



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)



با پایست،
پایست بلیرید

ویژه امتحان نهایی



آمپول ریاضی ۳

مهندس مجتبی لیشینی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

الف علم

آمپول ریاضی (۳)

رشته علوم تجربی

سری کتابهای پیوست

مؤلف: مهندس مجتبی لشینی

مقدمه:

تصور کنید بانکی دارید که در آن هر روز ۸۶۴۰۰ تومان به حسابتان واریزی شود و تا آخر شب فرصت دارید تا همه پول‌ها را خرج کنید، چون آخر وقت حساب خود به خود خالی می‌شود و در این صورت چه می‌خواهید کرد؟ البته سعی می‌کنید تا آخرین ریال را خرج کنید. هر کدام از مایک چنین بانکی داریم: بانک زمان، هر روز صبح در بانک شما ۸۶۴۰۰ ثانیه اعتبار ریخته می‌شود و در آخر شب این اعتبار به پایان می‌رسد. هیچ برگشتی نیست و هیچ مقداری از این زمان به خود اضافه نمی‌شود هر چند گنج بزرگی است، گنجتان را مفت از دست ندهید. زمان به خاطر هیچ کس منتظر نمی‌ماند...

دیروز به تاریخ پیوست، فردا معماست و امروز هدیه است.

برگرفته از کتاب مکتوب

سألهاست که پس از برگزاری امتحانات نهایی، خیلی‌ها از معلوم بودن تیپ سؤالات ریاضی می‌گویند. در واقع مدت‌هاست که انقلاب عظیمی در سؤالات رخ نداده است. این بدان معناست که می‌توان با پیش‌بینی و حرکت صحیح تا حدودی روال سؤالات را حدس زد و با درپیش گرفتن استراتژی درست، نتیجه‌ی مطلوب را در این درس در کوتاه‌ترین زمان ممکن گرفت. این مجموعه یکی از بهترین منابع برای دوران امتحانات نهایی می‌باشد و براساس آخرین تغییرات کتاب درسی و روند سؤالات امتحانات نهایی ۳ سال اخیر تألیف شده است.

یکی از مهم‌ترین و برجسته‌ترین ویژگی‌های این کتاب طبقه‌بندی بسیار دقیق سؤالات و خلاصه درسنامه‌های روان و ابتکاری آن می‌باشد و اغراق نیست اگر بگوییم این کار به اندازه تألیف کتاب وقت گیر بوده است. در پایان از همه‌ی عزیزانی که با حمایت خود مراد نوشتن این کتاب یاری کردند قدردانی می‌کنم.

به امید موفقیت و ریدار مجرد همه شما عزیزان

مهندس مجتبی لشیینی

دو فصل اول این کتاب (کل ترم اول) به صورت رایگان می‌باشد و امیدوارم با این کار خدمتی به دانش آموزان سرزمینم کرده باشم

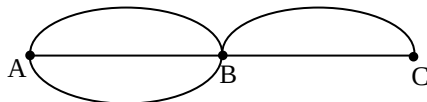
فصل اول : پدیده‌های تصادفی و احتمال

معمولاً بارم بندی این فصل در امتحانات نهایی ۴ نمره می باشد (سوال ۱ تا ۴)

پیش نیازها : برای این فصل مطالب آنالیز ترکیبی و اصول شمارش از دوم دبیرستان بسیار ضروری است که چند مورد مهم را در زیر یادآوری کرده‌ایم:

اصل ضرب : اگر دو عمل مستقل A و B پشت سر هم، یکی به n طریق و دیگری به m طریق قابل انجام باشد آنگاه این دو عمل به $m \times n$ طریق مختلف قابل انجام هستند.

((هرگاه بین اعمال از ((و)) استفاده شود از ضرب و هرگاه از ((یا)) استفاده شود از جمع استفاده می کنیم.))
مثال ۱: تعداد مسر های مختلف رفتن از A به C کدام است.



ابتدا باید از شهر A به شهر B برویم که این کار به ۳ طریق امکان دارد و سپس به ۲ طریق از شهر B به شهر C برویم.

$$(A \rightarrow C), (B \rightarrow C)$$

$$3 \times 2 = 6$$

مثال ۲: تعداد اعداد ۳ رقمی ساخته شده با اعداد (۱, ۲, ۳, ۴) به طوری که :

$$\text{الف) تکرار ارقام مجاز باشد : } \frac{4}{\text{یکان}} \times \frac{4}{\text{دهگان}} \times \frac{4}{\text{صدگان}} = 64$$

$$\text{ب) تکرار ارقام مجاز نباشد : } \frac{4}{\text{یکان}} \times \frac{3}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{صدگان}} = 24$$

نکته : در حل مسائل (بالاخص مسائل اعداد) برای استفاده از اصل ضرب ابتدا به سراغ خانه‌های شرط‌دار می رویم و سپس از سمت چپ خانه‌ها را پر می کنیم، مثلاً اگر اعداد ساخته شده زوج باشند خانه یکسان شرط دار است و فقط اعداد زوج در خانه یکسان میان قرار می گیرند.

مثال ۳: تعداد اعداد ۳ رقمی فرد ساخته شده با اعداد $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ به طوری که تعداد ارقام مجاز را بیابید.

حل : اگر بفرض اعداد ۳ رقمی فرد با اعداد $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ را بیابیم به طوری که تعداد ارقام مجاز باشد خانه یکان (به خاطر فرد بودن) و صدگان (صفر نباید در این خانه باشد) شرط دار هستند.

۹	۱۰	۵
---	----	---

یکان دهگان صدگان

یکی از ارقام $\{9, 7, 5, 3, 1\}$ بدون شرط همه ارقام به جز (۰)

نکته : سؤالات مربوط به پست و مقام (منشی، مدیر و) معمولاً با اصل ضرب حل می شوند و اگر بخواهیم از بین ۵ نفر (۴ حالت) کارمند را انتخاب کنیم به طوری که نفر اول مدیر (۵ حالت) و نفر دوم معاون شود تعداد کل حالات انتخاب $5 \times 4 = 20$ خواهد بود.

فاکتوریل: اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه فاکتوریل آن به صورت زیر تعریف می شود : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$

مثال ۴: حاصل $4!$ و $5!$ را بیابید.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

حل :

نکته: $(n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \dots)$, $0! = 1! = 1$

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3! = \dots$

جایگشت: هرگاه بخواهیم n شی متمایز را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم تعداد حالات مختلف برابر است با :

$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

مثال ۵: اگر بخواهیم ۵ نفر بر روی ۵ صندلی در یک ردیف قرار بگیرند تعداد کل حالات قرارگیری را بیابید:

حل: نفر اول ۵ انتخاب دارد و نفر بعدی ۴ انتخاب دارد « چون یک صندلی پر شده است » و ... و نفر آخر یک انتخاب دارد.

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ترکیب r تایی از n تایی ($r \leq n$): انتخاب r عضو از بین n عضو به طوری که در انتخاب اعضا جابه جایی و ترتیب قرار

گیری شان حالت جدیدی ایجاد نکند را ترکیب می گویند و برابر است با :
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

نکته: $\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1$ و $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

نکته: فرمول سریع محاسبه $\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \dots \times 1}$

مثال ۶: مقدار $\binom{5}{3}$ را بیابید.

حل: روش حل سریع: $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ روش حل عادی: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(2!)} = 10$

نکته: انتخاب گروه های انسانی و تیم ترکیب است.

مثال ۷: از بین ۱۰ نفر شاگرد یک کلاس می خواهیم ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کنیم. تعداد کل حالات انتخاب را بیابید:

حل: چون ۳ نفر انتخاب شده در نهایت در یک تیم هستند و تعداد کل حالات برابر است با :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

(آزمایش) پدیده قطعی: پدیده یا آزمایش که نتیجه آن قبل از انجام آزمایش به طور قطع و یقین مشخص باشد، پدیده یا آزمایش قطعی گوئیم. به طور مثال اگر سنگی را در حوض آب بیاندازیم به طور قطع در آب فرو می رود.

(آزمایش) پدیده تصادفی: به آزمایشی گفته می شود که نتیجه آن از قبل معلوم نیست. به طور مثال اگر تاسی را پرتاب کنیم معلوم نیست پس از افتادن کدام یک از اعداد ۱ تا ۶ نشان می دهد ولی به هر حال یکی از آنها خواهد بود.

فضای نمونه ای: به مجموعه همه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی فضای نمونه ای آن آزمایش می گویند و آن را با نماد S نمایش می دهند.

تذکره: فضای نمونه ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشند، فضای نمونه ای گسسته می نامیم و اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می دهیم.

