکثر اندازه هستیم لذا همه‌ی درجات را ۸ می‌گیریم و داریم:

$$۱۰ \times ۸ = 2q \Rightarrow q = ۴۰$$

و برای حداقل اندازه‌ی گراف، درجه‌ی تمام رئوس را ۲ می‌گیریم و داریم:

$$۱۰ \times ۲ = 2q \Rightarrow q = ۱۰$$

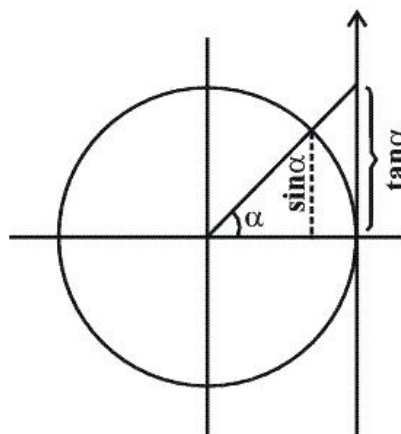
(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۲ و ۱۵)

۱ ✓	۲	۳	۴
-----	---	---	---

$$\tan \alpha > \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha - \sin \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{همواره مثبت } 1 - \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$$



پس α در ناحیه‌ی اول و سوم قرار دارد.

راه حل دوم: در ناحیه‌ی سوم مقدار

$\tan \alpha$ مثبت و $\sin \alpha$ منفی است

پس $\tan \alpha > \sin \alpha$.

هم‌چنین در ناحیه‌ی اول با توجه به شکل

مقابل داریم: $\tan \alpha > \sin \alpha$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۲۲ تا ۱۳۴ و مسابان - صفحه‌های ۱۰۶ تا ۱۱۰)

۴

۳

۲✓

۱

(سمانه فتح‌قرب)

-۱۰۲

با توجه به نمودار، دوره‌ی تناوب تابع $\frac{4\pi}{5}$ است. پس $\frac{4\pi}{5} = \frac{4\pi}{b}$ و در $(b > 0)$

نتیجه $b = \frac{5}{2}$ و با توجه به مقادیر \max و \min تابع، a برابر (-2) می‌باشد.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = a \sin \frac{5}{2} x \Rightarrow -2 = a \sin \left(\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{5} \right) = a \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = -2$$

$$ab = -2 \times \frac{5}{2} = -5$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۴۲ تا ۱۵۲)

۴

۳

۲✓

۱

$$\cos \frac{6\pi}{q} = \cos(\pi - \frac{3\pi}{q}) = -\cos \frac{3\pi}{q}$$

$$\cos \frac{4\pi}{q} = \cos(\pi - \frac{2\pi}{q}) = -\cos \frac{2\pi}{q}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{2\pi}{q} + \dots + \cos \frac{3\pi}{q} + \cos \frac{4\pi}{q}$$

$$= \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{2\pi}{q} + \dots + (-\cos \frac{3\pi}{q}) + (-\cos \frac{4\pi}{q}) = 0$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

۴

۳ ✓

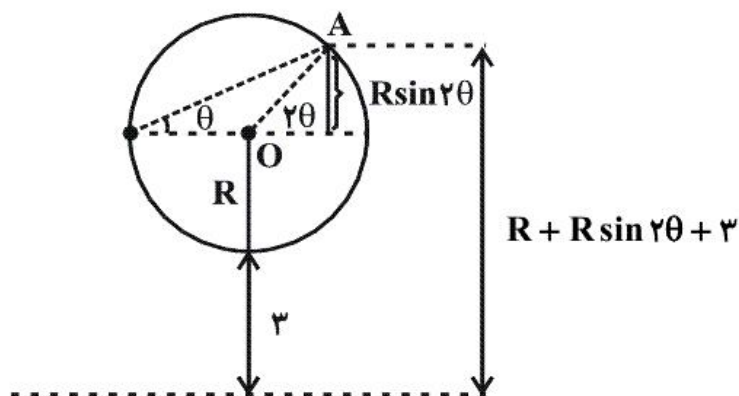
۲

۱

(امیرحسین برادران)

