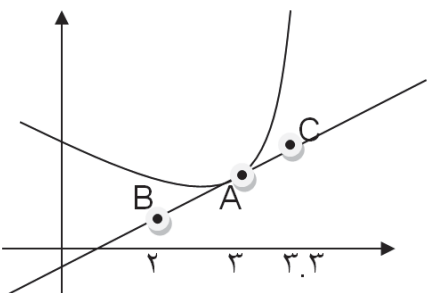
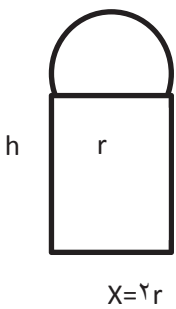


سؤالات شبیه سازی شده پایانی درس ریاضی دوازدهم تجربی

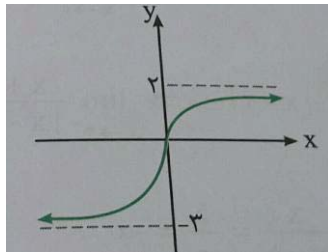
طراحان: مصطفی حیدری طیب ، سید محمد ویسی دبیران شهرستان دلفان استان لرستان بهمن ۱۳۹۷

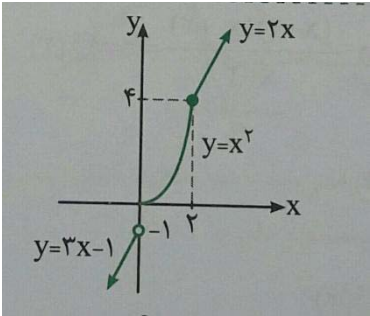
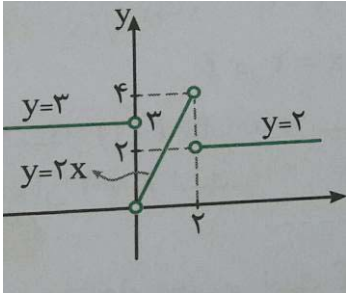
طبق بارم(تابع: ۱/۵، مثلثات: ۱/۵، حد: ۱، نمره، مشتق: ۵/۵، کاربرد مشتق: ۴، نمره، هندسه: ۴، نمره، احتمال: ۲/۵، نمره)

ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص نمایید. الف) هر تابع اکیدا صعودی ، همواره صعودی است. ب) دامنه مشتق پذیری تابع $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ برابر است با $[0, +\infty)$. ج) شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول محوری که بر آن عمود باشد ، یک دایره ی توپر است.	۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵
۲	جاهای خالی را تکمیل کنید. الف) حد تابع $f(x) = \frac{[x]}{ x-2 }$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ برابر است با.... ب) اگر تابع f در نقطه ای به طول ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه..... ج) معادله دایره ای که از مبدا مختصات می گذرد و مرکز آن $(-1, 1)$ باشد به صورت است. د) دو تاس سفید و سیاه را پرتاب می کنیم. اگر بدانیم تاس سفید ۵ آمده است ، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۸ باشد برابر است با.....	۰/۵ ۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۳	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. الف) مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید. ب) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را به دست آورید. ج) نمودار تابعی مانند f به طوری که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ را رسم کنید. د) خروج از مرکز بیضی با فاصله کانونی ۶ و طول قطر ۱۰ را به دست آورید.	۰/۵ ۰/۵ ۰/۵ ۰/۵
۴	نشان دهید دو تابع f و g وارون یکدیگرند.	۱/۲۵
	$g(x) = -\sqrt{4-x}$, $f(x) = 4 - x^2 ; x \leq 0$	
۵	معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.	۱
	$\cos 2x + \sqrt{2} \sin x = 0$	
۶	نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر $f(3) = 2$ و $f'(3) = 1$ باشد . مختصات نقاط B و C را بیابید.	۱
		