فضاهای نمونهای مهم :

تعداد اءضای فضای نمونهای: $n(S)$	فضای نمونهای S	پءیءه تصافی
$n(S) = ۲^*$	$S = \{ \text{رو} , \text{پشت} \}$	انءاخفن یک سكه
$n(S) = ۶^{**}$	$S = \{ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \}$	انءاخفن یک تاس
$n(S) = ۲ \times ۲ = ۴^{***}$	$S = \{ (د,د), (د,پ), (پ,د), (پ,پ) \}$	تولد دو فرزند در یک خانواه
$n(S) = ۳! = ۶$	$S = \{ abc, acb, bac, bca, cab, cba \}$	كنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به طور تصافی
$n(S) = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!۲!} = ۶$	$S = \{ ab, ac, ad, bc, bd, cd \}$	انءخاب ۲ حرف از بین حروف a و b و c و d (بءون در نظر گرفتن ترتیب)
$n(S) = ۲ \times ۲ = ۴$	$S = \{ (\bar{آ}, \bar{آ}), (\bar{آ}, ق), (ق, \bar{آ}), (ق, ق) \}$	انءخاب تصافی ۲ مهره از جعبهای كه در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی یكسان وجود دارد
$n(S) = ۴ \times ۳ = ۱۲$	$S = \{ ۱۲, ۲۱, ۱۴, ۴۱, ۱۶, ۶۱, ۲۴, ۴۲, ۲۶, ۶۲, ۴۶, ۶۴ \}$	انءخاب تصافی ۲ رقم از بین ارقام ۶ و ۴ و ۲ و ۱ و ساختن عدد دو رقمی

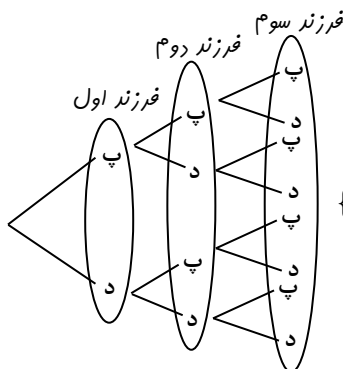
* تعداد اءضای فضای نمونه انءاففن n سكه با هم n بار پرتاب یک سكه برابر اسف با : ۲^n

** تعداد اءضای فضای نمونه انءاففن n تاس با هم n بار پرتاب یک تاس (برابر اسف با : ۶^n

*** تعداد اءضای فضای نمونهای فانواهه ای با n فرزند برابر اسف با : ۲^n

پیشامء: به هر زیر مجموعه ای از فضای نمونه یک پیشامء می گوینء و آن را با نماء A نشان می دهند و تعداد اءضوهای پیشامء را با $n(A)$ نمایش می دهند. [پیشامء حالت مطلوب و خواسته شده در مساله اسف]

مءال ۸: خانواه ای دارای سه فرزند اسف .



الف) فضای نمونه ای را بنویسید و تعداد اءضوهای آن را مشخص کنید.

حل : به كمكم نمواار در رفتی از روی شافها مركت می كنیم فاكلیه هالاء را بنویسیم. فو به كنیره نوشفن نمواار در رفتی به ما كمك می كند كه هیچ هالی را فراموش نكنیم.

$$\Rightarrow S = \{ (پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د) \} \rightarrow n(A) = \binom{۳}{۲} = ۳$$

ب) پیشامء A كه فقط ۲ پسر داشته باشد را بنویسید و تعداد اءضوهای آن را مشخص کنید .

$$\{ A = \{ (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ) \} \Rightarrow n(A) = \binom{۳}{۲} = ۳$$

ج) پیشامء B كه حداقل ۲ فرزند دختر باشد را بنویسید و تعداد اءضوهای آن را مشخص کنید .

$$\{ B = \{ (د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د) \} \Rightarrow n(B) = ۴$$

حل : حداقل ۲ دختر یعنی ۲ دختر یا ۳ دختر

مءال ۹: یک تاس و یک سكه را با هم پرتاب می كنیم :

الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصافی را بنویسید .

$$S = \{ (۱, پ), (۱, د), (۲, پ), (۲, د), (۳, پ), (۳, د), (۴, پ), (۴, د), (۵, پ), (۵, د), (۶, پ), (۶, د) \}$$

ب) پیشامء آنكه سكه ((رو)) یا تاس ۵ بیاید را مشخص کنید.

$$A = \{ (۱, ر), (۲, ر), (۳, ر), (۴, ر), (۵, ر), (۶, ر), (۵, پ), (۵, د) \}$$

حل : چون با هم پرتاب كرده ایم ترتیب مهم نیست .

مثال ۱۰: تاس را دو بار پرتاب می کنیم .

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

حل : طبق جدول گفته شده در صفحه قبل : $n(S) = 6 \times 6 = 6^2 = 36$

ب) پیشامد A که در آن عدد رو شده تاس اول ۳ باشد را مشخص کنید .

حل : صورت سؤال گفته است تاس اول ۳ باشد پس تکلیف آن معلوم است و تاس دوم چون سؤال شرطی در مورد آن نگذاشته است همه اعداد ۱ تا ۶ می‌تواند باشد و بهترین روش برای حل این سؤالات نوشتن تمامی زوج‌های مرتب است.

$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

ج) پیشامد B که در آن مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد را مشخص کنید .

حل : تعداد کل حالات فوایسته شده را می‌نویسیم . $B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

تعریف احتمال : فرض کنید که S فضای نمونه‌ای است . اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد آنگاه :

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}}$$

مثال ۱۱: احتمال اینکه در پرتاب یک تاس عدد زوج بیاید را بیابید :

حل : گام اول $\Leftarrow$ ابتدا تعداد حالات فضای نمونه‌ای ((n(s)) را می‌نویسیم . $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(s) = 6$

گام دوم $\Leftarrow$ تعداد حالات شرط فوایسته شده در مسئله (تعداد پیشامدهای مطلوب ((n(A)) را محاسبه می‌کنیم.

گام سوم $\Leftarrow$ طبق فرمول احتمال $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم : $A = \{2, 3, 4\} \rightarrow n(A) = 3$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

نکته : اگر احتمال حتمی باشد مقایسه $p(A)$ برابر با ۱ و اگر نشدنی باشد مقدار $p(A)$ برابر با صفر است و همیشه داریم :

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

مثال ۱۲: در فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس پیشامد رو شدن عدد بزرگتر از ۶ یک پیشامد است .

حل : غیر حتمی

مثال ۱۳: یک عدد دو رقمی که ارقام آن $\{0, 1, 2\}$ و غیر تکراری باشند انتخاب می‌کنیم به کدام احتمال این عدد بر ۳ بخش پذیر است ؟

حل : گام اول $\Leftarrow$ تعداد کل حالات فضای نمونه‌ای ((n(s)) را بنویسیم (ارقام دو رقمی با $\{0, 1, 2\}$ و غیر تکراری)

$$S = \{12, 21, 10, 20\} \rightarrow n(s) = 4$$

$$A : \{12, 21\} \rightarrow n(A) = 2$$

گام دوم $\Leftarrow$ تعداد کل حالات مطلوب مسئله ((n(A)) را می‌نویسیم :

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

گام سوم $\Leftarrow$ طبق فرمول احتمال $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

مثال ۱۴: از بین ۸ نفر رشته ریاضی و ۹ نفر رشته تجربی ۲ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم . به کدام احتمال هم رشته نمی‌باشند؟

حل : چون ترتیب مهم نیست پس به کمک ترکیب $n(s)$, $n(A)$ و $p(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \binom{17}{2} = \frac{17 \times 16}{2 \times 1} = 17 \times 8 \\ n(A) &= \binom{8}{1} \times \binom{9}{1} = 8 \times 9 \end{aligned} \right\} \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8 \times 9}{17 \times 17} = \frac{9}{17}$$

۱ نفر ریاضی ۱ نفر تجربی

مثال ۱۵: سکه‌ای را ۶ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این که دقیقاً دوبار شیر بیاید چقدر است؟

حل: دقیقاً دوبار شیر یعنی ۲ بار شیر و ۴ بار دیگر خط است و اگر تکرار حالات انتخاب ۲ بار شیر معلوم شود خود به خود جای خط‌ها معلوم می‌شود و نیازی به نوشتن ندارد.

$$n(S) = 2^6$$

$$n(A) = n(\text{دقیقاً ۲ بار شیر بیاید}) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \quad \left\{ \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64} \right.$$

مثال ۱۶: می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن یک کمیته ۳ نفری انتخاب کنیم مطلوبست احتمال آن که:

الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود. ب) هر سه مرد باشند.

حل: فضای نمونه‌ای انتخاب ۳ نفر از ۵ + ۳ نفر است بنابراین:

$$n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 8 \times 7 = 56$$

الف) حداکثر یک مرد انتخاب شود یعنی یا یک مرد انتخاب شود یا هیچ مردی انتخاب نشود.

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1} \times \binom{3}{2}}_{\text{۱ مرد ۲ زن}} + \underbrace{\binom{5}{0} \times \binom{3}{3}}_{\text{۰ مرد ۳ زن}} = (5 \times 3) + (1 \times 1) = 16 \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{16}{8 \times 7} = \frac{2}{7}$$

ب) هر سه مرد باشند یعنی تمام افراد را از مردها انتخاب کنیم.

$$n(B) = \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳ مرد ۰ زن}} \times \underbrace{\binom{3}{0}}_{\text{۰ زن}} = 10 \times 1 = 10 \rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{10}{8 \times 7} = \frac{5}{28}$$

مثال ۱۷: از جعبه‌ای شامل ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوبست محاسبه احتمال آن که:

الف) سه مهره هم‌رنگ باشند. ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشند.

