



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

فصل اول: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱. مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی زیر را بیابید. (دی ۹۱)

$$-۵, -۳, -۱, \dots$$

۲. در دنباله‌ی حسابی $۲, ۶, ۱۰, ۱۴, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود؟ (شهریور ۹۰)

$$\frac{1}{۳}, \frac{1}{۹}, \frac{1}{۲۷}, \dots$$

۳. در دنباله‌ی هندسی نامتناهی مقابل، مجموع تمام جمله‌ها را بیابید. (خرداد ۹۱)

۴. طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله‌ی قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ (کتاب درسی)

۵. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید. مجموع محیط‌های مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟ مجموع مساحت‌های مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟ (کتاب درسی)

۶. علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز $\frac{۰}{۹}$ پول روز قبل را در صندوق پول قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد. (کتاب درسی)

۷. برای محافظت از تابش مضر مواد رادیو اکتیو، لایه‌هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟ (کتاب درسی)

۸. توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{۳}$ ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. محاسبه کنید این توپ پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، چه مسافتی را طی می‌کند؟ (خرداد ۹۰)

۹. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $p(x) = ۲x^۳ - kx^۲ - x + ۳$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد. (خرداد ۹۰)

۱۰. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $p(x) = x^۳ - mx^۲ - x + ۴$ بر $۲x + ۱$ بخش‌پذیر باشد. (کتاب درسی و خرداد ۹۳)

۱۱. m و n را چنان بیابید که چند جمله‌ای $mx + n + ۳x^۳ + x^۴$ بر $x^۲ - ۵x + ۶$ بخش‌پذیر باشد. (کتاب درسی)

۱۲. در چند جمله‌ای $p(x) = x^۳ + ax^۲ + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - ۱$ برابر ۴ بوده و بر $x + ۲$ بخش‌پذیر باشد. (کتاب درسی)

۱۳. اگر باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 2x^2 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید. (دی ۹۲)

۱۴. به کمک اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید. (کتاب درسی و دی ۹۱)

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$$

۱۵. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} ۱) (1-x)^y & ۲) \left(1 + \frac{2}{x}\right)^6 \\ ۳) (2x - 3y)^4 & ۴) (x - 2)^4 \end{array}$$

۱۶. جمله‌ی سوم از بسط $(2x - 1)^y$ برابر است با (شهریور ۹۲)

۱۷. ب.م.م و ک.م.م هر دسته از چندجمله‌ای‌های زیر را بیابید.

$$۱) P(x) = 2x^3 - 16, \quad Q(x) = 3x^2 - 12$$

$$۲) P(x) = x^2 + 1, \quad Q(x) = x^6 - 1, \quad R(x) = 4x^2 - 4$$

۱۸. سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین زنگ که هر سه زنگ باهم زده می‌شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره باهم زده شوند؟ (کتاب درسی)

۱۹. ۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید. (گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید). (خرداد ۹۱)

۲۰. در دنباله‌های زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (کتاب درسی)

$$۱, ۵, ۹, \dots, \quad ۴, ۷, ۱۰, \dots$$

۲۱. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$۱) \frac{4a^2 - b^2}{6a^2 - 3ab} \times \frac{a^2 b^2}{2a^2 b + ab^2}$$

$$۲) \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 2x}$$

$$۳) \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$$

$$۴) \frac{1}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1}$$

۲۲. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{2}{3}$ و -4 باشد.

ب) ریشه‌های آن $3 \pm \sqrt{5}$ باشد.

۲۳. ابعاد مستطیلی را بیابید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع باشد. (کتاب درسی)

۲۴. بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید. (دی ۹۰)

۲۵. مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

$$۱) f(x) = 5x^2 - 6x + 2$$

$$۲) f(x) = 3 + 8x - x^2$$

۲۶. بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل در کنار دریا که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟ (کتاب درسی)

۲۷. اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و ضرب آن ها $-\frac{1}{3}$ باشد، آن دو عدد را بیابید. (کتاب درسی)

۲۸. محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید. (خرداد ۹۳)

۲۹. معادلات زیر را با استفاده از تغییر متغیر حل کنید. (کتاب درسی با اندکی تغییر)

$$۱) x^4 - 4x^2 + 5$$

$$۲) 2\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 6\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 4 = 0$$

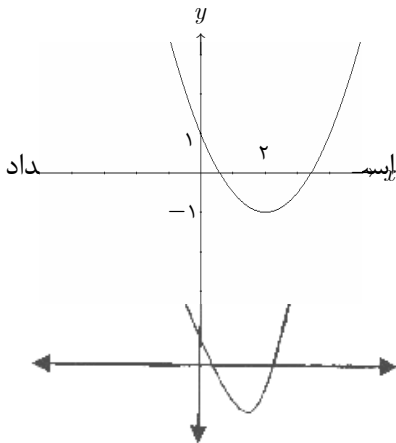
$$۳) (4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

$$۴) (x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$$

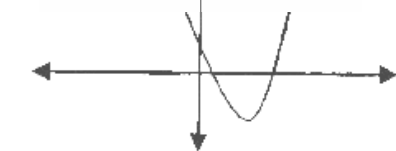
۳۰. $p(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ است. $p(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط رو به رو صدق کند. (خرداد ۹۲)

$$p(1) = 1, p(2) = 3$$

۳۱. در شکل زیر، نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a, b, c را تعیین کنید. (شهریور ۹۰)



۳۲. در شکل زیر، نمودار سهمی به معادله‌ی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید. (شهریور ۹۱)



۳۳. بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید. (کتاب درسی)

۳۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 5 = 0$ باشند بدون حل معادله مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

$$۱) \alpha^2 \beta + \beta^2 \alpha$$

$$۲) \alpha^3 + \beta^3$$

۳۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

$$۳) \alpha^3 \beta + \alpha \beta^3$$

$$۴) \frac{1}{\alpha^2 \beta} + \frac{1}{\alpha \beta^2}$$

۳۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 3 = 0$ باشند معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\frac{\beta - 2}{\alpha}$ و $\frac{\alpha - 2}{\beta}$ باشد.

