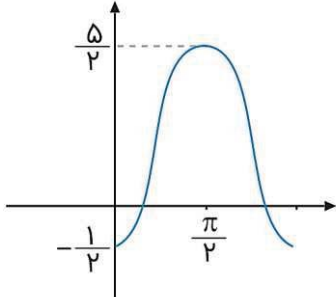


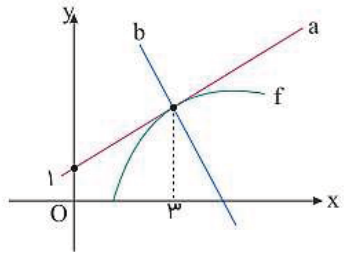
تعداد صفحات: ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳ (شبيه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۳/??	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای دو تابع f و g که $f = g$، تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچوقت برقرار نیست.</p> <p>ب) اگر تابع f در یک نقطه دارای خط مماس باشد، آنگاه در آن نقطه مشتق پذیر خواهد شد.</p> <p>پ) اگر تابعی صعودی باشد، آنگاه تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.</p>	۱
۱	<p>جاهای خالی را با اعداد یا عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر فاصله مراکز دو دایره از مجموع شعاع‌های دو دایره کمتر باشد، دو دایره هستند.</p> <p>ب) اگر منحنی تابع $f(x) = \frac{mx + 2}{3x - 5}$ هم صعودی و هم نزولی باشد، آنگاه مقدار m برابر با خواهد شد.</p> <p>پ) بازه $(3, 4)$ یک همسایگی و بازه $(\frac{3}{2}, 3)$ یک همسایگی است.</p>	۱
۲	<p>گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟</p> <p>(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۶</p> <p>ب) شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟</p>  <p>(۱) -۵ (۲) -۳ (۳) -۵/۲ (۴) -۳/۲</p> <p>پ) در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟</p> <p>(۱) ۴/۹ (۲) ۵/۱۲ (۳) ۷/۱۲ (۴) ۵/۶</p>	۳

ادامه سؤالات در صفحه دوم

تعداد صفحات: ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳ (شبیه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۳/??	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
۳	<p>(ت) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟</p> <p>(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲</p>	
۴	<p>اگر دامنه تابع $f\left(\frac{x-3}{5}\right)$ بازه $[-2, 8]$ باشد، دامنه تابع $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ را به دست آورید.</p>	۱/۲۵
۵	<p>اگر $0 < x < 2\pi$، از تساوی زیر مقدار x را به دست آورید.</p> $3\sin x \cos x = \sqrt{3}$	۰/۷۵
۶	<p>اگر $\sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$ و $\cos 4x = \frac{2}{3}$، عدد a را بیابید.</p>	۰/۷۵
۷	<p>مقدار حد زیر را بیابید.</p> $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+9} + 2x}{x^2 + 3x + 2}$	۰/۷۵
۸	<p>باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8x - 11$ بر $x^2 - 4$ چقدر است؟</p>	۰/۷۵
۹	<p>اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sqrt{x} + x$ باشد، آنگاه مشتق مرتبه دوم تابع $y = f(3x^2 + 1)$ را در $x = 1$ حساب کنید.</p>	۱/۵
۱۰	<p>اگر مطابق شکل $f'(3) = 2$ و خط a بر منحنی تابع f مماس و بر خط b عمود باشد، معادله خط b را بنویسید.</p> 	۱