حل: فضای نمونه‌ای انتخاب سه مهره از بین ۹ + ۴ = ۹ است بنابراین:

$$n(S) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 3 \times 4 \times 7$$

الف) هر سه مهره قرمز یا هر سه مهره آبی باشند.

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{هر ۳ قرمز}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{هر ۳ آبی}} = 10 + 4 = 14 \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{3 \times 4 \times 7} = \frac{1}{6}$$

$$n(B) = \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{۲ آبی}} \times \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{۱ قرمز}} = 6 \times 5 = 30 \rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6 \times 5}{3 \times 4 \times 7} = \frac{5}{14}$$

ب)

مثال ۱۸: در کیسه‌ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد، از این کیسه ۴ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال

اینکه حداکثر ۲ مهره آبی باشد چقدر است؟

حل: حداکثر ۲ مهره آبی یعنی یا ۲ مهره آبی یا ۱ مهره آبی و یا هیچ مهره آبی انتخاب نشود.

فضای نمونه انتخاب ۴ مهره از ۱۲ = ۵ + ۴ + ۳ مهره می‌باشد.

$$n(S) = \binom{12}{4} \quad \left\{ \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{462}{495} \right.$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{4}{2} \binom{8}{2}}_{\text{۲ بقیه آبی ۲ بقیه ۲ آبی}} + \underbrace{\binom{4}{1} \binom{8}{3}}_{\text{۳ بقیه آبی ۱ آبی}} + \underbrace{\binom{4}{0} \binom{8}{4}}_{\text{۴ بقیه آبی ۰ آبی}}$$

مثال ۱۹: از بین ۴ دانش آموز سال سوم و ۶ دانش آموز سال دوم ، سه نفر را به تصادف انتخاب می کنیم . احتمال آن که حداکثر یک دانش آموز از سال سوم باشد چقدر است ؟
 حل: هر اکثر یک دانش آموز از سال سوم باشد یعنی یک دانش آموز از سال سوم و دو دانش آموز از سال دوم یا هیچ دانش آموز از سال سوم و هر سه دانش آموز از سال دوم باشند.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}^{\text{نفر سوم}} + \overbrace{\binom{6}{3} \binom{4}{0}}^{\text{نفر دوم}}}{\underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{نفر از کل}}} = \frac{(4 \times 15) + 20}{120} = \frac{2}{3}$$

مثال ۲۰: از ۴ دانش آموز سال اول و ۵ دانش آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده اند . احتمال آنکه ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند را محاسبه کنید .

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\overbrace{\binom{4}{2} \times \binom{5}{4}}^{\text{نفر سال اول}}}{\binom{9}{6}} = \frac{6 \times 5}{84} = \frac{5}{14}$$

مثال ۲۱: ۴ نفر را در نظر می گیریم ، چقدر احتمال دارد :

(الف) هر ۴ نفر در یک روز هفته متولد شده باشند ؟

حل: تعداد حالات انتفاب های نفرات اول تا چهارم را می نویسیم و بعد طبق فرمول احتمال را می یابیم.

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \frac{7}{\text{نفر اول}} \times \frac{7}{\text{نفر دوم}} \times \frac{7}{\text{نفر سوم}} \times \frac{7}{\text{نفر چهارم}} = 7^4 \\ n(A) &= \frac{7}{\text{نفر اول}} \times \frac{1}{\text{نفر دوم}} \times \frac{1}{\text{نفر سوم}} \times \frac{1}{\text{نفر چهارم}} = 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{7^4} = \frac{1}{7^3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$$

(ب) هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده باشند .

حل:

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= 7^4 \\ n(B) &= \frac{7}{\text{نفر اول}} \times \frac{6}{\text{نفر دوم}} \times \frac{5}{\text{نفر سوم}} \times \frac{4}{\text{نفر چهارم}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{7^4} = \frac{120}{7^3}$$

$$\left. \begin{aligned} p(A) &= \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 & \text{(الف)} \\ p(B) &= \left(\frac{7}{7}\right) \times \left(\frac{6}{7}\right) \times \left(\frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{120}{7^3} & \text{(ب)} \end{aligned} \right\} \text{روش دوم:}$$

مثال ۲۲: چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره :

(الف) همه در ماه تیر متولد شده باشند ؟

حل: احتمال تولد نفر اول در تیر ماه $\frac{1}{12}$ و احتمال تولد نفر دوم $\frac{1}{12}$ و احتمال تولد نفر سوم $\frac{1}{12}$ است، پس در هم ضرب می کنیم.

$$p(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^3$$

(ب) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند ؟

سوال ۱۲: نفر اول در ۱۲ ماه سال می‌تواند متولد شود پس احتمال آن $\frac{1}{12}$ است و نفر دوم در ۱۱ ماه باقی مانده می‌تواند متولد شود پس احتمال آن $\frac{1}{11}$ است.

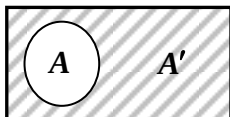
سوال ۱۱: نفر سوم در ۱۰ ماه باقی مانده می‌تواند متولد شود پس احتمال آن $\frac{1}{10}$ است.

$$p(B) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1320}$$

مثال ۲۳: اعداد ۹ و ... و ۲ و ۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آنها هم زمان بیرون می‌آوریم. مطلوبست احتمال اینکه مجموع این دو کارت برابر ۱۱ شود؟

$$\left. \begin{aligned} n(S) &= \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \\ A &= \{(2,9), (3,8), (4,7), (5,6)\} \Rightarrow n(A) = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

متهم پیشامد A: متهم پیشامد A را با A' نشان می‌دهیم که در واقع پیشامدی است که اگر رخ دهد A رخ نمی‌دهد.



$$A \cup A' = S \Rightarrow p(A) + p(A') = p(S) \rightarrow p(A') = 1 - p(A)$$

مثال ۲۴: درست یا نادرست بودن جمله زیر را مشخص کنید.

اگر A' متهم پیشامد A باشد آنگاه A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

سوال: درست

مثال ۲۵: نسبت احتمال رخ دادن یک پیشامد به احتمال رخ ندادن آن $\frac{1}{3}$ است. مطلوبست احتمال اینکه پیشامد رخ دهد.

$$\frac{p(A)}{p(A')} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{p(A)}{1 - p(A)} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3p(A) = 1 - p(A) \Rightarrow 4p(A) = 1 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{4}$$

مثال ۲۶: در پرتاب یک تاس اگر احتمال فرد بودن $\frac{1}{4}$ باشد، احتمال اینکه تاس زوج بیاید را محاسبه کنید.

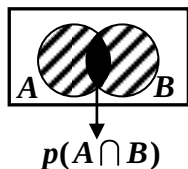
$$1 - p(\text{فرد بودن}) = p(\text{زوج بودن}) = \frac{1}{4}$$

سوال: می‌دانیم که تاس ۲ حالت زوج و فرد دارد و این ۲ می‌توانند متهم یکدیگر باشند.

نکته: اگر کلمه حداقل یکی در تستی بود می‌توان از روش متهم استفاده کرد و وقتی محاسبه $p(A)$ خیلی طولانی بود از روش متهم استفاده می‌کنیم.

اعمال روی پیشامدها و حالت‌های خاص مهم:

اگر A و B دو پیشامد باشند: احتمال اینکه دو پیشامد A و B با هم رخ دهند را با $p(A \cap B)$ نشان می‌دهیم و احتمال اینکه یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد.

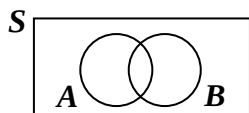


$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

احتمال اینکه حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد

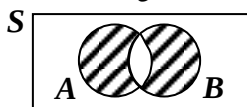
احتمال اینکه هر دو پیشامد A و B رخ دهند

اکثر بچه‌ها نمی‌دانند چه زمانی از فرمول فوق باید استفاده کنند. باید به آنها بگوییم یکی از نشانه‌ها این است که در صورت سؤال «یا» برای جدا کردن دو عمل مختلف می‌آید. مثلاً «چقدر احتمال دارد علی یا حسن در کنکور قبول شوند؟» هم‌چنین، یکی دیگر از نشانه‌ها وجود عبارت «حداقل یکی از دو» در صورت مسئله است.



مثال ۲۷: با توجه به شکل مقابل، پیشامد $(A-B) \cup (B-A)$ را هاشور بزیند.

کل: $(A-B)$ یعنی بخش‌هایی که در A باشند و در B نباشند و همچنین $B-A$ یعنی بخش‌هایی که در B باشند ولی در A نباشند.



مثال ۲۸: اگر $p(A') = 0/3$, $p(B) = 0/7$, $p(A \cup B) = 0/9$ آنگاه حاصل $p(A \cap B)$ را بدست آورید.