۳۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند حاصل $\alpha^{-1}\beta + \beta^{-1}\alpha$ را بیابید.

۳۸. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۳۹. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\beta+1}$ و $\frac{1}{\alpha+1}$ باشد.

۴۰. m را چنان بیابید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 10x + 3m = 0$ چهار برابر ریشه‌ی دیگر باشد و سپس هر دو جواب را به دست آورید.

۴۱. در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ ، اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد، مقدار m و هر دو جواب را پیدا کنید. (کتاب درسی و دی ۹۲)

۴۲. a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد، سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید. (کتاب درسی و دی ۹۰)

۴۳. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3}$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

۴) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} = -\frac{x+1}{x}$

۵) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2+x}$

۶) $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{x^2+2}{x^2+x-2} - \frac{3x}{x+2} = 0$

۷) $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$

۴۴. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{x+2} = 3x+4$

۲) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$

۳) $3\sqrt{1-2x} + 1 = 4$

۴) $\sqrt{x^2-4} = x-1$

۵) $2\sqrt{3-2x} + x = 3$

۶) $\sqrt{2x+3} = 2\sqrt{x-2}$

۷) $2\sqrt{x-2} + 1 = \sqrt{2x+3}$

۸) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{5}$

۹) $\sqrt{x-3} = 3-x$

۱۰) $\sqrt{1+\sqrt{x-1}} = 3$

۱۱) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

۱۲) $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+9}$

۱۳) $2 + \sqrt{1+x} = x+3$

۴۵. عدد صحیحی را بیابید که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد. (دی ۹۰)

۴۶. تعداد جواب‌های معادلات زیر را به روش هندسی مشخص کنید.

۱) $-x + 1 = \sqrt{x}$

۲) $2x + 2 = 2^x$

$$۳) x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$$

$$۴) \sqrt{x+1} - x^2 = 2x + 1$$

۴۷. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{x-1} = x - 3$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} = 5 - x$$

$$۳) 2^x = x^2$$

$$۴) \sqrt{x} + 2x = x^2 + 2$$

$$۵) \frac{1}{x} = \sqrt{x}$$

$$۶) \sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$$

$$۷) \sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$$

$$۸) x + \frac{x}{|x|} = 3$$

$$۹) |x| = \sqrt{2+x}$$

۴۸. با فرض آن که a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید: (کتاب درسی و دی ۹۱)

$$|ab| = |a||b|$$

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

۴۹. برای هر عدد حقیقی a ، نشان دهید. (کتاب درسی)

۵۰. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: (کتاب درسی و خرداد ۹۰)

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

۵۱. برای هر دو عدد حقیقی x و y ، ثابت کنید: (کتاب درسی)

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

۵۲. به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی $f(x) = x|x-2|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید. (دی ۹۰)

۵۳. به کمک تعیین علامت عبارت‌های داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید. (کتاب درسی)

$$۱) f(x) = x|x|$$

$$۲) f(x) = |x+1| - 2$$

$$۳) y = |x-1| + |x+2|$$

۵۴. تابع $y = |1-x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار، برد آن را معلوم کنید.

۵۵. معادلات قدر مطلق زیر را حل کنید.

$$۱) |2x-3| = |3|$$

$$۲) ||x|-1| = 5$$

$$۳) |2x-1| + |x| = 7$$

$$۴) x|x| = -4$$

$$۵) |2x-3| = 3-2x$$

$$۶) |y^2-2| = 7$$

۵۶. نمودار هر یک از روابط زیر را رسم کنید.

$$۱) y = |2x-4|$$

$$۲) y = |x| + |1-x|$$

$$۳) x + \frac{x}{|x|}$$

۵۷. نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید. (کتاب درسی و خرداد ۹۰)

$$۱) x^2 \leq 2^x$$

$$۲) \sqrt{x-1} < |x-1|$$

۳) $\frac{1}{x} < \sqrt{x}$

۵) $|x^2 - 1| \leq |x + 1|$

۷) $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$

۹) $x^2 \leq |x|$

۱۱) $|x-1| \leq \sqrt{x+1}$

۴) $|x| + |x-1| \leq 5$

۶) $x+1 < |x|$

۸) $\sqrt{-x+2} \geq |x-3|-1$

۱۰) $|2x-1| < 1$

۵۸. نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

۱) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

۳) $1 + \frac{1}{x} > x$

۵) $x^2 - 2x^2 + x \geq 0$

۷) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$

۹) $|x| + |x-1| \leq 5$

۲) $(1+x^2)(1-x^2) \leq 0$

۴) $(1-x)(x+2) > 2x^2 - 1$

۶) $\frac{2x-1}{x} > 1$

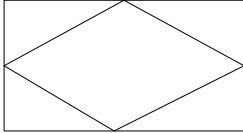
۸) $|x-2| \leq x$

۱۰) $|x^2 - 1| \leq |x+1|$

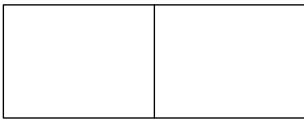
فصل دوم: تابع

۱. مساحت مثلث قائم الزاویه‌ای ۴ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) به دست آورید. (کتاب درسی و خرداد ۹۰)