۲	$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$ تابع داده شده است؛ الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. د) نمودار تابع f' را رسم کنید.	۷
۰/۷۵	$f(x) = (x + \sqrt{x})^2 \times \frac{1}{x}$	۸
۱/۵	یک توده ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $f(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است. الف) جرم این توده ی باکتری در بازه $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می یابد؟ ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t = 4$ چقدر است؟	۹
۱/۵	نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در بازه ی $[-\frac{3}{4}, 3]$ به دست آورید.	۱۰
۱/۵	در پنجره ی شکل مقابل اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، شعاع نیم دایره چقدر باشد تا بیشترین نور دهی را داشته باشد؟	۱۱
	 <p style="text-align: center;">$x = 2r$</p>	
۱/۵	کانون های یک بیضی نقاط $(2, 4)$ و $(2, -4)$ است. فاصله کانونی، مختصات مرکز و معادله ی قطر کوچک بیضی را بیابد.	۱۲
۱/۲۵	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(2, 1)$ و با دایره $x^2 + y^2 - 2y = 0$ مماس بیرون باشد.	۱۳
۲	دو جعبه داریم که در جعبه اولی ۱۵ لامپ قرار دارد که ۳ تا از آنها معیوب و در جعبه ی دومی ۱۸ لامپ داریم که ۱۳ تای آن ها سالم است. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد که این لامپ معیوب باشد.	۱۴

<p>الف) درست است. زیرا هر تابع اکیدا یکنوا همواره یکنواست ، اما عکس آن صحیح نیست. ب) نادرست $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ لذا $D_{f'} = (0, +\infty)$ ج) درست است .</p>	<p>۱</p>
<p>$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{ x-2 } = \frac{[2^-]}{ 2^- - 2 } = \frac{1}{. +} + \infty$ ب) $f'(c) = 0$ بنا بر قضیه فرما ج) $x^2 + y^2 = 2$ د) پاسخ $\frac{1}{6}$ $A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6)\}$ $B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$ $P(B A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}$ $A \cap B = \{(0,3)\}$</p>	<p>۲</p>
<p>الف) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \cos 2(15^\circ) = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$ $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ب) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^3}} \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0) \in f$ پس نقطه بحرانی برابر است با $(0,0)$ ج) رسم شکل د) $2c = 6 \Rightarrow c = 3$, $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$</p>	<p>۳</p>
<p>برای آنکه نشان دهیم دو تابع وارون یکدیگرند باید تساوی زیر را نتیجه گیری نماییم. $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-\sqrt{\epsilon - x}) = \epsilon - \sqrt{(\epsilon - x)^2} = \epsilon - (\epsilon - x) = x$ $(g \circ f)(x) = x = g(f(x)) = g(\epsilon - x^2) = -\sqrt{\epsilon - (\epsilon - x^2)} = -\sqrt{x^2} = - x \xrightarrow{x \leq 0} -(-x) = x$</p>	<p>۴</p>
<p>$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 1 \Rightarrow \sin x(-2\sin x + \sqrt{2}) = 0$ $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$</p>	<p>۵</p>



$-2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$	
<p>خط داده شده، خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه A است. پس شیب این خط برابر است با $m = f'(3)$</p> $m = f'(3) = 1, \quad f(3) = 2 \Rightarrow A(3, 2)$ <p>پس معادله خط مماس برابر است با:</p> $y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$ $\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow B(2, 1) \\ x = 3.3 \Rightarrow y = 3.3 - 1 = 2.3 \Rightarrow C(3.3, 2.3) \end{cases}$	۶
<p>الف) نمودار f بصورت مقابل است</p>  <p>ب) f در $x = 0$ ناپیوسته است. بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد.</p> <p>ج) ضابطه f' بصورت زیر است.</p> $f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ <p>توجه کنید! چون $f'(0)$ و $f'(2)$ موجود نیست، در ضابطه f' علامت تساوی را برای $x = 0$ و $x = 2$ حذف کرده ایم.</p> <p>د) نمودار f' بصورت زیر است.</p> 	۷
$f'(x) = ((x + \sqrt{x})^2)' \times \left(\frac{1}{x}\right) + (x + \sqrt{x})^2 \times \left(\frac{1}{x}\right)'$ $= 2\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x + \sqrt{x})^{2-1} \left(\frac{1}{x}\right) + (x + \sqrt{x})^2 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right)$	۸
<p>الف) $\frac{f(\epsilon) - f(1)}{\epsilon - 1} = \frac{(\sqrt{\epsilon+2}(\epsilon)^2) - (\sqrt{1+2}(1)^2)}{\epsilon - 1} = \frac{130 - 3}{3} = \frac{127}{3} = 42.3$</p> <p>ب) آهنگ رشد جرم در لحظه $t = \epsilon$ برابر است با: $f'(\epsilon)$</p> $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \Rightarrow f'(\epsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} + 6(\epsilon)^2 = \frac{1}{\epsilon} + 96 = 96.25$	۹
<p>طول نقاط بحرانی را در بازه $\left(-\frac{3}{4}, 3\right)$ به دست می آوریم.</p> $f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$	۱۰

	$f(-1) = 3, f(+1) = -1, f(3) = 19$ داریم و با جایگذاری داریم $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{17}{8}$ کمترین مقدار تابع برابر -1 و بیشترین مقدار تابع 19 است.			
۱۱	با توجه به شکل و فرض مساله داریم: اگر محیط پنجره را با P و مساحت پنجره را با S نشان دهیم داریم مساحت پنجره برابر است با مساحت مستطیل بعلاوه مساحت نیم دایره $P = 2r + 2h + \frac{1}{2}(2\pi r) = 2r + 2h + \pi r = 6 \Rightarrow 2h = 6 - 2r - \pi r \Rightarrow h = 3 - \frac{1}{2}(\pi + 2)r$ (*) $S(r) = 2rh + \frac{1}{2}(\pi r^2) = 2r\left(3 - \frac{1}{2}(\pi + 2)r\right) + \frac{1}{2}(\pi r^2) = 6r - (\pi + 2)r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$ $S'(r) = 6 - 2(\pi + 2)r + \pi r = 0 \Rightarrow (\pi + 2)r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{\pi + 2} \stackrel{\pi \approx 3}{\Rightarrow} r = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$			
۱۲	فاصله y بین دو کانون یا فاصله کانونی برابر است با $FF' = 2c$ $F(2, \varepsilon), F'(2, -\varepsilon) \Rightarrow 2c = FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (\varepsilon + \varepsilon)^2} = 2\varepsilon$ وسط دو کانون مرکز بیضی است: $O' = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{-\varepsilon + \varepsilon}{2}\right) = (2, 0)$ قطرهای بیضی از مرکز بیضی می گذرند و بر هم عمودند. معادله قطر کوچک آن برابر است با $y = 0$	۱۲		
۱۳	اگر دو دایره $C(O, r), C'(O', r')$ مماس بیرون باشند داریم $d = OO' = r + r'$ در دایره $x^2 + y^2 - 2y = 0$ مرکز و شعاع به صورت زیر است. $O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(-\frac{0}{2}, -\frac{-2}{2}\right) = (0, 1)$ $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{0 + 4 - 0} = 1$ با فرض $O' = (2, 1)$ داریم: $d = OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4} = 2 = r + r' = 1 + r' \Rightarrow r' = 1$ بنابر این معادله دایره ای به مرکز $O'(2, 1)$ و شعاع $r' = 1$ به صورت زیر است. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$	۱۳		
۱۴	فضای نمونه ای S به صورت زیر افراز شده است. <table border="1" data-bbox="140 1496 584 1653"> <tr> <td>۳ معیوب ۱۲ سالم A_1</td> <td>۵ معیوب ۱۳ سالم A_2</td> </tr> </table> اگر B پیشامد انتخاب لامپ معیوب باشد آنگاه با توجه به قانون احتمال کل داریم: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}, P(B A_1) = \frac{3}{15}, P(B A_2) = \frac{5}{18}$ $\rightarrow P(B) = P(A_1) \times P(B A_1) + P(A_2) \times P(B A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{18} = \frac{48}{180}$	۳ معیوب ۱۲ سالم A_1	۵ معیوب ۱۳ سالم A_2	۱۴
۳ معیوب ۱۲ سالم A_1	۵ معیوب ۱۳ سالم A_2			