کل: $p(A) = 1 - p(A') = 1 - 0/3 = 0/7$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow 0/9 = 0/7 + 0/7 - p(A \cap B) \rightarrow p(A \cap B) = 1/4 - 0/9 \Rightarrow p(A \cap B) = 0/5$

مثال ۲۹: عددی را به تصادف از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \rightarrow n(S) = 9 \\ A = \{2, 4, 6, 8\} \rightarrow n(A) = 4 \rightarrow p(A) = \frac{4}{9} \\ \quad \text{زوج بودن} \\ B = \{3, 6, 9\} \rightarrow n(B) = 3 \rightarrow p(B) = \frac{3}{9} \\ \quad \text{مضرب ۳ بودن} \\ A \cap B = \{6\} \rightarrow n(A \cap B) = 1 \rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{9} \\ \quad \text{زوج و مضرب ۳ بودن} \end{array} \right\} \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

کل: $\frac{2}{3}$

دو پیشامد ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌نامند. هرگاه اگر یکی رخ دهد دیگری نتواند رخ دهد و یا

$A \cap B = \emptyset$ یا $p(A \cap B) = 0$ و برای دو پیشامد ناسازگار داریم $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ زیرا:

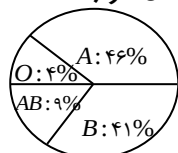
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \xrightarrow[\text{ناسازگارند}]{\text{دو پیشامد A و B}} \begin{cases} p(A \cap B) = 0 \\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) \end{cases}$$

مثال ۳۰: اگر $p(A) = \frac{1}{3}$, $p(B') = \frac{3}{4}$ و دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $p(A \cup B)$ را بدست آورید.

کل: $p(B) = 1 - p(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

A و B ناسازگارند $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

مثال ۳۱: با توجه با نمودار مقابل که گروه خونی افراد جامعه را نشان می‌دهد، اگر شخص مجروحی به بیمارستان مراجعه کند مطلوبست احتمال اینکه گروه خونی او از نوع A یا B یا AB باشد.



راه اول: با توجه به اینکه گروه‌های فونی ناسازگارند و اشتراکی ندارند احتمالات آن‌ها را با هم جمع کنیم.

$p(A \cup B \cup AB) = p(A) + p(B) + p(AB) = \frac{46}{100} + \frac{41}{100} + \frac{9}{100} = \frac{96}{100}$

راه دوم: (متمم) $p(A \cup B \cup AB) = 1 - p(O) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$

مءال ۳۲: خانوااءای اارای سه فرزند اسء . اگر A پیشامء هم جنس بوءن ءو فرزند اول و B پیشامء وءوء یك فرزند پسر در این خانوااء باءء :

الف) فضای نموءه‌ای این آزمایش تصا؁فی را مشخص كنیء .

ب) پیشامءه‌ای A و B را مشخص كنیء .

ج) آیا ءو پیشامء A و B ناسازگارنء ؟ چرا؟

سكءل :

الف) $S = \{ (پ،پ،پ)، (پ،پ،ء)، (پ،ء،پ)، (پ،ء،ء)، (ء،پ،پ)، (ء،پ،ء)، (ء،ء،پ)، (ء،ء،ء) \}$ فضای نموءه‌ای

ب) $B = \{ (پ،پ،پ)، (پ،پ،ء)، (پ،ء،پ)، (پ،ء،ء) \}$ یك پسر از ۳ فرزند $A = \{ (پ،پ،پ)، (پ،پ،ء)، (پ،ء،پ)، (پ،ء،ء) \}$ ءو فرزند اول پسر یا ؁فءر

ج) A و B سازگارنء . $A \cap B = \{ (پ،پ،پ) \} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$

پیشامءه‌ای مسءقل: ءو پیشامء A و B را مسءقل می نامنء هرگاه وقوء یكی در اءءمال وقوء ؁یگری اءثیری نءاشءه باءء ، برای ءو پیشامء مسءقل اءءمال وقوء A و B از رابطه‌ی زیر به ؁سء می آییء :

$$\begin{cases} p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B) \end{cases} \begin{matrix} \text{ءو پیشامء A و B} \\ \text{مسءقل} \end{matrix}$$

نكءه : معمولاً اءءمال‌هایی كه ناسازگارنء به راءءی قابل اءشءیص اسء و در بءش‌هایی كه نمی‌ءوانیم $P(A \cap B)$ را مءاسبه كنیم كءاب ؁رسی مءرء شده‌انء می ءوان به قبولی افراد در ؁انشگاه ، بهبوء بیماری افراد ، ءولء و وفاء و پءءاب سكه و ءاس اءاره كرء.

مءال ۳۳: یك ءاس و یك سكه را با هم پءءاب می كنیم

الف) فضای نموءه‌ای این آزمایش تصا؁فی را بنویسییء.

ب) پیشامء A كه در آن ءاس ؁ءء فرء بیایء را مشخص كنیء .

ج) پیشامء B كه در آن سكه ((رو)) و ءاس ؁ءء كوچكءر از ۵ بیایء را مشخص كنیء .

ء) آیا ءو پیشامء A و B مسءقل‌انء؟ چرا؟

سكءل :

الف) $S = \{ (پ،پ)، (پ،ء)، (ء،پ)، (ء،ء)، (پ،پ)، (پ،ء)، (ء،پ)، (ء،ء)، (پ،پ)، (پ،ء)، (ء،پ)، (ء،ء) \} \Rightarrow n(S) = 12$

ب) $A = \{ (پ،پ)، (پ،ء)، (ء،پ)، (ء،ء) \} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

ج) $B = \{ (پ،پ)، (پ،ء)، (ء،پ)، (ء،ء) \} \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

ء) $A \cap B = \{ (پ،پ)، (پ،ء) \} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$p(A) \times p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq p(A \cap B) \Rightarrow$ A و B مسءقل انء.

مءال ۳۴: ءاس را ؁وبار پءءاب می كنیم.

الف) ءءءاء اءضای فضای نموءه‌ای این آزمایش تصا؁فی را مشخص كنیء .

ب) پیشامء A كه در آن ؁ءء رو شده ءاس اول ۳ باءء را مشخص كنیء .

ج) پیشامء B كه در آن مءموء اءءاء رو شده ءو ءاس ۷ باءء را مشخص كنیء .

ء) مسءقل بوءن یا نبوءن ءو پیشامء A و B را با ؁ءیل مشخص بنویسییء.

حل :

الف) $n(S) = ۳۶$

ب) $A = \{(۳, ۱)(۳, ۲)(۳, ۳)(۳, ۴)(۳, ۵)(۳, ۶)\}$

ج) $B = \{(۱, ۶)(۶, ۱)(۲, ۵)(۵, ۲)(۳, ۴)(۴, ۳)\}$

د) $p(A) = \frac{۱}{۶} \quad p(B) = \frac{۱}{۶} \quad p(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶}$

پس A و B مستقل اند $\Rightarrow \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}$: مفهوم مستقل بودن

مثال ۳۵: احتمال قبولی علی و محمد در المپیاد زیست شناسی به ترتیب ۸۰٪ و ۶۰٪ است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را بدست آورید :

الف) هر دوی آنها در المپیاد قبول شوند .

ب) حداقل یکی از آنها در المپیاد قبول شود.

حل :

الف : قبول شدن هر کدام ، مستقل از قبول شدن دیگری است بنابراین:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۴۸$$

ب : حداقل یکی از آنها در المپیاد قبول شود یعنی $A \cup B$ بنابراین:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۸ - ۰/۴۸ = ۰/۹۲$$

خودکاریامداد

هنگامی که ناسابنامه فرستادن فضانوردان به فضا آغاز کرد، با مشکل کوچکی روبرو شد. آنها دریافتند که خودکارهای موجود در فضای بدون جاذبه کار نمی کنند.

جوهر خودکار به سمت پایین جریان نمی یابد و روی سطح کاغذ نمی ریزد. برای حل این مشکل آنها شرکت مشاورین اندرسون را انتخاب کردند. تحقیقات بیش از یک دهه طول کشید، ۱۲ میلیون دلار صرف شده و در نهایت آنها خودکاری طراحی کردند که در محیط بدون جاذبه به نوشت، زیر آب کار می کرد، روی هر سطحی حتی کریستال می نوشت و از دمای زیر صفر تا ۳۰۰ درجه سانتیگراد کار می کرد.

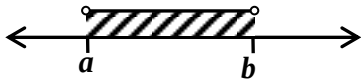
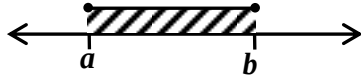
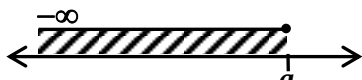
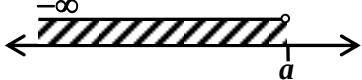
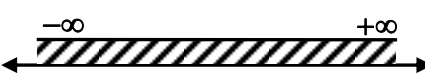
روس ها راه حل ساده تری داشتند: آنها از مداد استفاده کردند!

شما چه فکر می کنید کدامیک بهتر عمل کرده اند؟

فصل دوم : تابع

معمولاً بارم بنری این فصل در امتفانان نهایی ۷ نمره می باشد. (سوال ۵ تا ۹)

انواع بازه‌ها:

نوع	نمودار روی بردار	نماد مجموعه	نماد بازه	نام
کران دار		$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	بازهی باز
		$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بازهی بسته
		$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	بازهی نیمه باز
		$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
کران دار یک طرفه		$\{x : x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	بازهی نامتناهی
		$\{x : x < a\}$	$(-\infty, a)$	
		$\{x : x \geq b\}$	$[b, +\infty)$	
		$\{x : x > b\}$	$(b, +\infty)$	
بی کران		$\{x : \text{عددی حقیقی است} : x\}$	$(-\infty, +\infty)$	

جواب‌های نامعادلات به صورت بازه است پس حتماً بازه‌ها را به خوبی فرا بگیرید.