۲. در مستطیلی به عرض W و محیط ۴۰ متر، یک لوزی محاط شده است. هر راس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل (W) بیان کنید. (کتاب درسی)



۳. با ۱۵۰ متر نرده، یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل زیر آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت ناحیه‌ی محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید. (کتاب درسی)



۴. اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

۵. آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ باهم مساوی‌اند؟ چرا؟ (دی ۹۰)

۶. تساوی هر زوج از توابع زیر را بررسی کنید.

$$۱) g(x) = \frac{(x^2 + x)(1 - 2x)}{x(1 + x^2)},$$

$$f(x) = \frac{x - 2x^2}{x}$$

$$۲) g(x) = \sin x,$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$۳) g(x) = 2 \log x,$$

$$f(x) = \log x^2$$

$$۴) g(x) = \tan x \cdot \cot x,$$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$۵) g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$$

$$f(x) = (\sqrt{x-3})(\sqrt{x-2})$$

$$۶) g(x) = \frac{|x+3|^2}{|x+3|},$$

$$f(x) = |x+3|$$

$$۷) g(x) = \left[\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} \right],$$

$$f(x) = 1$$

$$۸) g(x) = \sqrt{x-x^2},$$

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$$

$$۹) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases},$$

$$g(x) = x + 3$$

$$۱۰) f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

۷. نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (دی ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & , \quad x \leq 0 \\ x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$۸. \text{ نمودار تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(۹۰)

۹. تابع $f(x) = |x+1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید. (کتاب درسی)

$$۱۰. \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -2 \\ 5 & -2 \leq x < 3 \\ 2x - 1 & x \geq 3 \end{cases} \text{ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.}$$

۱) $f(\sqrt{12})$

۲) $f(2)$

۳) $f(-x^2 - 3)$

۱۱. کدام یک از روابط زیر تشکیل تابع می‌دهند؟ چرا؟

۱) $y = \begin{cases} x+1 & x > 2 \\ x-1 & x < 4 \end{cases}$

۲) $y^2 + 2y + x = 0$

۳) $x^2 + y^2 = 25$

۴) $y^2 - y = x$

۵) $xy + 5x - 3y - 2 = 0$

۶) $y = |x| + 1$

۷) $x = |y| + 1$

۸) $3x + 2y = 12$

۹) $x^2 - y^2 = 1$

۱۲. تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$.

ب) دامنه‌ی f برابر همه‌ی اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه‌ی $[0, 2]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ه) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه‌ی -3 قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

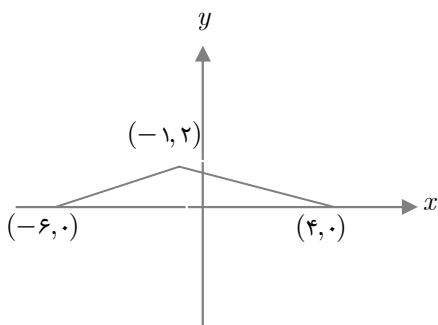
۱۳. تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه‌ی f مساوی $[-3, 5]$ و برد f مساوی $[-2, 7]$ باشد.

(ب) $f(0) = 3$

(ج) f یک به یک نباشد.

۱۴. نمودار یک تابع به شکل زیر است. ضابطه‌ی آن را بیابید.



۱۵. الف) نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.

ب) به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x+2}$ را رسم کنید.

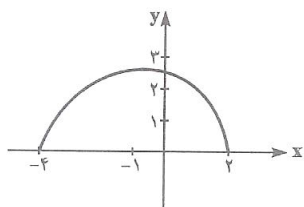
ج) به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x} + 2$ را رسم کنید.

د) به کمک انتقال نمودار تابع $y = -\sqrt{x} + 1$ را رسم کنید.

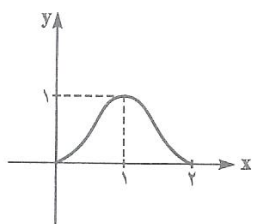
۱۶. نمودار تابع $y = f(-3x)$ به صورت زیر است.

الف) دامنه‌ی تابع $y = 2f(x)$ را به دست آورید.

ب) نمودار تابع $y = 2f(x)$ را رسم کنید.



۱۷. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، مطلوب است رسم نمودار و تعیین دامنه و برد توابع زیر:



۱) $f(x) - 1$

۲) $f(x + 2)$

۳) $\frac{1}{3}f(x)$

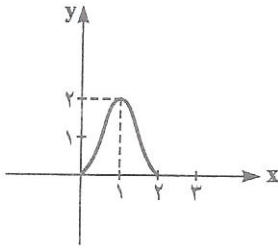
۴) $f\left(\frac{x}{3}\right)$

۱۸. نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است، دامنه و برد توابع زیر را تعیین و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

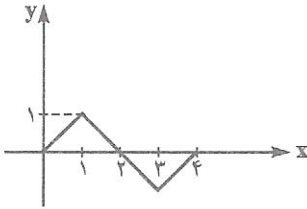
۱) $g(x) = -3f(x - 2) + 1$

۲) $h(x) = f(2x) - 1$

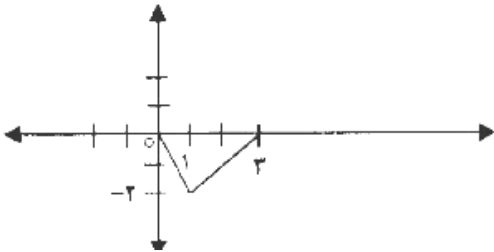
۳) $k(x) = -f\left(\frac{x}{3}\right) + 2$



۱۹. با توجه به نمودار $f(x)$ ، نمودار تابع $y = |f(x-2)| + 1$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید.