تعداد صفحه: ۳	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضی ۳ (شبییه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۳/??	نام و نام خانوادگی:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد	نمره
۱۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی روبه بالا پرتاب می‌کنیم. اگر ارتفاع این جسم از زمین از معادله $h(t) = -3t^2 + 24t$ به دست آید: الف) این جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ ب) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد با زمین را به دست آورید.		۱
۱۲	نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) اکسترمم‌های نسبی تابع را به دست آورید. ب) بیشترین و کمترین مقدار تابع چقدر است؟ پ) نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.		۱/۲۵
۱۳	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-1)$ را به دست آورید.		۰/۷۵
۱۴	هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت ۷ کیلومتر بر ساعت، برابر $32 \cdot 7^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟		۱/۲۵
۱۵	اگر معادله دایره‌ای به صورت $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$ باشد، کدام یک از خطوط $x-y=1$ و $2x+y=3$ می‌تواند معادله قطر این دایره باشد؟ چرا؟		۱
۱۶	در شکل زیر، مرکزهای دو نیم‌دایره بر هم منطبق‌اند. حجم حاصل از دوران ناحیه بین دو نیم‌دایره حول خط L را بیابید.		۰/۷۵
۱۷	در یک بیضی، قطر کوچک واسطه حسابی بین قطر بزرگ و فاصله کانونی است. خروج از مرکز این بیضی را حساب کنید.		۱/۵
۱۸	تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر عدد ظاهر شده اول باشد، یک سکه و در غیر این صورت دو سکه را همزمان می‌اندازیم. تعیین کنید با چه احتمالی حداقل یک رو ظاهر می‌شود؟		۲
موفق باشید		۲۰ نمره	

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		خرداد ماه سال ۱۴۰۳ دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور	

ردیف	نمره
۱	۰/۷۵
۲	۱
۳	۲

الف) نادرست. اگر f و g دو تابع خطی باشند که از مبدأ مختصات عبور کنند، $fog = gof$ است.
 $f(x) = ax$, $g(x) = bx \Rightarrow fog(x) = gof(x) = abx$
 (ب) نادرست (پ) نادرست
 (هر مورد ۰/۲۵)

الف) متداخل (۰/۲۵) (ب) $m = -\frac{6}{5}$ (۰/۲۵) (پ) راست - چپ (۰/۵)

الف) گزینه ۱
 تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب x^3 منفی باشد:
 $-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3$
 $k \in \mathbb{Z} \rightarrow k = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow k = 0$ = مجموع مقادیر
 (ب) گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = \frac{5}{2} \\ y_{\min} = -|a| + c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}, c = 1$$

$\Rightarrow y = 1 + a \cos bx$; $y(0) = 1 + a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

پس تابع به صورت $y = 1 - \frac{3}{2} \cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$ac = \frac{-3}{2} \times 1 = \frac{-3}{2}$

(پ) گزینه ۳

برابر $f'(4)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کافی است $f'(4)$ را محاسبه کنیم:

$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) + 2(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	نمره
------	------

۳	$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + 2(1 + \frac{1}{4})}{(\frac{1}{4} - \frac{1}{4})^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ <p style="text-align: right;">ت) گزینه ۲</p> <p>زمانی تابع f روی \mathbb{R} مشتق پذیر است که در $x = 2$ مشتق داشته باشد. بنابراین باید f در $x = 2$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.</p> $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 5 \quad (1)$ $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & ; x \geq 2 \\ -2x + a & ; x < 2 \end{cases}$ $f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow -4 + a = -1 \Rightarrow a = 3$ $(1) : 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$ <p>(هر مورد ۵/۰)</p>	۳
---	---	---

۴	<p>فرض می‌کنیم $g(x) = \frac{x-3}{5}$ و $h(x) = \frac{x-1}{x}$؛ پس $D_{f \circ g} = [-2, 8]$ است و باید $D_{f \circ h}$ را محاسبه کنیم.</p> <p>می‌دانیم $D_g = \mathbb{R}$ و $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$ و فرض می‌کنیم $D_f = [a, b]$؛ پس داریم:</p> $D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-3}{5} \in [a, b] \right\} = [-2, 8]$ $\Rightarrow a \leq \frac{x-3}{5} \leq b \Rightarrow 5a \leq x-3 \leq 5b$ $\Rightarrow 5a + 3 \leq x \leq 5b + 3 \Rightarrow \begin{cases} 5b + 3 = 8 \\ 5a + 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1, 1]$	۴
---	--	---