مثال ۱: اگر $A = [-1, 3]$ و $B = [2, 3]$ باشد آنگاه $A \cup B$ برابر است با ...

حل : $A \cup B = [-1, 3]$

مثال ۲: اگر $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{2x}{3} \geq 2\right\}$ و $B = (-1, 2)$ باشد :

الف) جواب مجموعه‌ی A را تعیین کنید . ب) مجموعه‌ی $A \cap B$ را به وسیله‌ی بازه نمایش دهید .

حل : الف) $\frac{2x}{3} \geq 2 \xrightarrow{\times 3} 2x \geq 6 \xrightarrow{+2} x \geq 3 \Rightarrow [3, +\infty)$

ب) A و B را به کمک جدول بازه‌ها روی بردار می‌کشیم و بعد اشتراک آنها را مناسبه کرده و می‌نویسیم. $A = [3, +\infty)$ و $B = (-1, 2)$



دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

مثال ۳: اگر $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x-2}{3} \geq -2 \right\}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 7 \}$ باشد، مجموعه های زیر را به وسیله بازه نمایش دهید.

الف) A ب) B ج) $A-B$ د) $A \cap B$

حل: الف) $\frac{2x-2}{3} \geq -2 \xrightarrow{\times 3} 2x-2 \geq -6 \xrightarrow{+2} 2x \geq -4 \xrightarrow{\div 2} x \geq -2 \Rightarrow A = [-2, +\infty)$ (سکله: الف)

ب) $B = (-3, 7]$

ج) $A-B$ ، یعنی عضوهایی که در A باشند و در B نباشند پس: $A-B = [-2, +\infty) - (-3, 7] = (+7, +\infty)$



حل معادلات گویا: برای حل اینگونه معادلات کافیست معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها (ک.م.م) ضرب کنیم تا مخرج های کسرها رو از بین ببریم سپس معادله ی ساده ی به دست آمده را حل می کنیم.
*دقت کنید ریشه هایی که به دست می آیند نباید مخرج کسرها را صفر کنند.

تذکره ۱: اگر ۲ تا کسر داشتی واسه امتحان نهایی بهتره همه رو ببری یک طرف و مخرج مشترک بگیری. آخر سر صورت را مساوی صفر قرار می دهی.

تذکره ۲: اگر ۳ تا کسر داشتی یکی از کسرها رو که مخرج حاصل ضرب دوتا مخرج دیگر است را سمت چپ و دوتای دیگر را طرف راست ببر و مخرج مشترک بگیر سپس مخرج ها را با هم بزن.

مثال ۴: تعداد جواب های معادله $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$ کدام است؟

حل:

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) - (x+1)(x-4) = 0 \rightarrow$$

$$(x^2 + x - 6) - (x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow x + 3x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال ۵: تعداد جواب های معادله $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$ کدام است؟

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{1+x}{x} \Rightarrow \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} = \frac{(x+1)(x-2) + x(x-1)}{x(x-2)}$$

$$x^2-2x+2 = x^2-x-2+x^2-x \Rightarrow x^2-2x+2 = 2x^2-2x-2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$

(غ ق) چون مخرج را صفر می کند
قابل قبول است

مثال ۶: تعداد جواب های معادله $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

حل: طرفین را در $k.m.m$ مخرج ها ضرب می کنیم: پس در $(x-2)(x+2)$ ضرب می کنیم.

$$(x-2)(x-2) + x(x+2) = 8 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2+2x=8 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \xrightarrow{\div 2} x^2-x-2=0 \rightarrow$$

$$(x+1)(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

نکته: در معادله $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+b+c=0$ باشد آنگاه $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$ و اگر $a+c=b$ باشد آنگاه $\begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$ است.

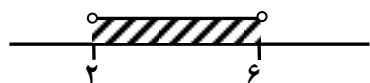
مثال ۷: به ازای چه مقدار k معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است ؟

حل: وقتی $x=1$ جواب معادله است پس در آن صدق می کند پس :

$$\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{1-2} + \frac{8}{k} = \frac{3 \times 1}{1+2} \Rightarrow -1 + \frac{8}{k} = 1 \Rightarrow \frac{8}{k} = 2 \Rightarrow \boxed{k=4}$$

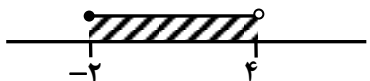
حل نا معادلات شامل عبارات گویا: تمام عبارات رو بیار یه طرف نا مساوی و بعد از مخرج مشترک و ساده کردن عبارت حاصل رو تعیین علامت کن و مجموعه جواب رو به صورت بازه بنویس . گاهی اونقدر آسونه که تعیین علامت هم نیازی نداره!

مثال ۸: نامعادله $2 < \frac{x}{2} + 1 < 4$ را حل کنید و مجموعه ی جواب را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.



حل: $2 < \frac{x}{2} + 1 < 4 \xrightarrow{(-1)} 1 < \frac{x}{2} < 3 \xrightarrow{\times 2} 2 < x < 6$

مثال ۹: نامعادله $-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.



حل: $-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 2x+1 < 9 \xrightarrow{(-1)} -4 \leq 2x < 8 \xrightarrow{\div 2} -2 \leq x < 4$

مثال ۱۰: نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید .

حل: $\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x=3, x=-1 \\ (2x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x=\frac{1}{2}, x=2 \end{cases}$

x	$+\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x - 1)(x - 2)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
عبارات کل	$+$	0	$-$	$+$	$-$	0	$+$

مجموعه جواب $= [-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$

مثال ۱۱: نامعادله $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} \geq 1$ را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

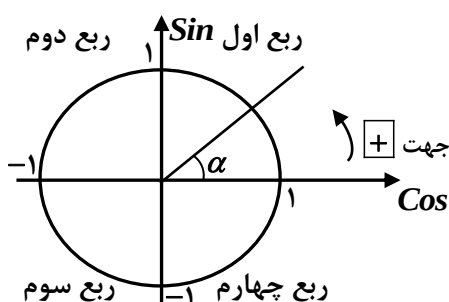
x	$+\infty$	1	2	$+\infty$
$4x-4$	$-$	$+$	0	$+$
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	$+$
$\frac{4x-4}{x^2-3x+2}$	$-$	$-$	$+$	

حل: $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{\frac{4(x-1)}{4x-4}}{\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x-2)}} \geq 0$

مجموعه جواب $= (2, +\infty)$

یادآوری و تکمیل از مثلثات: دایره مثلثاتی دایره ای به شعاع یک را دایره مثلثاتی می نامیم و جهت خلاف عقربه های ساعت را جهت مثبت در نظر می گیریم .



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

قانون هسنگ: برای علامت نسبت های مثلثاتی در هر ربع



س: سینوس در ربع دوم مثبت

ه: همه در ربع اول مثبت

ک: کسینوس در ربع چهارم مثبت

ت: تانژانت در ربع سوم مثبت

تذکره: هسنگ برای sin و cos و tan است و cot همیشه مثل علامت tan است.

زاویه های معروف:

زاویه نسبت	$(0)^\circ$	$(30)^\circ$	$(45)^\circ$	$(60)^\circ$	$(90)^\circ$	$(180)^\circ$	$(270)^\circ$	$(360)^\circ$
	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
Cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
Tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
Cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

فرمول های مهم:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha & \text{I} \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha & \text{II} \end{cases}$$

$$2) \operatorname{Tg} \alpha \times \operatorname{Cot} \alpha = 1$$

$$3) 1 + \operatorname{Tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$4) 1 + \operatorname{Cot}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$5) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \xrightarrow{\alpha=\beta} \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{\text{حالات کلی}}$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$6) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta \xrightarrow{\alpha=\beta} \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \begin{cases} \text{I} \left\{ \begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \rightarrow \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \rightarrow \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{+1} 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{-1} 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

فرمول های طلایی

$$7) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \xrightarrow{\alpha=\beta} \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال ۱۲: اثبات های زیر را انجام دهید .

$$۱) \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\text{اثبات از طرف دوم}} \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} \rightarrow \frac{2 \sin x \times \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$۲) \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \xrightarrow{\text{اثبات از طرف دوم}} \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x (1 - \tan^2 x) = \cos^2 x (1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})$$

$$= \cos^2 x (\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$۳) \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات از طرف اول}} \cot \alpha - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

فرمول ۳ سوال اثبات شده در مثال ۱۲ را حفظ کنید .

مثال ۱۳: مقدار های زیر را بدست آورید .