۲۰. در زیر، نمودار تابع رسم شده است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x-3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y = -2f(x-3)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)



۲۱. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-3|$ را در بازه $[2,4]$ رسم کنید، سپس به کمک آن، نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید. (دی ۹۱)

۲۲. نمودار توابع زیر را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = \sin x$ رسم کنید.

۱) $y = \sin 2x$

۲) $y = -\sin \frac{x}{2} + 1$

۲۳. اگر $f(x) = \cos x$ ، مطلوب است رسم نمودار توابع زیر: (کتاب درسی)

۱) $y = f(2x)$

۲) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

۳) $y = -f(x)$

۴) $y = f(-x)$

۲۴. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ، ها، انعکاس داده‌ایم. سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد پنج واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه‌ی تابع به دست آمده را بنویسید. (کتاب درسی)

۲۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید. (کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

۲۶. اگر $f = \{(0,1), (1,2), (3,4)\}$ و $g = \{(-2,1), (0,0), (1,5), (3,3)\}$ دو تابع باشند: (دی ۹۰)
الف) $(f+g)(1)$ را به دست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.

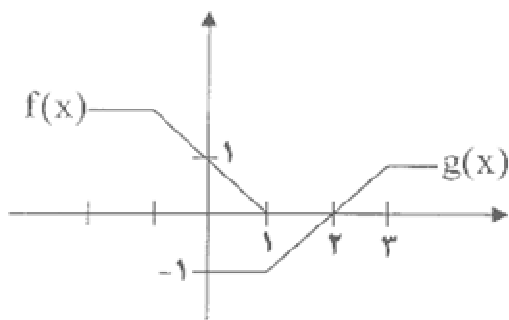
ج) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را تعیین کنید.

۲۷. اگر $g(x) = \frac{1}{x-3}$ و $f(x) = 3x - 2$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۰)

۱) $(3f + 2g)(4)$

۲) $D_{f \circ g}$

۲۸. با استفاده از نمودار توابع f و g در شکل زیر، عبارت داده شده را محاسبه کنید. (شهریور ۹۰)



۱) $(f + g)(1)$

۲) $(f \circ g)(2)$

۲۹. اگر تابع $f(x)$ با ضابطه‌های زیر تعریف شده باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $(f \circ f)(-1)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 2x - 1 & x = 0 \\ 2x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

۳۰. اگر $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی:

۱) $(f - 2g)(3)$

۲) $(f \circ g)(x)$

۳۱. اگر $f(x) = \sqrt{x+7}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار $(g + 2f)(2)$

ب) تعیین دامنه f و g و دامنه $\frac{f}{g}$ (با استفاده از تعریف)

۳۲. توابع f ، g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مفروضند، مطلوب است:

۱) $(f + g)(4)$

۲) $D_{\frac{f}{g}}$

۳۳. توابع $f(x) = x^2 + 4$ و $g(x) = 3 + 2x^2$ مفروض‌اند، مقدار x را طوری بیابید که رابطه‌ی $(g - f)(x) = 0$ برقرار باشد.

۳۴. اگر $f(x) = 2x + 5$ و $g(x) = 9x + 7$ باشد، حاصل $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$ را به دست آورید.

۳۵. تابع $f(x) = \frac{1}{2x}$ مفروض است:

الف) $(f \circ f)(x)$ را بیابید. ب) مقدار $f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ را به دست آورید.

۳۶. اگر $f(x) = 2x - 5$ و $f(g(x)) = 5x + 4$ ، تابع $g(x)$ را محاسبه نمایید.

۳۷. اگر $(f \circ g)(x) = 8x + 12$ و $f(x) = 2x + 4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

۳۸. اگر $f(x) = 5x + 2$ و $(g \circ f)(x) = 7x - 9$ باشد، آن گاه $g(x)$ را محاسبه کنید.

۳۹. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$. (خرداد ۹۳)

۴۰. اگر $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x+5}{x+1}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $g(x)$.

۴۱. اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۴۲. اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ و $g(x) = x^2 - 2$ ، مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که $(g \circ f)(x) = 3x$.

۴۳. اگر $f(x) = \frac{-3x+4}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید و به صورت فاصله نمایش دهید.

۴۴. توابع $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ مفروض‌اند:

الف) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را به دست آورید. ب) ضابطه‌ی $g \circ f$ را به دست آورید.

۴۵. اگر $g(x) = \sqrt{2x+4}$ و $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$ ، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

۴۶. دو تابع f و g روی اعداد حقیقی به صورت $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ تعریف شده‌اند، ابتدا ضابطه‌ی $f \circ g$ و سپس دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

۴۷. اگر $f(x) = x - 3$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ ، در این صورت $D_{f \circ g}$ و $D_{g \circ f}$ را به دست آورید.

۴۸. توابع $f = \{(2,5), (3,-1), (6,-2)\}$ و $g = \{(2,-2), (6,4), (3,1)\}$ مفروض‌اند، ضابطه‌ی $f - g$ را بنویسید.