-۱۰۴

$$H = R \sin 2\theta + R + r = \Delta + r \sin 2\theta$$



(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۲۶ تا ۱۳۴ و ۱۳۹ تا ۱۴۱)

۴ ✓

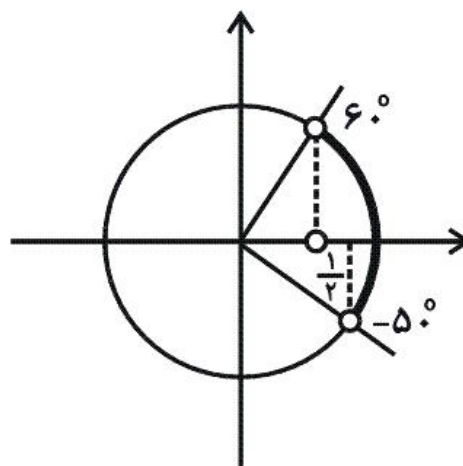
۳

۲

۱

$$-25^{\circ} < x < 30^{\circ} \Rightarrow -50^{\circ} < 2x < 60^{\circ}$$

کمانی را که $2x$ روی دایره مثلثاتی می‌پیماید را مشخص می‌کنیم.



$$\frac{1}{2} < \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < 2m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < 2m \leq 3$$

$$\Rightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۴ و ۱۳۹ تا ۱۴۱)

۴

۳

۲

۱ ✓

(کاظم اجلالی)

-۱۰۶

از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ داریم:

$$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^{\circ}$$

از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث داریم:

$$x^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \cos 30^{\circ} \Rightarrow x^2 = 40 - 12\sqrt{3}$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عیب شفیع)

-۱۰۷

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 2^\circ} - \frac{1}{\cos 2^\circ} = \frac{\sqrt{3} \cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{\sin 2^\circ \cos 2^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2^\circ - \frac{1}{2} \sin 2^\circ\right)}{\sin 2^\circ \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{2(\cos 3^\circ \cos 2^\circ - \sin 3^\circ \sin 2^\circ)}{\sin 2^\circ \cos 2^\circ} = \frac{2 \cos(3^\circ + 2^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 4^\circ}$$

$$= \frac{4 \cos 5^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{4 \sin(9^\circ - 5^\circ)}{\sin 4^\circ} = 4$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷ و مسابان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

(کظم ایلالی)

-۱۰۸

به کمک اتحادهای $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ و $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ داریم:

$$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} + \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{5}$$

اگر فرض کنیم $t = \tan x$ داریم:

$$\frac{2t + 1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow 1 \cdot t + 5 - 5t^2 = -1 - t^2$$

$$4t^2 - 1 \cdot t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

(مسابان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

☐ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☒ ۱

$$\frac{\cos 2x}{\sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2}(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4})}$$

$$\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x)} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$= \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

برای به دست آوردن مقدار $\sin 2x$ طرفین عبارت $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را به

توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\cos x + \sin x)^2 = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x}$$

$$= 1 + \sin 2x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

(مسابقه - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ابتدا مخرج مشترک گرفته و سپس از رابطه‌ی تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم:

$$A = \frac{2 \sin 1^\circ \cos 2^\circ + 2 \sin 1^\circ \cos 4^\circ - \sin 7^\circ}{2 \sin 1^\circ}$$

$$= \frac{\sin 3^\circ - \sin 1^\circ + \sin 5^\circ - \sin 3^\circ - \sin 7^\circ}{2 \sin 1^\circ}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{\sin 5^\circ - \sin 7^\circ}{2 \sin 1^\circ}$$

با استفاده از رابطه‌ی تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$A = \frac{-1}{2} + \frac{2 \sin(-1^\circ) \cos 6^\circ}{2 \sin 1^\circ} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

(ریاضی ۲ - صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷ و حسابان - صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

ریاضی، هندسه ۱، مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس - ۱۳۹۴۰۸۲۲

(معمد ابراهیم کیتی زاده)

-۱۴۱

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت لوزی} \Rightarrow a.b = \frac{1}{2} d.d' \quad (۱)$$

$$\text{قطر مستطیل} = \sqrt{a^2 + b^2} = d, a = d'$$

$$(۱) \Rightarrow a.b = \frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 + b^2} \times a \Rightarrow 2b = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 4b^2 = a^2 + b^2$$

$$3b^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{3}b = a \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