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\sin 22.5^\circ \Rightarrow$$

$$1 - \cos 45^\circ = 2 \sin^2 x \xrightarrow{\div 2} \sin^2 x = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} \xrightarrow{x=22.5^\circ} \sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) \rightarrow \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \times \cos 45^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

مثال ۱۳: اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{-5}{13}$, مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را بیابید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\substack{\sin \alpha = \frac{3}{5} \\ \alpha \text{ در ربع اول}}} \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \xrightarrow{\substack{\cos \beta = \frac{-5}{13} \\ \beta \text{ در ربع سوم}}} \sin \beta = \frac{-12}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = (\frac{3}{5} \times \frac{-5}{13}) + (\frac{-12}{13} \times \frac{4}{5}) = \frac{-15}{65} + \frac{-48}{65} = \frac{-63}{65}$$

مثال ۱۴: اگر α , زاویه حاده باشد $\cos 2\alpha$ را بدست آورید .

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2(\frac{16}{25}) = \frac{-7}{25}$$

مثال ۱۵: اگر α , زاویه منفرجه باشد $\tan 2\alpha$ را بدست آورید .

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (\frac{3}{5})^2 + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\alpha \text{ منفرجه}} \cos \alpha = \frac{-4}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = \frac{-3}{4}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times (\frac{-3}{4})}{1 - (\frac{-3}{4})^2} = \frac{-24}{7}$$

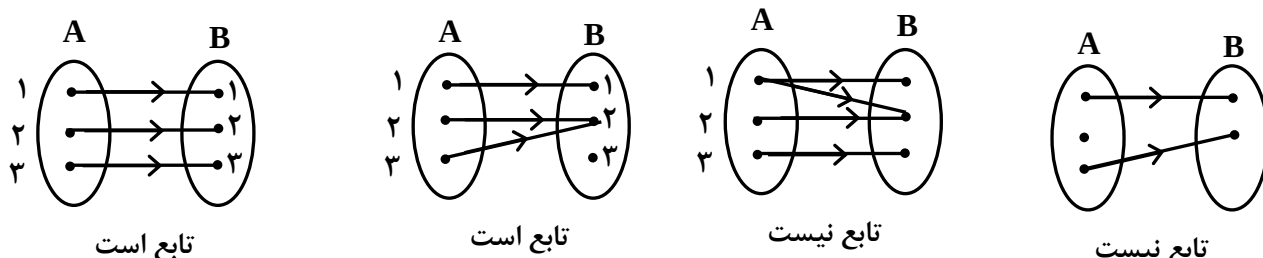
مثال ۱۶: عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ را ساده کنید .

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$$

مثال ۱۷: درستی تساوی $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$ را ثابت کنید .

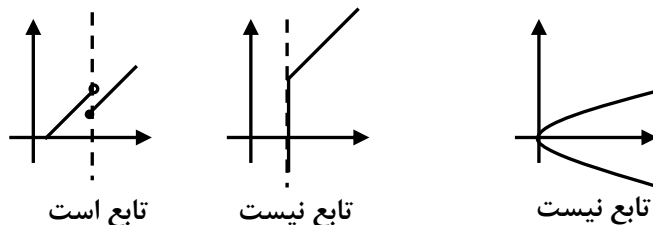
$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

تعریف تابع: تابع f عملی است که روی عناصر یک مجموعه مانند A عمل کرده و به هر عضو A دقیقاً عضوی از یک مجموعه مانند B را نظیر می‌سازد که نمودار آن به صورت زیر است .



از نظر زوج مرتب: به مجموعه زوج مرتب‌های مرتبی که در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول برابر نباشد مگر اینکه مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشد تابع گوییم مثلاً رابطه‌ی $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ تابع است ولی $g = \{(1, 2), (1, 7)\}$ تابع نیست زیرا مؤلفه‌های اول برابر است ولی مؤلفه‌های دوم یکسان نیست.

از نظر نمودار هندسی: از نظر نمودار به نموداری تابع گوییم که اگر هر خط دلخواه به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند .



مثال ۱۸: اگر رابطه‌ی $f = \{(1, a^2 - 5a), (1, -6), (a-1, 7)\}$ تابع باشد مقدار a را بیابید .

$$a^2 - 5a = -6 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \rightarrow (a-3)(a-2) = 0 \rightarrow a = 3, a = 2$$

$$\begin{cases} a = 3 \rightarrow f = \{(1, -6), (1, -6), (2, 7)\} & (\text{تابع است}) \\ a = 2 \rightarrow f = \{(1, -6), (1, -6), (1, 7)\} & (\text{تابع نیست غ.ق.ق}) \end{cases}$$

مثال ۱۹: مقادیر a, b را چنان بیابید که مجموعه $g = \{(-1, b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$ یک تابع باشد .

حل: مؤلفه اول زوج مرتب‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است برابر اند پس مؤلفه دوم آنها نیز باید برابر باشد .

$$g = \{(-1, b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$$

$$\begin{cases} b+3 = 4-a & \text{I} \\ a = 1 & \text{II} \end{cases} \rightarrow b+3 = 4-1 = 3 \rightarrow b = 0 \rightarrow g = \{(-1, 3), (7, 1), (-1, 3), (7, 1)\}$$

نمایش ضابطه تابع: نمایش تابع به صورت $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ را نمایش ضابطه ای تابع گوییم که در آن A مجموعه ورودی (مولفه اول، دامنه، x) و B مجموعه خروجی (ها) (مولفه دوم، برد، y)، $f(x)$ می باشد.

نمایش هندسی تابع: اگر زوج مرتب هایی که عضو تابع هستند را به صورت نقاط در یک دستگاه رسم کنیم نمودار تابع به دست می آید.

نکات:

۱- در صورتی که نمودار تابع را داشته باشیم، تصویر نمودار روی محور x ها دامنه تابع و تصویر آن روی محور y ها، برد تابع خواهد بود.

۲- در صورتی که نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، مختصات نقطه در ضابطه ای تابع صدق می کند یعنی $f(a) = b$

۳- اگر تابعی محور x ها را در نقطه ای به طول K قطع کند، عرض آن نقطه صفر است. بنابراین نقطه $(K, 0)$ روی نمودار بوده و $f(K) = 0$

۴- اگر تابعی محور y ها را در نقطه ای به عرض C قطع کند، طول آن نقطه صفر است بنابراین نقطه $(0, C)$ روی نمودار بوده و $f(0) = C$.

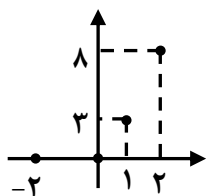
مثال ۱۹: اگر $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد حاصل $f(1) + f(4)$ را بیابید.

$$f(1) = (1 + 2\sqrt{1}) = 3, \quad f(4) = 4 + 2\sqrt{4} = 4 + 4 = 8 \rightarrow f(1) + f(4) = 3 + 8 = 11$$

مثال ۲۰: تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را با دامنه $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow f(0) = 0^2 + 2(0) = 0 \rightarrow (0, 0) & x=1 &\rightarrow f(1) = 1^2 + 2(1) = 3 \rightarrow (1, 3) \\ x=2 &\rightarrow f(2) = 2^2 + 2(2) = 8 \rightarrow (2, 8) & x=-2 &\rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) = 0 \rightarrow (-2, 0) \end{aligned}$$

$$\rightarrow f(x) = \{(x, f(x)) | x \in D_f\} = \{(0, 0), (1, 3), (2, 8), (-2, 0)\}$$



تذکره: اگر نقاط به دست آمده را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم نمودار تابع به دست می آید. چون تابع به صورت ۴ تا نقطه است پس نباید به هم وصل شود ولی اگر ضابطه بود به هم وصل می کردیم.

مثال ۲۱: در تابع خطی $f(x) = ax + b$ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که نمودار تابع، محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع کند و از نقطه $(-4, 6)$ بگذرد.

$$(0, 3) \rightarrow 3 = a(0) + b \Rightarrow \boxed{b = 3} \xrightarrow[b=3]{(-4, 6)} 6 = a(-4) + 3 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{4}}$$

مثال ۲۲: اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، مقادیر a, b, c را طوری تعیین کنید که این سهمی محور x ها را در نقطه ای به طول ۱، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱- قطع کند و از نقطه $(-2, 3)$ نیز بگذرد.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(0, -1)} -1 &= a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = -1 \quad \text{I} & \xrightarrow{(0, 0)} a + b + c &= 0 \rightarrow a + b = 1 \\ \xrightarrow{(-2, 3)} 4a - 2b + c &= 3 \rightarrow 4a - 2b = 4 & \Rightarrow \boxed{b = 0}, \quad \boxed{a = 1} \end{aligned}$$

مثال ۲۳: دو تابع $y = -x + b$ ، $y = x^2 + ax - 3b$ داده شده اند مقادیر a, b را چنان محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور x ها در نقطه ای به طول ۱ همدیگر را قطع کند.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1, 0)} 0 &= -(1) + b \Rightarrow \boxed{b = 1} \quad \text{I} & \xrightarrow{(1, 0)} 0 &= (1)^2 + a(1) - 3b \xrightarrow{b=1} 0 = 1 + a - 3 \Rightarrow \boxed{a = 2} \end{aligned}$$

تذکره: در محور x ها مقدار y برابر با صفر است پس:

توابع چند ضابطه ای : هرگاه دامنه یک تابع را به چند مجموعه ای جدا از هم تقسیم کنیم، به طوریکه اجتماع آن مجموعه ها برابر با دامنه تابع باشد و روی هر مجموعه، ضابطه ای متمایز تعریف کنیم در این صورت تابع چند ضابطه ای بدست می آید مانند تابع ۳ ضابطه ای زیر :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq a \\ f_2(x) & a < x < b \\ f_3(x) & x \geq b \end{cases}$$

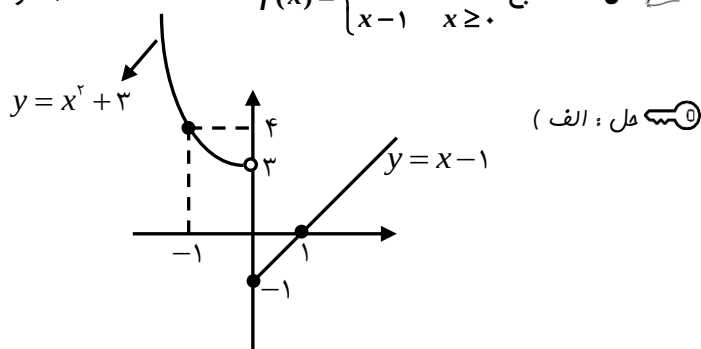
نکته ۱ : برای پیدا کردن مقدار توابع چند ضابطه ای در هر نقطه ای دلخواه ابتدا دقت کنیم آن نقطه در کدام یک از شرط قرار دارد سپس از ضابطه ای مربوط به آن شرط استفاده کنیم.

نکته ۲ : برای رسم توابع چند ضابطه ای نقطه ای شکستگی دامنه و چند نقطه دلخواه بیشتر یا کمتر از آن را می دهیم سپس نمودار را در دامنه رسم می کنیم. (در توابع عادی ۳ نقطه دلخواه می دهیم و رسم می کنیم)

نکته ۳ : شکل معادله درجه ۲ به صورت سهمی می باشد و شکل معادله درجه یک به صورت خط می باشد .

مثال ۲۴ : تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ داده شده است، الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) حاصل $f(f(-1))$ را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ y & 7 & 4 & 3 \end{array} \\ x - 1 & x \geq 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 & 1 \end{array} \end{cases}$$



ب) $f(-1) = \xrightarrow{x < 0} f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \rightarrow f(f(-1)) = f(4) \xrightarrow{x \geq 0} f(4) = 4 - 1 = 3$

نکات انتقال تابع :

$f(x) = x^2$	$f(x-a) = (x-a)^2$	$f(x+a) = (x+a)^2$
نمودار اصلی	$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} \text{انتقال می دهیم}$	$\xleftarrow{\text{واحد به چپ}} \text{انتقال می دهیم}$
$-f(x) = -x^2$	$f(x)+b = x^2+b$	$f(x)-b = x^2-b$
نمودار نسبت به محور X ها قرینه شود	$\uparrow$ واحد به بالا انتقال می دهیم	$\downarrow$ واحد به پایین انتقال می دهیم

تذکره انتقال توابع در کتاب درسی سوم دبیرستان بیشتر برای توابع $y = n^x$ و $y = |x|$ به کار برده می شود.

به دست آوردن تابع $f(x)$ به کمک تابع $f(x)$:

کافی است در ضابطه تابع $f(x)$ هر کجا که x داریم $\bigcirc$ قرار دهیم .

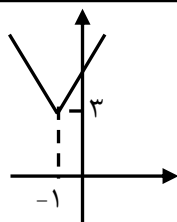
مثال ۲۵: اگر $f(x) = x^2 + x$ باشد حاصل $f(1+x)$, $f(\sqrt{x})$, $f(\frac{1}{x})$ را به دست آورید .

$$f(\frac{1}{x}) \rightarrow (\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x} \quad f(\sqrt{x}) \rightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \quad f(1+x) \rightarrow (1+x)^2 + (1+x) \quad \text{مسئله ۱}$$

رسم نمودار توابع قدر مطلق:

نمودار $f(x) = |x|$ با دامنه $\mathbb{R}$ را تابع قدر مطلق می نامیم ، با توجه به آن که $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نمودار

تابع به صورت زیر خواهد بود و برد این تابع $[0, +\infty)$ است و برای رسم $f(x) = |x-a| + b$ از قوانین انتقال کمک می گیریم و سایر توابع قدر مطلق را با نقطه یابی (به کمک یافتن ریشه قدر مطلق) و تبدیل آن به تابع چند ضابطه ای رسم می کنیم .



مثال ۲۶: نمودار تابع زیر را رسم کنید .

الف) $f(x) = |x-1| + 3$

مسئله ۱ نمودار $|x|$ را یک واحد به چپ و سه واحد به سمت بالا انتقال می دهیم .

ب) $f(x) = |2x-1|$

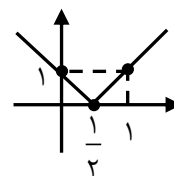
مسئله ۱ $2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ ، حال که ریشه قدر مطلق پیدا شد یک نقطه بزرگتر و یک نقطه کوچکتر از ریشه قرار می دهیم در بخش هایی که

عبارت داخل قدر مطلق مثبت است بدون تغییر قدر مطلق را برمی داریم و در بخش هایی که عبارت داخل قدر مطلق منفی است کل عبارت

داخل قدر مطلق را در یک منفی ضرب می کنیم .

$$|2x-1| \begin{cases} x=1 \rightarrow 2(1)-1=1 & \boxed{+} \rightarrow 2x-1 \\ x=0 \rightarrow 2(0)-1=-1 & \boxed{-} \rightarrow -(2x-1) \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



نکته : نمودار توابع $y = |x-a| + |x-b|$ به صورت (گلدانی) و نمودار توابع $y = |x-a| - |x-b|$ به صورت (Z شکل) می باشد .

مثال ۲۷: تابع $f(x) = |x-1| - |x+1|$ را به صورت چند ضابطه ای نوشته و آن را رسم کنید .

$$\left. \begin{aligned} x+1=0 &\rightarrow x=-1 \\ x-1=0 &\rightarrow x=1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

x	-1	1
$x-1$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} -(x-1) - (x+1) = -2x & x < -1 \\ -(x-1) + (x+1) = 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1) + (x+1) = 2x & x > 1 \end{cases}$$

x	-۲	-۱
y	۴	۲

x	-۱	+۱
y	۲	۲

x	+۱	+۲
y	۲	۴

پیدا کردن دامنه تعریف تابع از روی ضابطه:

۱- دامنه تعریف توابع چند جمله ای به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ برابر مجموعه اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ می باشد.

۲- دامنه توابع کسری به فرم $y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + k'}$ مجموعه اعداد حقیقی به غیر از ریشه های مخرج است
یعنی: $D_f : \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$

۳- دامنه توابع $y = \tan x, y = \cot x$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y = \tan x \rightarrow y = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{\cos x \neq 0, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}} D_{\tan x} = \left\{ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \\ y = \cot x \rightarrow y = \frac{\cos x}{\sin x} \xrightarrow{\sin x \neq 0, x \neq k\pi} D_{\cot x} = \{ x \neq k\pi \} \end{cases}$$

۴- برای پیدا کردن دامنه تعریف تابع $y = \sqrt[k]{g(x)}$ (رادیكال با فرجه زوج) از شرط $g(x) \geq 0$ استفاده می کنیم.

۵- برای پیدا کردن دامنه تعریف تابع لگاریتمی به صورت $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ از دستور زیر استفاده می کنیم.

$$\checkmark \begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک می گیریم}} D_f :$$

۶- دامنه یک تابع چند ضابطه ای برابر است با اجتماع بازه هایی که هر یک از ضابطه های تابع روی آن بازه ها تعریف شده اند.

۷- دامنه توابع رادیكالی با فرجه فرد همان دامنه ی تابع زیر رادیكال است.

مثال ۲۸: دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} ۱) f(x) &= x^2 - 3x + 2 \quad \text{مل:} \quad D_f = \mathbb{R} \\ ۲) f(x) &= \frac{1}{x} \quad \text{مل:} \quad \text{ریشه مخرج} \quad \{x = 0\} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ ۳) f(x) &= \frac{1}{x-1} \quad \text{مل:} \quad \text{ریشه مخرج} \quad \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\} \\ ۴) f(x) &= \frac{2}{x^2-1} \quad \text{مل:} \quad \text{ریشه مخرج} \quad x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \\ ۵) \frac{x-1}{x+1} \quad \text{مل:} \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1 \quad \text{ریشه مخرج} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \\ ۶) \frac{x+2}{x^2-6x+5} \quad \text{مل:} \quad x^2-6x+5=0 \rightarrow (x-1)(x-5)=0 \rightarrow x=1, x=5 \quad \text{ریشه مخرج} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, 5\} \\ ۷) \sqrt{2x-1} \quad \text{مل:} \quad \rightarrow 2x-1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \rightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \end{aligned}$$

۸) $\sqrt{\frac{1}{x}}$ حل: $\frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow D_f = (0, +\infty)$

۹) $\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$ حل: $x+1 > 0 \rightarrow x > -1 \rightarrow D_f = (-1, +\infty)$

۱۰) $\sqrt[3]{\frac{1}{x+3}}$ حل: $x+3 = 0 \rightarrow x = -3$ ریشه مخرج $\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

۱۱) $\sqrt[3]{x^2+2x}$ حل: $\rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۱۲) $f(x) = \tan x$ حل: $D_f = \left\{ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$

۱۳) $f(x) = \log_{\frac{x}{2}}^{x^2-1}$ حل: $x^2-1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \xrightarrow{\text{فذر می گیریم}} |x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \quad \text{I} \quad \frac{x}{2} > 0 \quad \text{II} \quad \frac{x}{2} \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \quad \text{III}$
 $\rightarrow D_f = \text{I} \cap \text{II} \cap \text{III} = \{x > 1\} - \{2\} = (1, +\infty) - \{2\}$

مثال ۲۹: دامنه تابع $\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ را بیابید.