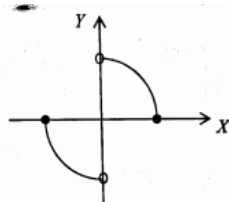
۴۹. توابع $f = \{(1,2), (4,-5), (3,1)\}$ و $g = \{(1,-6), (2,3), (4,5)\}$ مفروض‌اند، مطلوب است محاسبه‌ی:

$$۱) \left(\frac{f-g}{g}\right)(4) \quad ۲) f - g$$

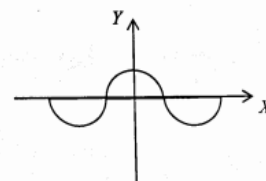
۵۰. اگر $f = \{(1,3), (3,5), (0,7)\}$ و $g(x) = \{(1,2), (4,0), (3,7)\}$ ، مطلوب است محاسبه‌ی $f \circ g$.

۵۱. اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \{(0,4), (3,2), (5,6)\}$ دو تابع باشند: (خرداد ۹۱)
الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.
ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۵۲. زوج و یا فرد بودن توابعی را که نمودار آن‌ها در زیر آمده است مشخص کنید. (خرداد ۹۳)



(ب)



(الف)

۵۳. زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید.

۱) $f(x) = |x|$

۲) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

۳) $f(x) = \frac{x^r - 3}{x^r - 1}$

۴) $f(x) = 2x + \sin x$

۵) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

۶) $f(x) = x^r + 2x^{\wedge}$

۷) $f(x) = 4x^r + \sqrt{|x|} + \cos^r x$

۸) $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$

۹) $f(x) = \frac{|x-2| + |x+2|}{\sqrt{x^r - 9} + 2}$

۱۰) $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

۱۱) $y = \frac{x^r - 3x}{x^r - 1}$

۱۲) $f(x) = x^r + \cos x$

۵۴. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. (کتاب درسی)

- الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.
ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.
ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.
د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی زوج است.

۵۵. فرض کنید f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد، ثابت کنید: (کتاب درسی)

الف) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

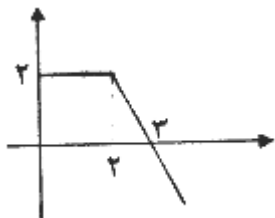
- ج) f را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

۵۶. تابع $f(x) = 2x^r - 10x^r + 2\sqrt{1+x^r} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید. (کتاب درسی)

۵۷. تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

۵۸. با توجه به شکل زیر: (دی ۹۴)



الف) ضابطه‌ی تابع را بنویسید.

ب) تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی یا ثابت است؟
ج) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نشان دهد.

۵۹. کدامیک از توابع زیر یک به یک هستند؟ (دو مورد ۱ و ۲ را با رسم نمودار نیز بررسی کنید). (کتاب درسی)

$$۱) f(x) = 1 - x^2 \quad ۲) g(x) = \sqrt{2x - 3}$$

$$۳) h(x) = \frac{x + 6}{3x - 4}$$

۶۰. یک به یک بودن تابع $f(x) = (x+2)^2 - 2$ را بررسی کرده و وارون آن را به دست آورید. (دی ۹۴)

۶۱. آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (خرداد ۹۳)

۶۲. با محدود کردن دامنه‌ی هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید. (کتاب درسی)

$$۱) y = |x - 2| \quad ۲) y = (x + 3)^2$$

$$۳) y = \sin x \quad ۴) y = \cos x$$

۶۳. در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند. (کتاب درسی)

$$۱) f(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad g(x) = \frac{1}{x-2} \quad ۲) f(x) = x^2 - 5, \quad g(x) = \sqrt{x+5}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = x^2 + 2, x \geq 0 \quad ۴) f(x) = \frac{y}{x} + 3, \quad g(x) = \frac{y}{x-3}$$

۶۴. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2; x \geq 2$ وارون پذیر است و سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

۶۵. تابع وارون توابع زیر را به دست آورید. (کتاب درسی)

$$۱) f(x) = \sqrt{x-2} \quad ۲) g(x) = \frac{x-5}{2x+3}$$

$$۳) f(x) = \frac{2x-2}{5x-3} \quad ۴) f(x) = -|x-1| + 1, x \geq 1$$

$$۵) f(x) = (x+5)^2, x \geq -5$$

۶۶. تابع $f(x) = ax + b$ داده شده است. همهی مقادیر a و b را که به ازای آنها $f^{-1}(x) = f(x)$ باشد بیابید. (کتاب درسی)

۶۷. به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$

۶۸. در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ تحقیق کنید. (کتاب درسی)

۶۹. اگر $f(x) = x + 3$ و $g(x) = 3x - 7$ ، توابع زیر را محاسبه کنید. (کتاب درسی)

۱) $(f \circ g)^{-1}$

۲) $g^{-1} \circ f^{-1}$

۷۰. اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ ، تابع $(g \circ f)^{-1}$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

۷۱. نمودار تابع $y = \left[\frac{1}{3}x \right]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید. (کتاب درسی)

۷۲. نمودار توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۱) $y = 2[x]$

۲) $y = [-x]$

۷۳. نمودار تابع $y = [x] + 2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید. (شهریور ۹۱)

۷۴. نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره‌ی تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۷۵. ابتدا نمودار تابع $y = [x]$ را رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y = [x] - \frac{1}{2}$

۲) $y = 2[x] + 1$

۳) $y = [x - 3]$

فصل سوم: مثلثات

۱. اگر α و β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۹۰)

۲. اگر α زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقادیر زیر را تعیین کنید. (کتاب درسی)

۱) $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$

۲) $\tan(\alpha + \beta)$

۳. اگر α زاویه‌ای در بازه $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید. (کتاب درسی)

۴. نسبت‌های مثلثاتی زیر را حساب کنید. (کتاب درسی)

۱) $\sin 15^\circ$

۲) $\cos 75^\circ$

۳) $\tan 105^\circ$

۴) $\cos 67/5^\circ$

۵. سینوس زاویه‌ی $22/5^\circ$ را حساب کنید. (خرداد ۹۱)

۶. درستی اتحاد $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ را ثابت کنید. (کتاب درسی و دی ۹۰)

$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

۷. نشان دهید به ازای هر زاویه‌ی α داریم: (کتاب درسی و دی ۹۰)

۸. فرمول $\sin 2\alpha$ را از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ به دست آورید. (کتاب درسی و دی ۹۱)

۹. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید. (کتاب درسی)

۱) $\sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$

۲) $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

۳) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

۴) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

۵) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

۶) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

۷) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

۸) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۹) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

۱۰. نشان دهید $\cos 2x + \cos 4x = 2\cos x \cos 3x$. (کتاب درسی)

۱۱. معادله‌ی $\sin x + \cos x = 1$ را حل کنید. (کتاب درسی و دی ۹۰)

۱۲. معادله‌ی $\tan x \tan 2x = 1$ را حل کنید. (کتاب درسی و شهریور ۹۰)

۱۳. معادلات زیر را حل کنید. (کتاب درسی)

۱) $\sin 2x = \sin 3x$

۲) $\tan x = \tan 5x$

$$۳) \cos t (2 \cos t - 9) = 5$$

$$۴) \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$$

$$۵) \tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۴. معادلات زیر را حل کنید و جواب‌هایی را که در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ هستند تعیین کنید. (کتاب درسی)

$$۱) \sin x - \cos x = 1$$

$$۲) \sin 2\theta + \sqrt{2} \cos 2\theta = 0$$

$$۳) \tan x \tan 2x = 1$$

$$۴) 2 \sin^2 t + 2 \sin t - 1 = 0$$

$$۵) \cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

$$۶) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$$

۱۵. کلیه‌ی جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ را تعیین کنید. (دی ۹۱)

۱۶. معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید. (شهریور ۹۱)

۱۷. در مثلثی که طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{7}$ باشد، زاویه‌ی روبه روی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟ (کتاب درسی و دی ۹۰)

۱۸. مثلثی رسم کرده‌ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3}$ است. زاویه‌های این مثلث را به دست آورید. (کتاب درسی)

۱۹. در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه‌ی بین این دو ضلع تابعی از ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید. (کتاب درسی)

۲۰. مقدار $\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

۲۱. مقدار $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8})$ را حساب کنید. (دی ۹۰)

۲۲. مقدار $\tan^{-1}(\sin \frac{\pi}{6})$ را حساب کنید. (دی ۹۰)

۲۳. مقادیر زیر را محاسبه کنید. (کتاب درسی)

$$۱) \sin^{-1}(\sin \frac{4\pi}{3})$$

$$۲) \cos(\sin^{-1} \frac{3}{5})$$

$$۳) \sin^{-1}(\sin \frac{5\pi}{4})$$

$$۴) \sin^{-1}(\cos \frac{\pi}{12})$$

$$۵) \sin^{-1}(\frac{3}{5}) + \sin^{-1}(\frac{4}{5})$$

$$۶) \cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3}))$$

$$۷) \sin(\cos^{-1} \frac{3}{5})$$

$$۸) \tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3})$$

$$۹) \cos(\tan^{-1} \frac{3}{4})$$

$$۱۰) \tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$۱۱) \sin^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right)$$

$$۱۲) \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

۲۴. برای هر x نشان دهید:

$$۱) \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$۲) \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

فصل چهارم: حد و پیوستگی توابع

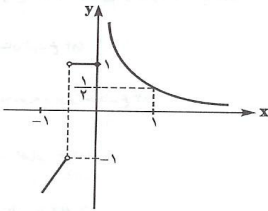
۱. آیا می‌توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{1-x^2}$ در نقطه‌ی ۱ صحبت کرد؟

۲. حد تابع $y = \sqrt{2-x}$ را در $x = 2$ در صورت وجود بیابید. (دی ۹۱)

۳. با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x-2} + 1$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a = 2$ بررسی کنید (دی ۹۲)

۴. حد تابع $y = \frac{1}{[x]-3}$ را در $x = 3$ در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

۵. با توجه به نمودار f ، حدود زیر را در صورت وجود بیابید.



۱) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

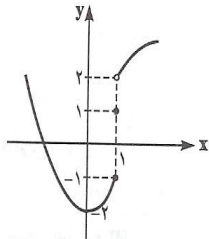
۲) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

۴) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

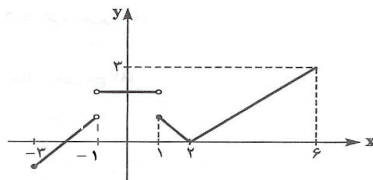
۵) $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{f(x)}$

۶. نمودار تابع f به شکل زیر است، با توجه به نمودار، حاصل A را به دست آورید.