(هندسه ۱ - صفحه‌های ۳۹ و ۴۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

(عباس اسدی امیرآبادی)

-۱۴۲

$$AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 2(6) = 12$$

$$S_{\Delta BDC} = 30 \Rightarrow \frac{BC \cdot BD}{2} = 30 \Rightarrow \frac{12 \times BD}{2} = 30 \Rightarrow BD = 5$$

$$\Delta BDC : DC^2 = BD^2 + BC^2 \Rightarrow DC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow DC = 13$$

(هندسه ۱ - صفحه‌های ۴۱ و ۵۷)

۴

۳✓

۲

۱

(رسول ممسنی منش)

-۱۴۳

در مثلث قائم‌الزاویه ACH داریم:

$$AH^2 = 6^2 - 2^2 = 32 \rightarrow AH = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

حالا مساحت را به دو شکل حساب کنیم:

$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{CL \times AB}{2} \rightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{2} \times 6}{2} = \frac{CL \times 6}{2} \rightarrow CL = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

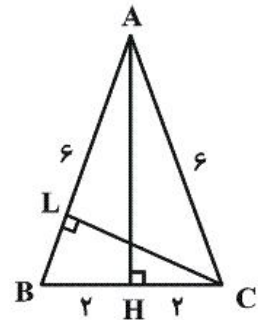
(هندسه ۱ - صفحه‌های ۴۶ و ۵۷)

۴

۳

۲

۱✓



(محمدرضا شجاعی)

-۱۴۴

مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و داریم:

$$AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$BC^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^2 = 14$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 18 + 14 = 32$$

$$\Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

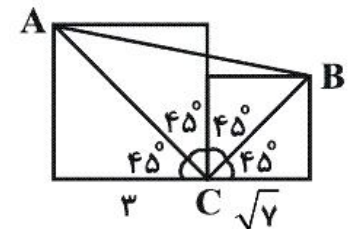
(هندسه ۱ - صفحه‌های ۵۳ تا ۵۹)

۴

۳

۲✓

۱



(عمید گلزاری)

-۱۴۵

محل برخورد قطرهای بزرگ همان مرکز شش ضلعی است. بنابراین طبق شکل زیر داریم:

$$OH = 1 \Rightarrow OC = 2$$

$$OC = \text{نصف قطر بزرگ} \Rightarrow a = 2$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 4 = 6\sqrt{3}$$

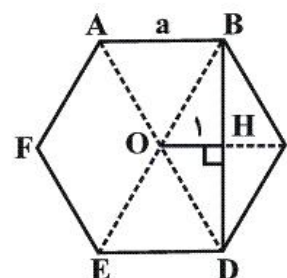
(هندسه ۱ - صفحه‌های ۶۲ و ۶۳)

۴

۳✓

۲

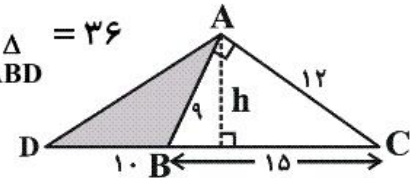
۱



مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ دارای ارتفاع مشترکی هستند که از رأس A رسم می‌شود پس نسبت مساحت‌هایشان با نسبت قاعده‌های متناظر مساوی است، حال:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{54} = \frac{10}{15} \Rightarrow S_{\triangle ABD} = 36$$

(هندسه ۱ - صفحه‌های ۴۶ و ۵۳ تا ۵۷)



۴ ✓

۳

۲

۱

(مهدی ابراهیم کیتی زاده)

-۱۴۷

دو ارتفاع CH و DH' را رسم می‌کنیم،

$$HH' = 4, AH' = BH = \frac{8-4}{2} = 2$$

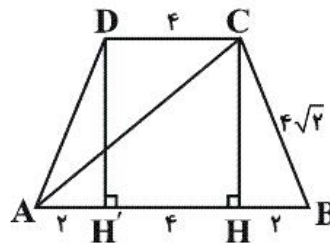
$$\triangle BCH : CH^2 = BC^2 - BH^2 = 32 - 4 = 28$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ACH$:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$= 36 + 28 = 64$$

$$\Rightarrow AC = BD = 8$$



(هندسه ۱ - صفحه‌های ۵۷ تا ۵۹)

