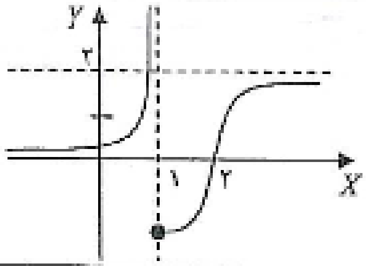
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته‌ی: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: ۱۰ صبح به افق تهران	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۲ / ۱۰ / ۷	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد **خارج از کشور** در **دی** ماه سال **۱۳۹۲**		مرکز سنجش آموزش و پرورش	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	نامساوی $\lvert x-۳\rvert<۵$ را به صورت بازه نمایش دهید.	۰/۷۵
۲	با استفاده از تعریف، ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-۱}=۱$	۱/۲۵
۳	نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ 	۰/۷۵
۴	نشان دهید تابع $f(x)=\frac{x^۲}{۴}+۴$ در بازه‌ی $[-۲,۲]$ مقدار ۵ را می تواند داشته باشد.	۱/۲۵
۵	آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن برای دایره ای که قطر آن ۲ سانتی متر است را بیابید.	۱
۶	با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست تابع $f(x)=\lvert x-۱\rvert$ در نقطه‌ی $x=۱$ نشان دهید این نقطه یک گوشه برای f است و سپس اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.	۱/۵
۷	در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ طول نقاطی روی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲+\cos x}$ را پیدا کنید که در آن نقاط، خط مماس بر منحنی تابع، افقی باشد.	۱/۲۵
۸	اگر $f(x)=۲x^۳-x^۲+۳x+۱$ باشد، مقدار $(f^{-1})'(۱)$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۷۵
۹	مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آن ها $y=e^{\lambda x}$ در معادله‌ی $y''+y'-۲y=۰$ صدق کند.	۱/۵
۱۰	مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x)=\frac{۴}{x}+x$ را روی بازه‌ی $[۱,۳]$ تعیین کنید.	۱/۷۵
۱۱	مقادیر a و b را طوری بیابید که $A(۱,-۲)$ نقطه‌ی عطف منحنی $f(x)=x^۳+ax^۲+b$ باشد.	۱/۲۵
۱۲	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ را رسم کنید.	۲
۱۳	با استفاده از افراز مناسب، مساحت ناحیه‌ی تحت $f(x)=۲x+۲$ بالای $y=۰$ از $x=۰$ تا $x=۱$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	مقدار متوسط تابع $f(x)=x+\frac{۱}{x^۲}$ را بر بازه‌ی $[۱,۲]$ به دست آورید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید اگر f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه ای مانند c از این بازه هست به قسمی که $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(c)$.	۱
	دانلود سوالات از سایت ریاضی سرا «موفق باشید» www.riazisara.ir جمع نمره	۲۰

ریز بارم سوالات دیفرانسیل خارج از کشور دی ۹۲

۱)

$$|x-3|<5 \Rightarrow -5<x-3<5 \xrightarrow{+3} -2<x<8$$

$$\Rightarrow x \in (-2, 8)$$

---

۲)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists M \in \mathbb{N} \ni \forall n$$

$$\left(n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n}{n-1}-1\right|<\varepsilon\right)$$

$\varepsilon>0$ دلخواه درنظر میگیریم دنبال عدد طبیعی M هستیم.

$$\left|\frac{n}{n-1}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{n}-\cancel{n}+1}{n-1}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n-1}<\varepsilon \xrightarrow{\text{معکوس}}$$

$$n-1>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow M \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}+1\right]+1$$

---

۳)

الف) $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ / ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

---

۴)

$f: [-2, 2]$ پیوسته است زیرا هر دو جمله‌ای در هر بازه‌ای پیوسته است.

$$f(-2) = \frac{-8}{4}+4 = -2+4 = 2$$

$$f(2) = \frac{8}{4}+4 = 2+4 = 6$$

$$f(-2) < 5 < f(2)$$

بنابه قضیه مقدار میانی

$$\boxed{\exists c \in (-2, 2) \ni f(c) = 5}$$

۵)

$$\left.\begin{array}{l} S=\pi r^2 \\ 2r=d \Rightarrow r=\frac{d}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow S=\pi \times \frac{d^2}{4} \Rightarrow S=\frac{\pi}{4}d^2$$

$$\frac{dS}{dd}=? \qquad \frac{dS}{dd}=\frac{\pi}{4}\times 2d \Rightarrow \frac{dS}{dd}=\frac{\pi}{\cancel{4}}\times \cancel{4}=\pi$$

$$\boxed{d=2}$$

---

۶)

$f(x)=|x-1|$ و $f(1)=0$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-0}{x-1}=1$$ مشتق راست در یک = ۱

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)-0}{x-1}=-1$$ مشتق چپ در یک = ۱-

چون مشتق چپ و راست دو عدد مختلف شوند بر $x=1$ برای تابع f یک نقطه گوشه است.