$A = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1)$

۷. با توجه به نمودار مشخص کنید تابع در چه نقاطی حد دارد و در چه نقاطی حد ندارد؟



۸. با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

۱) $a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases}$

۲) $a = \frac{1}{4}, y = [x]$

۳) $a = -3, y = 1 - \sqrt{1-x}$

۴) $a = 2, y = x - [x]$

۹. با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید. (شهریور ۹۱)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

۱۰. نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد. (کتاب درسی و خرداد ۹۰ با اندکی تغییر)

۱۱. نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (کتاب درسی و شهریور ۹۰ با اندکی تغییر)

۱۲. در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد. (کتاب درسی)

(الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

(ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

(ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

(د) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد.

(ه) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد راست داشته باشد.

(و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

(ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۱۳. حد چپ و راست تابع $f(x) = x - [x]$ را در $x = 1$ بررسی کنید. (شهریور ۹۴)

۱۴. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دی ۹۰)

۱) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}$

۱۵. حد توابع زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۹۰)

۱) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \frac{x}{2}}$

۱۶. حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۹۰)

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12}$

۱۷. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (خرداد ۹۱)

۱) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x])$

۱۸. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دی ۹۲)

۱) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos 2x}{x^2}$

۱۹. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شهریور ۹۳)

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \times \tan\left(\frac{\pi}{8} x\right)$$

۲۰. حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (کتاب درسی)

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pi} \cos^2 x + x^2$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin x}{(1 + x) \cos x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \pi} x^2 \sin \sqrt{x + 1}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow \pi} x \cos \frac{1}{x}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow \pi} x \sin \frac{1}{x}$$

۲۱. آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $a = 0$ حد دارد؟ چرا؟

۲۲. اگر $|f(x) - 2| \leq (x - 2)^2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید.

۲۳. اگر به ازای هر x در بازه‌ی باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $3 - \cos^2 x \leq f(x) \leq 2 + x^2$ مطلوب است محاسبه‌ی:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x)}$$

۲۴. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه‌ی a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، نشان دهید $f + g$ در a حد ندارد. (کتاب درسی)

۲۵. دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی $f + g$ در صفر حد دارد. (کتاب درسی)

۲۶. دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این حال fg در a حد داشته باشد. (کتاب درسی)

۲۷. دو تابع f و g مثال بزنید که هیچ کدام در نقطه‌ی a حد نداشته باشند ولی $\frac{f}{g}$ در a حد داشته باشد.

۲۸. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید. (دی ۹۰)

۲۹. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ را در $x=4$ بررسی کنید. (خرداد ۹۰)

۳۰. آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در $x=2$ پیوسته است؟ چرا؟ (شهریور ۹۰)

۳۱. با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. (کتاب درسی)

(الف) $a=0$ در نقطه‌ی $y = \begin{cases} x^2+x & x \leq 0 \\ x^2-x & 0 < x \end{cases}$

(ب) $a=-1$ در نقطه‌ی $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \end{cases}$

(ج) $y = [x]$ با دامنه‌ی $[-1, 1]$ در نقطه‌ی $a = -1$

۳۲. پیوستگی تابع زیر را در $x=2$ بررسی کنید. (دی ۹۱)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \geq 2 \\ x-7 & x < 2 \end{cases}$$

۳۳. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \\ 1 & x = 1 \\ x - \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$ را در $a=1$ بررسی کنید. (شهریور ۹۴)

۳۴. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \leq -1 \\ 2x+1 & x > -1 \end{cases}$ را در $x=-1$ بررسی کنید. (دی ۹۴)

۳۵. در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد. (کتاب درسی)

$$y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & 1 < x \end{cases}$$

۳۶. ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود. (کتاب درسی)

$$y = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۳۷. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد مقدار a را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x > 2 \\ 1 & x = 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$$

۳۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع پیوسته باشد.

باشد.

۳۹. در تابع زیر، مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد. (شهریور ۹۳)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & , \quad x < 2 \\ ax + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

۴۰. در تابع زیر، مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. (خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

۴۱. نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته است ولی در صفر حد دارد. (کتاب درسی)

۴۲. نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه‌ی صفر و ۱ ناپیوسته است و در این نقاط حد ندارد. (کتاب درسی)

۴۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (خرداد ۹۱)

۴۴. اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای باشند، نشان دهید توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته‌اند. در مورد پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟ (کتاب درسی)۴۵. اگر f و g توابع پیوسته‌ای باشند، در مورد پیوستگی تابع $g \circ f$ چه می‌توان گفت؟ (کتاب درسی)

فصل پنجم: خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع

۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در $x = 3$ حساب کنید. (شهریور ۹۱)

۲. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در $x = 2$ حساب کنید. (شهریور ۹۰)

۳. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 4x^2 - 3$ را بیابید.

۴. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^2 + 3x$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بیابید.

۵. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در $x = 1$ به دست آورید.

۶. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = 2\sqrt{3x}$ را در نقطه‌ی $x = 3$ به دست آورید.