۴ ✓

۳

۲

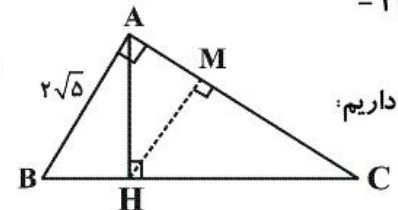
۱

(رضا عباسی اصل)

-۱۴۸

$$\triangle ABC : BC^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$$



داریم:

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \times 10 = (2\sqrt{5})(4\sqrt{5}) \Rightarrow AH = 4$$

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow (4\sqrt{5})^2 = CH \times 10 \Rightarrow CH = 8$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle AHC$ ، HM ارتفاع نظیر وتر AC است، بنابراین:

$$AH \cdot HC = HM \cdot AC \Rightarrow 4 \times 8 = HM \times 4\sqrt{5} \Rightarrow HM = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

(هندسه ۱ - صفحه‌های ۴۱، ۴۶ و ۵۷)

۴

۳

۲

۱ ✓

(عباس اسری امیرآبادی)

۱۴۹-

اگر از A به M وصل کنیم، آن گاه داریم:

$$\frac{S_{PMB}}{S_{MNC}} = \frac{S_{PMB}}{S_{ABM}} \times \frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} \times \frac{S_{AMC}}{S_{MNC}} = \frac{PB}{AB} \times \frac{BM}{CM} \times \frac{AC}{NC}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} = 1$$

(هندسه ۱ - مشابه تمرین ۱۵ - صفحه ۵۳)

۴ ✓

۳

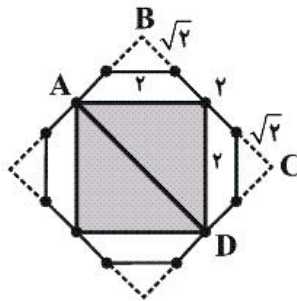
۲

۱

(رضا پشیره)

۱۵۰-

با ادامه دادن ۴ ضلع از هشت ضلعی منتظم طبق شکل زیر، مربع محیطی ظاهر می شود و با توجه به این که مثلث های گوشه ای، قائم الزویه و متساوی الساقین اند و طول وتر آنها که همان ضلع هشت ضلعی منتظم می باشد برابر ۲ داده شده، در نتیجه اندازه ی ساق این مثلث ها برابر $\sqrt{2}$ است:



پس $BC = 2(\sqrt{2} + 1)$ می شود از طرفی $AD = BC$ و در نتیجه $AD = 2(\sqrt{2} + 1)$ و مساحت مربع سایه زده شده، برابر می شود با:

$$S = \frac{AD^2}{2} = \frac{2^2(\sqrt{2} + 1)^2}{2} = 2(3 + 2\sqrt{2})$$

(هندسه ۱ - صفحه ۶۷)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، یادآوری مفاهیم پایه - ۱۳۹۴۰۸۲۲

(سراسری ریاضی - ۹۲)

۹۱-

با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق و حذف آن، نامعادله را حل می کنیم:

$$x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow (x - 4)(x) < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$\Rightarrow 1 < x < 5 \quad (*)$$

$$x < 0 : |x| = -x \Rightarrow (x - 4)(-x) < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0$$

$$\Rightarrow x < 1 - \sqrt{6} \text{ یا } x > 1 + \sqrt{6} \xrightarrow{x < 0} x < 1 - \sqrt{6} \quad (**)$$

پس مجموعه ی جواب نامعادله که از اجتماع جواب های (*) و (**) حاصل می شود

$$(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$$

برابر است با:

(دیفرانسیل - صفحه های ۱۲ تا ۱۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۹۸