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

نمره	ردیف
------	------

	$D_{\text{foh}} = \left\{ x \in \mathbb{R} - 1 \mid \frac{x-1}{x} \in [-1, 1] \right\} \Rightarrow -1 \leq \frac{x-1}{x} \leq 1 \quad x \neq 0, \quad -1 \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 1$ $\Rightarrow -2 \leq \frac{-1}{x} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \quad x > 0, \quad x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D_{\text{foh}} = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$	۴
--	--	---

۰/۷۵	$2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ $3 \sin x \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$	۵
------	--	---

۰/۷۵	$\sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = a$ $\Rightarrow \sin x \times (-\cos x) \times (-\sin x) \times (-\cos x) = a$ $-\sin^2 x \cos^2 x = a \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -a \Rightarrow \sin^2 2x = -4a$ $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - 2(-4a) \Rightarrow 8a = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{24}$	۶
------	--	---

۰/۷۵	<p>باتوجه به اینکه بعد از جایگذاری اولیه ابهام حد از نوع $\frac{0}{0}$ است از ضرب و تقسیم در اتحاد چاق و لاغر برای صورت و تجزیه برای مخرج استفاده می‌کنیم.</p> $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+9} + 2x}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt[3]{(x+9)^2} - 2x\sqrt[3]{x+9} + 4x^2}{\sqrt[3]{(x+9)^2} - 2x\sqrt[3]{x+9} + 4x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+9+8x^3}{(x^2+3x+2)(\sqrt[3]{(x+9)^2} - 2x\sqrt[3]{x+9} + 4x^2)}$ $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(8x^2-8x+9)}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{(x+9)^2} - 2x\sqrt[3]{x+9} + 4x^2)} = \frac{8+8+9}{1 \times (4+4+4)} = \frac{25}{12}$	۷
------	---	---

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

نمره	ردیف
۰/۷۵	۸
۱/۵	۹
۱	۱۰
۱	۱۱

چون مقسوم‌علیه از درجه ۲ است، باقی‌مانده حداکثر از درجه ۱ است:

$$3x^3 + 5x^2 - 8x - 11 = (x^2 - 4)Q(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2: 24 + 20 - 16 - 11 = 2a + b \\ x = -2: -24 + 20 + 16 - 11 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 17 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 9 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده $4x + 9$ است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sqrt{x} + x = f'(x) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

$$y' = 6x \times f'(3x^2 + 1)$$

$$y'' = 6f'(3x^2 + 1) + 36x^2 \times f''(3x^2 + 1) \Rightarrow y''(1) = 6f'(4) + 36f''(4)$$

$$= 36 + 36\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 36 + 45 = 81$$

$$f'(3) = m_a = 2 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow f(3) = 7$$

$$m_a \times m_b = -1 \Rightarrow m_b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2}$$

(الف)

$$h(t) = -3t^2 + 24t \Rightarrow \text{زمانی که در بیشترین ارتفاع است} \Rightarrow h'(t) = 0$$

$$\Rightarrow h'(t) = -6t + 24 = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow h(4) = -48 + 96 = 48$$

(ب)

$$h(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ یا } t = 8 \Rightarrow v(t) = h'(t) = -6t + 24 \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 24 \\ v(8) = -24 \end{cases}$$

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌ای اکسیر		خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	نمره
------	------