۷. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = x^3$ را در $x = 1$ بیابید. (دی ۹۱)

۸. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید. (خرداد ۹۳)

۹. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y = \cos x$ را بیابید. (کتاب درسی)

۱۰. با استفاده از تعریف، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \leq 1 \\ x^2+3, & x > 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید. (دی ۹۲)

۱۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع زیر را در $x = 2$ ، در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

$$f(x) = |x - 2|$$

۱۲. با استفاده از تعریف، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x|x - 2|$ را در نقطه‌ی دلخواه $x = 2$ بررسی کنید. (شهریور ۹۴)

۱۳. مشتق‌پذیری و مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در همه‌ی نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

۱۴. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 3 & 1 < x \end{cases}$ را رسم کرده و پیوستگی و مشتق‌پذیری آن را در $x = 1$ بررسی کنید. (کتاب درسی)

۱۵. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را در صفر بررسی کنید. (کتاب درسی و خرداد ۹۱)

$$۱) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad ۲) g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۱۶. اگر f تابع مشتق پذیری در نقطه‌ی a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$ (دی ۹۰)

۱۷. اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، نشان دهید تابع $f - g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ (کتاب درسی)

۱۸. اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$ ، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$ (خرداد ۹۰)

۱۹. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x) = af'(ax)$ (کتاب درسی)

۲۰. مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست) (دی ۹۰)

$$۱) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

$$۲) g(x) = \tan^2 x + \sin^{-1} x$$

$$۳) h(x) = \sqrt[3]{x^5} - \cos 2x$$

۲۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نیست) (شهریور ۹۰)

$$۱) f(x) = \sin(\sqrt{2x + 5})$$

$$۲) g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2x + 1)^2}$$

$$۳) k(x) = (1 + \tan x) \cos^{-1} x$$

۲۲. مشتق بگیرید (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۹۰)

$$۱) f(x) = \frac{(3x^2 - 1)^2}{x + 1}$$

$$۲) g(x) = \sqrt{1 - 2 \cos 3x}$$

$$۳) k(x) = 2 \tan^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \frac{4}{x}$$

۲۳. مشتق بگیرید (ساده کردن الزامی نیست) (شهریور ۹۱)

$$۱) y = (2x + 3)^5 (\sin x)$$

$$۲) y = \frac{1}{x + 1} + \tan^{-1}(x)$$

$$۳) y = \sqrt[3]{5x^2 - 1}$$

۲۴. مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (دی ۹۲)

۲۵. مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (شهریور ۹۴)

$$۱) f(x) = (x^2 + 5x) \sin^{-1} x$$

$$۲) g(x) = (\tan x + 3x^2)^5$$

$$۱) f(x) = \frac{3x^2 + 5}{5x - 1}$$

$$۲) g(x) = 2 \sin 5x + 3 \cos^{-1} x$$

۲۶. مشتق توابع زیر را به دست آورید. (کتاب درسی)

$$۱) y(x) = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

$$۲) y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$۳) g(\alpha) = \sqrt[5]{1 + \tan \alpha}$$

$$۴) y(\alpha) = \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha\right)$$

$$۵) x(t) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + t^2}}$$

$$۶) k(z) = \sqrt{1 + \cos^2 \sqrt{1 + z^2}}$$

۲۷. مقدار مشتق تابع $f(x) = \sqrt{2x+1}$ را در نقطه‌ی $x=4$ به دست آورید. (دی ۹۲)

۲۸. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ به دست آورید. (دی ۹۰)

۲۹. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ را در نقطه‌ای به طول ۱ به دست آورید. (شهریور ۹۴)

۳۰. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه‌ی $A(-1, 0)$ بنویسید. (کتاب درسی)

۳۱. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را که در نقطه‌ی $A(2, \frac{1}{2})$ این منحنی را قطع می‌کند به دست آورید. (کتاب درسی)

۳۲. معادله‌های خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید. (کتاب درسی)

$$۱) x=1, y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$۲) x=-1, y(x) = \sqrt{4-x^2}$$

۳۳. نقاطی از نمودار تابع $y = x^3 - 2x - 1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز اول و سوم باشد. (شهریور ۹۰)

۳۴. نقاطی از نمودار تابع $y(x) = x^3 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ (کتاب درسی)

۳۵. به کمک مشتق تعیین کنید در چه نقاطی از نمودار تابع $y(x) = -4x^2 + 16x + 1$ مماس بر منحنی، موازی محور x ها است؟ (کتاب درسی)

۳۶. در چه نقاطی از بازه‌ی $[0, 2\pi]$ خط مماس بر نمودار تابع $y(x) = \sin^3 x$ موازی محور x هاست؟ (کتاب درسی و خرداد ۹۳)

۳۷. آهنگ تغییر مساحت یک دایره را که قطر آن ۴ است، به دست آورید. (دی ۹۲)

۳۸. آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به دست آورید. (خرداد ۹۰)

۳۹. آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن، برای مربعی که مساحت آن ۹ واحد است، به دست آورید. (شهریور ۹۱)

۴۰. نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع آن وقتی شعاع برابر ۲ سانتی متر است چقدر است؟

۴۱. آهنگ تغییرات مساحت یک دایره نسبت به محیط آن وقتی که محیط دایره برابر 6π است، چقدر است؟

۴۲. محیط هر دایره تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید. (کتاب درسی)

۴۳. بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه‌ی $t = 0$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند $450 \cdot \pi$ سانتی متر مکعب است. (کتاب درسی)

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر ثانیه چقدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟

د) در آخرین لحظه که بادکنک می‌ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟

۴۴. مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه‌ی بین آن‌ها را مقدار متغیر α قرار می‌دهیم. آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به α را در زاویه‌ی α به دست آورید. (کتاب درسی)

۴۵. اگر $f(x) = 1 + \sqrt{2-x}$ باشد، بدون محاسبه‌ی ضابطه‌ی تابع وارون، $(f^{-1})'(4)$ را بیابید.

فصل	نوبت اول	نوبت دوم و شهریور
اول	۱۰	۴
دوم	۱۰	۴
سوم	-	۳
چهارم	-	۴
پنجم	-	۵
جمع	۲۰	۲۰