(آزاد ریاضی صبح - ۹۰)

$$\begin{aligned} \cdot / \overline{692} &= \frac{692}{999}, \quad \cdot / \overline{1} = \frac{1}{9}, \quad \cdot / \overline{235} = \frac{235}{999} \\ \Rightarrow \frac{\cdot / \overline{692}}{\cdot / \overline{1} + \cdot / \overline{235}} &= \frac{\frac{692}{999}}{\frac{1}{9} + \frac{235}{999}} = \frac{\frac{692}{999}}{\frac{111 + 235}{999}} = \frac{692}{346} = 2 \end{aligned}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۷ و ۸)

۴

۳

۲ ✓

۱

ریاضی ، دیفرانسیل و انتگرال - گواه ، انواع دنباله ، دنباله - ۱۳۹۴۰۸۲۲

-۹۴

(آزاد پزشکی - ۸۳)

می‌دانیم اگر $f' > 0$ باشد، تابع صعودی و اگر $f' < 0$ باشد، تابع نزولی است. تابع حقیقی نظیر دنباله را به صورت $f(x) = x^3 - 12x^2 + 128$ ، $(x \geq 1)$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8 \xrightarrow{x \geq 1} x = 8 \text{ قق}$$

با توجه به تعیین علامت f' متوجه می‌شویم در بازه $(1, 8)$ ، $f' < 0$ پس تابع یا دنباله نزولی است و در بازه $(8, +\infty)$ ، $f' > 0$ پس تابع یا دنباله صعودی است پس کمترین مقدار دنباله به ازای $n = 8$ به دست می‌آید چون دنباله قبل از آن نزولی و بعد از آن صعودی است، پس a_8 از جملات قبل و بعدش کوچک‌تر است.

$$\Rightarrow \text{Min} a_n = a_8 = -128$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۶)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۹۷

(آزاد غیرپزشکی - ۱۶)

راه حل اول: بدون محاسبه‌ی دقیق، مشاهده می‌شود که برای $n \geq 10$ صورت و مخرج کسر همواره مثبت بوده و علامت کسر به علامت $(-1)^n$ بستگی دارد که اگر n فرد باشد جمله‌ی دنباله منفی است بنابراین بی‌شمار جمله‌ی منفی داریم.
راه حل دوم: اگر n زوج باشد:

$$a_n = \frac{3n-4}{2n-19} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc|cc} & \frac{4}{3} & \frac{19}{2} & & \\ \hline & - & + & - & + \\ \hline \frac{3n-4}{2n-19} & - & - & + & + \\ \hline a_n & + & - & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} < n < \frac{19}{2} \Rightarrow \frac{n \in \mathbb{N}}{n \text{ زوج}} \rightarrow n \in \{2, 4, 6, 8\}$$

$$a_n = -\frac{3n-4}{2n-19} < 0 \Rightarrow \frac{3n-4}{2n-19} > 0 \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد:}$$

$$\Rightarrow n > \frac{19}{2} \text{ یا } n < \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{n \in \mathbb{N}}{n \text{ فرد}} \rightarrow n \in \{1, 11, 13, \dots\}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۶)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۰۰

(آزاد ریاضی عصر - ۱۵)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^5 + 1)}{\log(n^3 + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^5}{\log n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \log n}{3 \log n} = \frac{5}{3}$$

پس دنباله‌ی a_n به $\frac{5}{3}$ همگراست، با توجه به گزینه‌های داده شده دنباله صعودی یا نزولی است. پس برای تشخیص این مطلب کافی است جمله‌ی اول دنباله را به دست آوریم.

$$a_1 = \frac{\log(1^5 + 1)}{\log(1^3 + 1)} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$$

چون جمله‌ی اول از عدد همگرایی کوچکتر است، بنابراین دنباله‌ی a_n صعودی و همگراست.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ تا ۳۷)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۹۵

(آزاد ریاضی صبح - ۸۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n + 4^n)(2^{-n} + 4^{-n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} + 2^n + 1 \right)$$

دقت کنید حد $\frac{1}{2^n}$ صفر می‌شود، پس داریم:

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + 0 + 2^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۴ ✓

۳

۲

۱

-۹۶

(آزاد ریاضی عصر - ۸۱)

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u$$

$$\sin u + \cos u = \sqrt{2} \cos\left(u - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{گزینه‌ی (۱):}$$

$$= \sqrt{2} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos(n\pi) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{زوج } n \\ -\sqrt{2}, & \text{فرد } n \end{cases}$$

حد دنباله یکتا نبوده، پس دنباله همگرا نیست.

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{گزینه‌ی (۲):}$$

$$= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2 \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

دنباله نوسانی و واگرا است.

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{گزینه‌ی (۳):}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

دنباله ثابت و همگرا به $\frac{1}{2}$ است:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} 0 & : n = 2k \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & : n = 4k + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & : n = 4k - 1 \end{cases} \quad \text{گزینه‌ی (۴):}$$

حد دنباله یکتا نبوده پس واگراست.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

$$a_n = a_{n-1} \left(\cos \frac{x}{2^n} \right) \text{ و } a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 \left(\cos \frac{x}{2^1} \right) \Rightarrow a_1 = \cos \frac{x}{2}$$

$$a_2 = a_1 \left(\cos \frac{x}{2^2} \right) \Rightarrow a_2 = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^n} \quad (*)$$

با ضرب و تقسیم $\sin \frac{x}{2^n}$ در تساوی (*) و استفاده از رابطه‌ی $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \left(\cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n} \right)}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2^{n-1}} \right)}{\sin \frac{x}{2^n}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \left(\frac{1}{2^{n-2}} \sin \frac{x}{2^{n-2}} \right)}{\sin \frac{x}{2^n}} \Rightarrow a_n = \frac{\frac{1}{2^n} \sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} \quad \text{در نهایت داریم:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} \sin x}{\sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \times \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}$$

$$L = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} \quad \text{چون } x = \frac{\pi}{6} \text{ است، حاصل حد برابر است با:}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳ ✓

۲

۱

-۹۲

(سراسری تهرانی - ۸۱)

$$0 < \frac{3}{2^n} < \frac{1875}{10000} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{625}{10000} \Rightarrow 2^n > \frac{10000}{625} = 16$$

$$\Rightarrow 2^n > 2^4 \Rightarrow n > 4 \Rightarrow n_0 = 5$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۴

۳✓

۲

۱

-۹۳

(سراسری ریاضی - ۷۶)

دنباله‌ی $\{a_n\}$ با شرط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ به صورت زیر است:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

با روش استقراء ریاضی اثبات می‌کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم: $a_n < 2$.

$$a_1 < 2$$

$$a_k < 2 \Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{2a_k} < \sqrt{2 \times 2} = 2$$

پس دنباله کران‌دار است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

هم‌چنین:

پس $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ، در نتیجه دنباله صعودی است. در نتیجه دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و کران‌دار، یعنی همگراست.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۴✓

۳

۲

۱

ریاضی، ریاضیات گسسته - گواه، گراف‌ها و کاربردهای آن، نظریه‌ی گراف - ۱۳۹۴۰۸۲۲

-۱۳۱

(آزاد ریاضی - ۸۷)

۱۷ یال را در کم‌ترین رأس ممکن قرار می‌دهیم تا تعداد رأس‌های منفرد، زیاد شود. برای

داشتن ۱۷ یال، نیاز به حداقل ۷ رأس داریم. پس حداکثر $20 - 7 = 13$ رأس منفرد

داریم.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۴

۳

۲✓

۱

-۱۳۲

(سراسری ریاضی - ۸۳)

در گراف از مرتبه ی ۶. یک رأس درجه ی ۵ وجود دارد؛ پس a و b صفر نیستند. از طرفی دو رأس فرد، در گراف وجود دارد بنابراین a و b یا هر دو فردند یا هر دو زوج که در هر صورت $a+b$ عددی زوج است.

$$a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad a + b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

از آنجایی که گراف یک رأس درجه ی ۵ و یک رأس درجه ی ۴ دارد پس می تواند حداکثر یک رأس درجه یک داشته باشد یعنی $a + b = 4$

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۱۴ و ۱۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۳۳

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۲)

$$pq = 50 \Rightarrow p \times \frac{p(p-1)}{2} = 50 \Rightarrow p^2(p-1) = 100 \Rightarrow p = 5$$

$$K_5 \text{ تعداد دورهای به طول } 4 \text{ در } \binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 15$$

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۱۴ و ۱۵)

☐ ۴

☒ ۳

☐ ۲

☐ ۱

-۱۳۴

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

دورهای مطلوب عبارت اند از:

dcfabd bcfedb efcbae afcdea afedba abcdea

(ریاضیات گسسته - صفحه های ۱۲ تا ۱۵)

☒ ۴

☐ ۳

☐ ۲

☐ ۱

۱۳۵-

(سراسری ریاضی - ۹۱)

توجه شود که در گراف همبند رابطه‌ی $q \geq p-1$ برقرار است.

$$q + p = 8 = 4 + 4 = \underbrace{5 + 3}_{\text{غ ق ق}} \Rightarrow \begin{cases} q = 4 \\ p = 4 \end{cases}$$

تعداد یال های گراف کامل هم مرتبه‌ی آن $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ بوده پس

۲ یال باید به گراف همبند مورد نظر اضافه کرد تا کامل شود.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۲، ۱۴ و ۱۵)

۴

۳

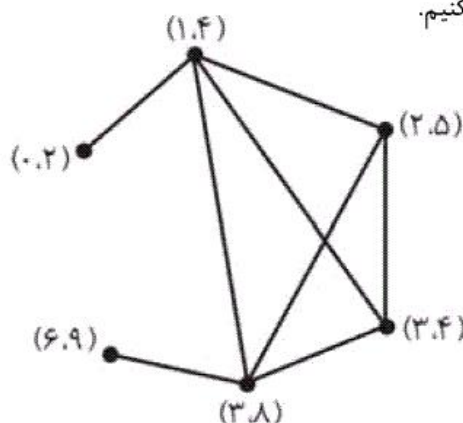
۲ ✓

۱

۱۳۶-

(سراسری ریاضی - ۹۰)

گراف متناظر را رسم می‌کنیم.



کافی است مسیرهای موجود از رأس متناظر با $(1,4)$ به رأس متناظر با $(3,4)$ را بیاییم. تعداد این مسیرها برابر ۵ است.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۹ و ۱۳)

۴

۳

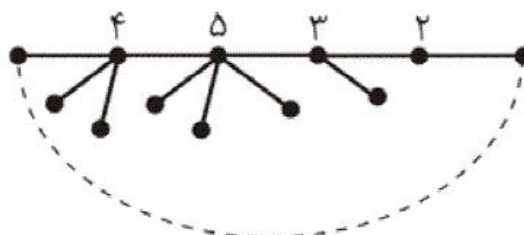
۲

۱ ✓

۱۳۷-

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۱۵)

گراف همبند فاقد دور یعنی درخت. آن را رسم می‌کنیم. با اضافه کردن یال نشان داده شده دوری به طول ۶ ایجاد می‌شود.



(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۴ و ۱۷ تا ۱۹)

۴

۳

۲ ✓

۱

-۱۳۸

(سراسری ریاضی - ۸۴)

حاصل جمع درایه‌های هر سطر یا ستون، درجه‌ی رأس نظیر آن سطر یا ستون می‌باشد. با توجه به ماتریس، درجات رئوس گراف ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌باشد که این درجات رئوس گراف گزینه‌ی ۱ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

-۱۳۹

(سراسری ریاضی - ۸۴)

$$۱۲۰ = ۵ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times \dots \times ۱$$

$$۱ \text{ درجه } = ۲ + ۱ \times (۵ - ۲) + ۱ \times (۳ - ۲) = ۶$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۷ و ۲۱)

۱ ۲ ✓ ۳ ۴

-۱۴۰

(آزاد ریاضی عصر - ۸۱)

اگر گراف K_8 بود، $\frac{۸ \times ۷}{۲} = ۲۸$ یال داشت. این گراف ۵ یال کمتر از K_8

دارد. برای آن که $\Delta - \delta$ حداکثر شود باید ۵ یال را از یک رأس حذف کنیم تا δ به کمترین مقدار ممکنش برسد.

$$\Rightarrow (\Delta - \delta)_{\max} = ۷ - ۲ = ۵$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

۱ ✓ ۲ ۳ ۴