$m_1=1$ & $m_2=-1$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \Rightarrow \tan\theta=\left|\frac{1-(-1)}{1+(-1)}\right| \Rightarrow \tan\theta = \text{ت.ن}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

---

۷)

$$y=\frac{1}{2+\cos x} \Rightarrow y'=\frac{0-(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=0$$

$\sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ یا $\boxed{x=\pi}$ یا $\boxed{x=2\pi}$

---

۸)

$$f(x)=2x^3-x^2+3x+1 \Rightarrow (f^{-1})'(\underbrace{1}_{b})=?$$

حل) $b=f(a) \Rightarrow \cancel{1}=2a^3-a^2+3a+\cancel{1} \Rightarrow 0=a(2a^2-a+3)$

$\underline{a=0}$ یا $2a^2-a+3=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(2)(3)=1-24<0$

www.riazisara.ir دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

$f'(x) = 4x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{x=a} f'(0) = 4(0)^2 - 2(0) + 3 = 3 \neq 0$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(a)} = \boxed{\frac{1}{3}}$

9

$y = e^{\lambda x} \rightsquigarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \rightsquigarrow y'' = \lambda(\lambda e^{\lambda x}) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y'' + y' - 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$

$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$ یا $\boxed{\lambda = 1}$

10

$f(x) = \frac{4}{x} + x \;;\; [1, 3]$

$y' = \frac{-4}{x^2} + 1 = 0 \Rightarrow 1 = \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2 = 4$ ، $x = 2 \in [1, 3]$ ، $x = -2 \notin [1, 3]$

$f(1) = 4 + 1 = 5$ = Max مطلق

$f(3) = \frac{4}{3} + 3 = \frac{4 + 9}{3} = \frac{13}{3}$

$f(2) = \frac{4}{2} + 2 = 2 + 2 = 4$ = min مطلق

11

$f(x) = x^3 + ax^2 + b \;;\; A(1, -2)$ عطف $y'' = 0$

$-2 = (1)^3 + a(1)^2 + b \longrightarrow -2 - 1 = a + b \Rightarrow \boxed{a + b = -3}$ (1)

$y' = 3x^2 + 2ax \rightsquigarrow y'' = 6x + 2a = 0 \Rightarrow 6(1) + 2a = 0 \Rightarrow$

$2a = -6 \rightsquigarrow \boxed{a = -3} \xrightarrow{(1)} -3 + b = -3 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

12

$y = \frac{x}{x^2 + 1}$

حل) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ ، مثبت یا صفر ، عدد منفی ، نشدنی $\Rightarrow D_y = \mathbb{R}$

www.riazisara.ir دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

$x=0 \Rightarrow y=\frac{0}{0^2+1}=0 \Rightarrow A(0,0)$

$y=0$ مجانب افقی است.

$$y'=\frac{1\times(x^2+1)-2x\cdot x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x^2+1-2x^2=0 \Rightarrow$$

$$1-x^2=0 \Rightarrow 1=x^2 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$ طول نقاط اکسترمم

$$y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y''=\frac{(-2x)(x^2+1)^2-2(2x)(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4}=0$$

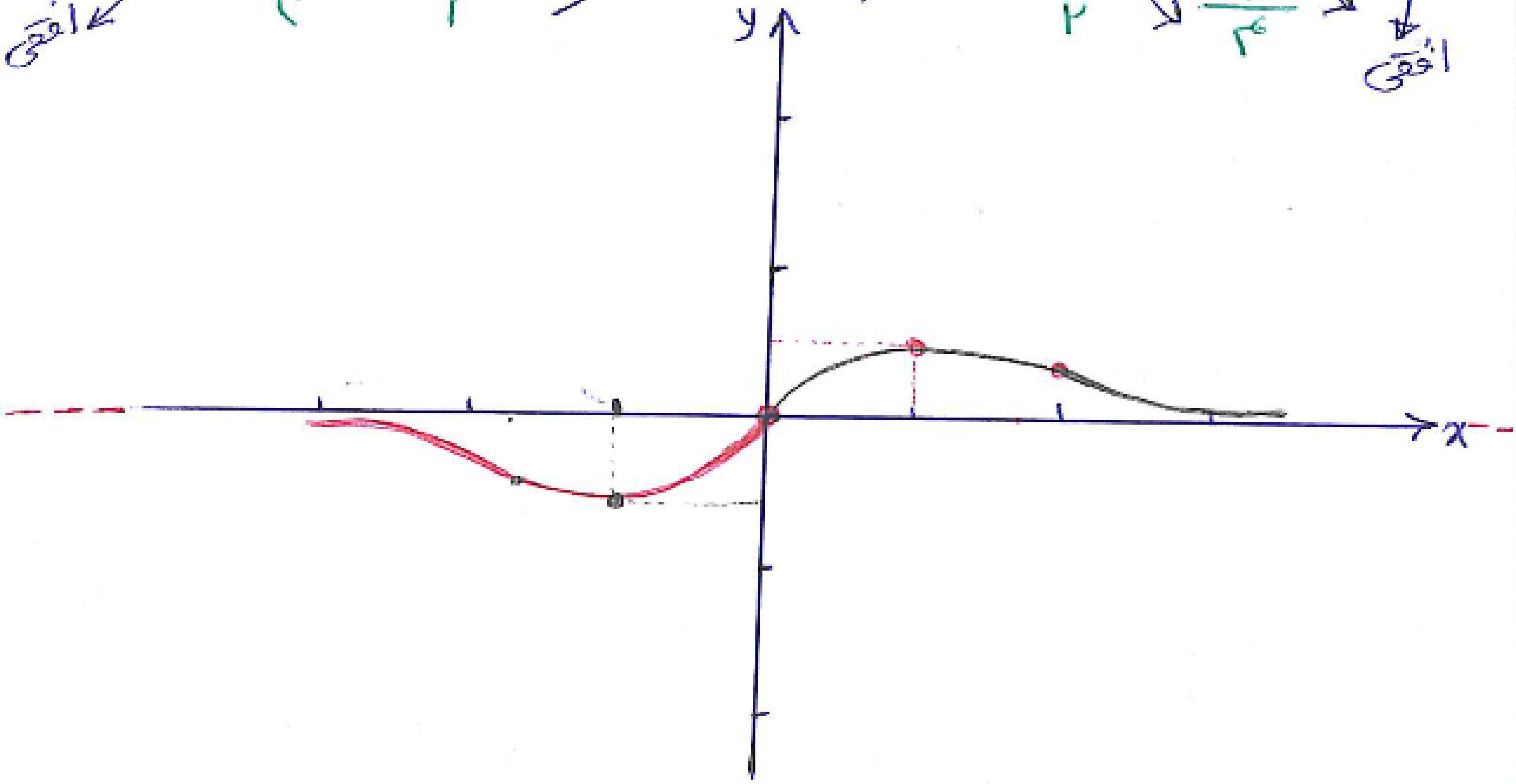
$$-2x(x^2+1)\left[x^2+1+2-2x^2\right]=0$$

یا $\rightarrow -x^2+3=0 \Rightarrow 3=x^2 \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$ طول نقاط عطف

یا $\rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ نشدنی

$\rightarrow x=0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$			0	$+$			0			$-$	
y''		$-$ $\cap$	0	$+$			$\cup$ 0		$-$	$\cap$	0	$+$ $\cup$	
y	0 افقی	$\searrow$	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0 افقی



۱۳

$$\underbrace{\Delta x = \frac{b-a}{n}}_{\text{فرمول}} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{x_i = a + i\cdot\Delta x}_{\text{فرمول}} \Rightarrow x_i = 0 + \frac{i}{n} \Rightarrow x_i = \frac{i}{n}$$

$$\Rightarrow f(x_i) = 2x_i + 2 \Rightarrow f(x_i) = \frac{2i}{n} + 2$$

$$\underbrace{S_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x}_{\text{فرمول}} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2i}{n}+2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{2i}{n} + \sum_{i=0}^{n} 2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n} i + 2n\right) \quad ; \quad \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{فرمول}}$$

$$= \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n} \times 2n$$

$$= \frac{n^2+n}{n^2} + 2$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} + 2 = 1 + 2 = 3$$

آزمایش جواب

$$\int_0^1 (2x+2)\,dx = x^2 + 2x\Big|_0^1$$

$$= \left[\left((1)^2 + 2(1)\right) - \left(0^2 + 0\right)\right] = 3$$

www.riazisara.ir دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا

۱۴

مقدار متوسط : $\bar{f}(a)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{1}{2-1}\times\int_1^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^2 x\,dx+\int_1^2 x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=$$

$$=\left[\left(\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{-1}{2}\right)-(-1)\right]=\left(2-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\cancel{\frac{1}{2}}=\boxed{2}$$

---

۱۵ قضیه : چون f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است پس کراندار است

داریم :

$$m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq M \xrightarrow[\text{مقدار میانی}]{\text{بنا به قضیه}}$$

$$\exists\, c\in(a,b)\ \ni\ \frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\xrightarrow{\times(b-a)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)\,(b-a)$$

موفق و تیزهوش باشید

شعرباف