۱۲	<p>۱/۲۵</p> <p>الف) نقاط $(-2, 0)$ و $(2, 0)$ مینیمم نسبی و نقطه $(0, 4)$ ماکزیمم نسبی تابع است. ب) بیشترین مقدار ۵ و کمترین مقدار صفر است. پ) نقاط $\{-3, -2, 2, 0, 3\}$ بحرانی‌اند.</p>	۱۲												
۱۳	<p>۰/۷۵</p> $f'(x) = \frac{x-1}{3\sqrt{x^2}} + \sqrt[3]{x} = \frac{x-1}{3\sqrt{x^2}} = 0 \Rightarrow 4x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ <p>تابع f در $x = 0$ مشتق ندارد (چون ریشه مخرج کسر مشتق است)؛ پس این نقطه هم جزء نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شود؛ پس نقاط بحرانی تابع f، $x = \frac{1}{4}$ و $x = 0$ است.</p>	۱۳												
۱۴	<p>۱/۲۵</p> <p>اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم:</p> <p>هزینه t ساعت حرکت: $C = 80000t + (32 \cdot v^2)t$</p> <p>هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 80000 \left(\frac{x}{v}\right) + (32 \cdot v^2) \left(\frac{x}{v}\right)$</p> <p>هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{80000}{v} + 32 \cdot v \Rightarrow C'(v) = \frac{-80000}{v^2} + 32$</p> <p>$C(50) = \frac{80000}{50} + 32 \cdot 50 \Rightarrow C(50) = 32000$</p> <p>$C'(v) = \frac{32 \cdot v^2 - 80000}{v^2} \Rightarrow 32 \cdot v^2 = 80000 \Rightarrow v = 50$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>v</td> <td>0</td> <td>50</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$C'(v)$</td> <td></td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$C(v)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>32000</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>پس حداقل هزینه برابر ۳۲۰۰۰ تومان است.</p>	v	0	50	$+\infty$	$C'(v)$		0		$C(v)$	$+\infty$	32000	$+\infty$	۱۴
v	0	50	$+\infty$											
$C'(v)$		0												
$C(v)$	$+\infty$	32000	$+\infty$											

تعداد صفحه: ۶	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: علوم تجربی	راهنمای تصحیح درس: ریاضی ۳ (شبهه ساز ۴)
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
گروه آموزشی - مشاوره‌های اکسیر		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور خرداد ماه سال ۱۴۰۳	

ردیف	نمره
۱۵	۱
۱۶	۰/۷۵
۱۷	۱/۵
۱۸	۲
۲۰ نمره موفق باشید	

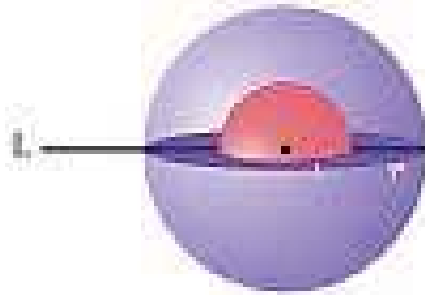
در دایره داده شده مختصات مرکز $O(2, 1)$ است. می‌دانیم قطر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس معادله خطی قابل قبول است که مختصات مرکز را در هر دو خط امتحان می‌کنیم:

$$2x + y = 3 \xrightarrow{O(2,1)} 2 \times 2 + 1 = 3 \Rightarrow 5 = 3 \times$$

$$x - y = 1 \xrightarrow{O(2,1)} 2 - 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$$

بنابراین $x - y = 1$ می‌تواند معادله قطر این دایره باشد.

از دوران هر نیم‌دایره حول خط L ، یک کره ایجاد می‌شود. پس باید حجم ناحیه بین دو کره را بیابیم که برابر است با:



$$\frac{4}{3} \pi (4^3) - \frac{4}{3} \pi (1^3) = \frac{252}{3} \pi$$

$$2(2b) = 2a + 2c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2} \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{(1)} a^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + c^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + 2ac + c^2 + 4c^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 2ac - 5c^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2c)^2 - 4(3)(-5c^2) = 64c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2c + 8c}{6} = \frac{10c}{6} = \frac{5c}{3} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 \\ a = \frac{2c - 8c}{6} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{حداقل یک رو} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \text{اول} \\ \text{حداقل یک رو} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \text{غیر اول} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(\text{حداقل یک رو}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$