$\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \quad (k \in \mathbb{Z}) \rightarrow D_f = \left\{ x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9} \right\}$

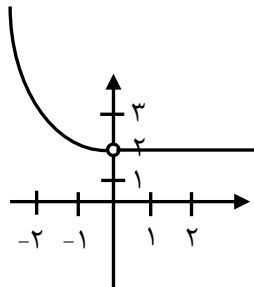
مثال ۳۰: دامنه $\begin{cases} x+3 & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$ را مشخص کنید.

حل: برای پیدا کردن دامنه توابع چند ضابطه ای کافیست اجتماع شرط ها را بگیریم.

$D_f = (x < -1) \cup (x \geq -1) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

مثال ۳۱: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) دامنه تابع f را بدست آورید.

$\begin{cases} x^2+2 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \rightarrow$



حل: الف)

حل: ب) از روی نمودار همانگونه که معلوم است،

فقط نقطه ی صفر در آن نیست، پس: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

مثال ۳۲: دامنه $y = \sqrt{\frac{(x+1)(2x-5)}{x-1}}$ را تعیین و آن را به صورت بازه نمایش دهید.

$\frac{(x+1)(2x-5)}{x-1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

x	-1	1	$\frac{5}{2}$	
$(2x-5)$	-	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$(x-1)$	-	-	+	+
کل عبارت	-	+	-	+

$D_f = [-1, 1) \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

جبر دوتابع (چهار عمل اصلی روی توابع):

اگر تابعی به صورت مجموع، تفاضل و حاصلضرب دو یا چند تابع باشد دامنه آن برابر است با اشتراک دامنه های هر یک از توابع تشکیل دهنده آن ولی اگر تابع به صورت تقسیم دو تابع دیگر باشد باید از اشتراک دامنه های صورت و مخرج، ریشه های مخرج را برداریم.

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\}$$

مثال ۳۳: دامنه تابع $\sqrt{x+2} + (x-1)$ را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x+2} \rightarrow D_f = x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 = [-2, +\infty) \quad \text{I} \quad g(x) = x-1 \quad D_g = \mathbb{R} \quad \text{II}$$

$$\rightarrow D_{f+g} = \text{I} \cap \text{II} = [-2, +\infty)$$

مثال ۳۴: دامنه $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-5}} + \sqrt{\frac{1}{x-8}}$ را تعیین کنید.

$$\frac{x^2-3x+2}{x-5} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1,2 \\ (x-1)(x-2) \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

x	+1	2	5	
x^2-3x+2	+	-	+	+
$(x-5)$	-	-	-	+
کل عبارت	-	+	-	+

گام ۱:

$$D_1 = [1, 2] \cup (5, +\infty)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x-8}} \rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8 \text{ ریشه مخرج} \rightarrow D_2 = \mathbb{R} - \{8\}$$

گام ۲:

$$D_f = D_1 \cap D_2 = ([1, 2] \cup (5, +\infty)) \cap (\mathbb{R} - \{8\}) = [1, 2] \cup (5, 8) \cup (8, +\infty)$$

گام ۳: کافیست D_1, D_2 را اشتراک بگذاریم

مثال ۳۵: توابع $f(x) = x+5, g(x) = \frac{4x}{x^2-7x}$ داده شده اند.

الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را به دست آورید. ب) حاصل $(f \cdot g)(1)$ را تعیین کنید.

$$f(x) = x+5 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

نکته: الف) ابتدا دامنه هر کدام را به دست آورید.

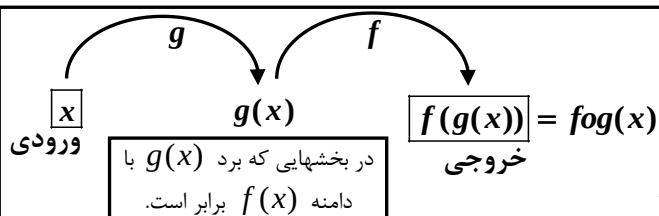
$$g(x) = \frac{4x}{x^2-7x} \rightarrow x(x-7)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=7 \end{cases} \rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 7\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x)=0\} = \mathbb{R} - \{0, 7\} \cap \mathbb{R} - \{x+5=0\} = \mathbb{R} - \{0, 7, -5\} \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{0, 7, -5\}$$

$$f \cdot g(1) = f(1) \times g(1) = (1+5) \times \frac{4+1}{1^2-7 \times 1} = 6 \times \frac{4}{-6} = -4$$

نکته: ب)

ترکیب دوتابع:



ترکیب دو تابع f, g تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$

نشان می دهیم. دامنه این تابع $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ و ضابطه آن به صورت $f \circ g(x) = f(g(x))$ تعریف می شود.

توضیح بیشتر: اول ورودی ها وارد g میشوند. g باید بتونه ورودی ها رو بپذیره پس اولین شرط اینه که $x \in D_g$ ، حالا x وارد ماشین g می شه و خروجی $g(x)$ به دست می آید. $g(x)$ می خواد وارد ماشین f بشه. f باید بتونه اون رو بپذیره یعنی شرط دوم اینه که $g(x) \in D_f$. در مسائل باید این دو شرط رو بنویسی و بین اون ها اشتراک بگیری و معنی $f(g(x))$ هم اینه که به جای x ها تو f ، تابع $g(x)$ را قرار بدی.

مثال ۳۶: اگر $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 + bx$ باشد، b, a را طوری تعیین کنید که $f \circ g(x) = x^2 + 4x + 1$.
 (سکول : الف)

$$\begin{cases} f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + bx) = (x^2 + bx) + a = x^2 + bx + a \\ f \circ g(x) = x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + bx + a = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \boxed{b=4}, \boxed{a=1}$$

مثال ۳۷: توابع f, g با ضابطه های $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = \sqrt{x - 6}$ داده شده اند : الف) ضابطه ی تابع $g \circ f$ را بنویسید.
 ب) دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x - 4) = \sqrt{2x - 4 - 6} = \sqrt{2x - 10} \quad (\text{سکول : الف})$$

(سکول : ب) ابتدا دامنه هر یک از تابع های f, g را به دست می آوریم.

$$D_f = \mathbb{R} \quad x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow D_g = [6, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 \geq 6\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\} = [5, +\infty)$$

مثال ۳۸: توابع $f(x) = \frac{3x}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. الف) تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

ب) دامنه ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. پ) $(\frac{f-g}{2g})(4)$ را محاسبه کنید.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \quad (\text{سکول : الف})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [0, +\infty) \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0 \mid \sqrt{x} \neq 1\} = [0, +\infty) - \{1\} \quad (\text{سکول : ب})$$

$$\left(\frac{f-g}{2g}\right)(4) = \frac{f(4) - g(4)}{2g(4)} = \frac{4-2}{2(2)} = \frac{1}{2} \quad (\text{سکول : پ})$$

مثال ۳۹: اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند.

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه ی تابع $f \circ g$ را بیابید.

$$3(f-g)(4) = 3(f(4) - g(4)) = 3\left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3}\right) = 3\left(\frac{1}{3} - 1\right) = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -2 \quad (\text{سکول : الف})$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad x-3 \geq 0 \Rightarrow D_g = x \geq 3 \quad (\text{سکول : ب}) \text{ ابتدا دامنه } f, g \text{ را به دست می آوریم}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \geq 3 \mid \frac{1}{\sqrt{x-3}-1} \neq 1\right\} \Rightarrow D_{f \circ g} = [3, +\infty) - [4] = [3, 4) \cup (4, +\infty)$$

مثال ۴۰: دو تابع $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع $g \circ f(x)$ را بدون محاسبه ی $g \circ f(x)$ به دست آورید. ب) ضابطه $g \circ f(x)$ را به دست آورید.

پ) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را محاسبه کنید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [-2, +\infty) \quad (\text{سکول : الف})$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \geq -2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \Rightarrow D_{g \circ f} = [-1, +\infty)$$

$$g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1+2} = \sqrt{x+1} \quad (\text{سکول : ب})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1}{2} \quad (\text{سکول : ج})$$

کانال تلگرام مهندس لشینی مولف کتاب آمپول ریاضی ۳ و مدرس آموزشگاه های برتر تهران و شهرستانهای بزرگ کشور :

جهت اطلاع از همایش ها و دریافت سایر کتب عضو شوید @riaziT

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir