



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

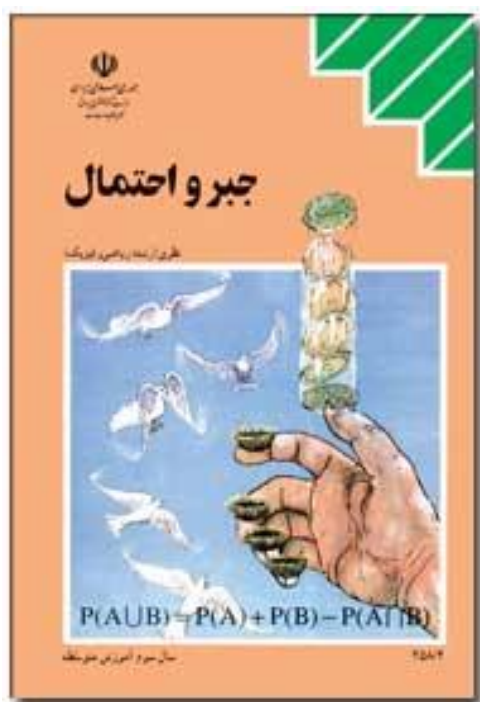
کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

کتاب کار و آموزش جبر و احتمال

سال سوم ریاضی و فیزیک



فرامرز سپهری

وبسایت : www.karamath.ir

فهرست مطالب

فصل اول

۳	استدلال ریاضی
۳	استقرای ریاضی
۱۹	استدلال استنتاجی
۲۴	مثال نقض
۲۸	اثبات بازگشتی
۳۳	برهان خلف
۴۱	اصل لانه کبوتری

فصل دوم

۴۹	مجموعه، گزاره نما
۵۰	تساوی دو مجموعه، زیرمجموعه
۵۱	مجموعه توانی
۵۲	جبر مجموعه ها
۵۴	قوانین دمورگان
۵۵	تفاضل متقارن
۵۹	مسائل جبر مجموعه ها
۶۵	تساوی دو زوج مرتب
۶۷	حاصل ضرب دکارتی
۷۵	رابطه، افراز یک مجموعه
۸۰	رابطه هم ارزی

فصل سوم

۹۳	فضاهای نمونه و پیشامدهای تصادفی
----	---------------------------------

فصل ۴

۱۰۴	احتمال هم‌شانسی در فضاهای گسسته
۱۱۲	احتمال دو جمله‌ای
۱۱۳	احتمال غیر هم‌شانسی در فضاهای
۱۲۱	احتمال در فضاهای پیوسته
۱۳۰	قوانین احتمال

بارم بندی جبر و احتمال

فصل ها	نوبت اول	نوبت دوم، شهریور و بزرگسال
اول	۱۰	۵/۵
دوم (بخش ۲-۸ در صفحه ۶۷)	۱۰	۵/۵
دوم (بخش ۲-۸ در صفحه ۶۷ تا آخر فصل)	—	
سوم	—	۲
چهارم	—	۷
جمع	۲۰	۲۰

فصل اول

استدلال ریاضی

درک شهودی

استدلال تمثیلی یا قیاسی

استدلال استقرایی

استقرای ریاضی

مراحل استقرای ریاضی:

مسائل مربوط به استقرای ریاضی:

۱ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$8 + 14 + 20 + \dots + (6n + 2) = n(3n + 5) \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

۲ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

۳ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1) \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

۴ - با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1$$

۵ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۶ - برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$3 + 6 + 9 + \dots + 3n = \frac{3(n^2 + n)}{2}$$

۷- با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

۸- برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۹- برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

۱۰ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(1 \times 2) + (2 \times 5) + (3 \times 10) + \dots + n(n^2 + 1) = \frac{n}{4}(n+1)(n^2 + n + 2) \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

۱۱ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

۱۲ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید: $n \in N$

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

۱۳ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n = (n-1) \times 2^{n+1} + 2$$

۱۴ - با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

۱۵- با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 \dots + n \times (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

۱۶- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

الف) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(2n-4) \times 90^\circ$.

۱۷ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad (n > 1, n \in \mathbb{N})$$

۱۸ - با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۱۹ - با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n :

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

۲۰- با استفاده از اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید که رابطه ی زیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

۲۱- با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید :

$$1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$$

۲۲- با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید :

$$P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۲۳ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n ، $9^n - 1$ بر ۸ بخش پذیر است.

۲۴ - با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $9^{n+1} - 8n - 9$ بر ۶۴ بخش پذیر است.

۲۵ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^n + 5$ بر ۳ بخش پذیر است.

۲۶ - با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^{2n} - 1$ بر ۵ بخش پذیر است.

۲۷ - با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n ، $7^n - 1$ بر ۶ بخش پذیر است.

۲۸ - با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $10^n(9n - 1) + 1$ بر ۹ بخش پذیر است.

۲۹- با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $5^n - 4n - 1$ بر ۱۶ بخش پذیر است.

۳۰- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n ، $11^n - 1$ بر 10 بخش پذیر است.

۳۱- به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$$

۳۲- برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$$

$$(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n$$

۳۳- به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$2^n > n^2$$

۳۴- به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

۳۵ - به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$2^n < n!$$

۳۶ - به روش استقراء ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$n \geq 7$$

$$n! > 3^n$$

۳۷ - با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $n \geq 2$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

۳۸ - با استفاده از اصل استقرا ریاضی ثابت کنید.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$$

۳۹- با استفاده از استقرای ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}, q \neq 1$:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

۴۰- با استفاده از اصل استقراء ریاضی، به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، ثابت کنید:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} > n$$

۴۱- نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به صورت $|a + b| \leq |a| + |b|$ برقرار است.

با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی x_n, \dots, x_2, x_1 داریم:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

۴۲- اگر $a \geq -1$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

استدلال استنتاجی:

۱ - با استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم عددی مضرب $\underline{8}$ به دست می آید.

۲ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مکعب یک عدد فرد، عددی فرد است.

۳ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل ضرب دو عدد فرد، یک عدد فرد است.

۴ - به روش با استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.

۵ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل ضرب دو عدد زوج، همواره یک عدد زوج است.

۶ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است.

۷ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

۸ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، حاصل $n^2 + n$ زوج است.

۹ - ثابت کنید، اگر x و y گویا باشند، $x - y$ نیز گویا است.

۱۰ - با استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر از حاصل ضرب دو عدد فرد، یک واحد کم کنیم، عدد حاصل بر ۲ بخش پذیر است.

۱۱ - ثابت کنید، اگر x و y گویا باشند، $x + y$ نیز گویا است.

۱۲ - با استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد 3 واحد اضافه کنیم عددی مضرب 4 به دست می آید.

۱۳ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مجموع سه عدد گویا، عددی گویا است.

۱۴ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب 3 است.

۱۵ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۱۶ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، حاصل $n^3 - n$ مضرب 6 است.

۱۷ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۱۸ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است.

۱۹ - به روش استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم، عددی زوج به دست می آید.

۲۰ - به روش استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم، یک عدد زوج حاصل می شود.

۲۱ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

۲۲ - با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۲۳ - با استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل مضرب ۶ می باشد.

۲۴ - با استفاده استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مکعب عدد فردی، 1 واحد اضافه کنیم، عدد زوجی به دست می آید.

۲۵ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب 4 می باشد.

۲۶ - با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، سه برابر مربع یک عدد فرد منهای 3 ، مضرب 12 است.

۲۷ - عبارتهای زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی هر یک را بنویسید.

الف) اگر $x > 1$ آنگاه داریم: $4 - x^2 < 3$ (ب) مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

۲۸ - با استدلال استنتاجی، ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد همواره مضرب چهار است.

۲۹- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید .

الف) به ازای هیچ دو عدد اول a و b ، عدد $a+b$ اول نیست .

ب) اگر x فرد باشد ، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می باشد .

۳۰- با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد ، آنگاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است.

۳۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

مثال نقض و قضایای شرطی

۱ - برای هر دو عدد گنگ x و y بررسی کنید، آیا $\frac{x}{y}$ گنگ است یا خیر؟

۲ - کدام یک از احکام زیر قضایای کلی هستند؟ (با ذکر دلیل)
الف) اگر $x > 0$ آنگاه $x^2 > 0$. ب) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

۳ - با یک مثال نشان دهید که احکام زیر قضایای کلی هستند یا خیر؟
الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.
ب) اگر x گنگ باشد، x^2 یک عدد گویا است.

۴ - برای هر دو عدد گنگ x و y بررسی کنید، آیا x, y گنگ است یا خیر؟

۵ - برای رد یا صحت حکم زیر استدلال لازم را ارائه کنید.
حاصل ضرب هر عدد حقیقی در هر عدد گنگ، عددی است گنگ.

۶- اگر a ، b و c سه عدد گنگ باشند، آیا abc^2 یک عدد گنگ است؟ چرا؟

۷- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
 الف) توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگتر است.
 ب) اگر x گنگ باشد، x^2 یک عدد گویا است.

۸- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت درست بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
 الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است.
 ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۹- آیا حکم مقابل برقرار است؟ چرا؟ «اگر $(a-1)(b-1) = 0$ آنگاه $a = 1$ و $b = 1$ می باشد.»

۱۰- آیا حاصل ضرب دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟

۱۱ - آیا مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟

۱۲ - با ذکر دلیل بنویسید آیا $(4 + 3^n)$ همیشه یک عدد اول است؟

کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ (با ذکر دلیل)
 الف) اگر a, b دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از ۵ باشند آنگاه مجموع آنها مضرب ۱۰ است.
 ب) اگر a یک عدد حقیقی و $a^2 > 0$ آنگاه $a > 0$ است.
 پ) اگر a, b, c اعداد طبیعی باشند آنگاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.

کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای عبارات های نادرست مثال نقض بیاورید.
 الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویاست.
 ب) مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.
 پ) برای هر عدد طبیعی n آنگاه $3 + 2^n$ عددی اول است.

اثبات بازگشتی

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

۱- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 \geq 2z(x + y - z)$$

۲- برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x ، y و z ثابت کنید:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$$

۳- برای هر سه عدد حقیقی و مثبت x ، y ثابت کنید:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

۴ - برای هر عدد حقیقی و مثبت a ثابت کنید:

$$x^2 y^2 \leq \frac{x^4 + y^4}{2}$$

۵ - اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

۶ - برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

۷ - برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}, \quad x, y \geq 0$$

۸ - به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

۹- برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c ثابت کنید:

$$y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$$

۱۰- برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

۱۱- اگر x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۱۲- به روش بازگشتی ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

۱۳- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq -4(a + b + 2)$$

۱۴- اگر a ، b دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که:

اگر a ، b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba)$$

۱۶- اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید:

$$x^4 + y^4 \geq x^2y + xy^2$$

۱۷- برای هر دو عدد حقیقی مثبت x, y نشان دهید: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

۱۸- اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^2 + 1 \geq b(2 - b)$$

۱۹- اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$$

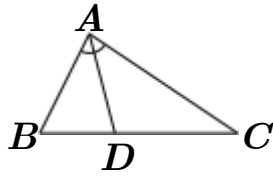
۲۰- ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a+b > 0$ ، آنگاه رابطه ی زیر برقرار می باشد.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$$

برهان خلف

مراحل حل مسئله به کمک برهان خلف

۱ - فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد، اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید $AB \neq AC$.
(برهان خلف)



۲ - با استفاده از برهان خلف ثابت کنید، اگر $x \neq 3$ و $3x + 4y = 25$ آنگاه $y \neq 4$ است.

۳ - می‌دانیم $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. ثابت کنید $1 + \sqrt{2}$ عددی گنگ است. (برهان خلف)

۴ - اگر n^3 فرد باشد، نشان دهید، n نیز فرد است. (برهان خلف)

۵- اگر n^3 مضرب ۳ باشد، نشان دهید، n نیز مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۶- اگر x عددی گویا و $x \neq 0$ و y عددی گنگ باشد ثابت کنید، xy عددی گنگ است. (برهان خلف)

۷- ثابت کنید، اگر x عددی گویا و y گنگ باشد، $x + y$ نیز گنگ است. (برهان خلف)

۸- اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۷ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۷ است. (برهان خلف)

۹- می‌دانیم $\sqrt{3}$ عددی گنگ است و a^2 یک عدد گویا است. ثابت کنید $a^2 + \sqrt{3}$ عدد گنگ است.

۱۰ - ثابت کنید $\sqrt{5}$ گنگ است. (برهان خلف)

۱۱ - ثابت کنید $(\sqrt{2} + \sqrt{7})$ گنگ است. (برهان خلف)

۱۲ - با استفاده از برهان خلف ثابت کنید، اگر $x \neq 4$ و $x^3 + y^3 = 65$ آنگاه $y \neq 1$ است.

۱۳ - می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است، ثابت کنید $2\sqrt{3}$ عددی گنگ است. (برهان خلف)

۱۴ - می‌دانیم $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. ثابت کنید $x = \sqrt{1} + \sqrt{2}$ گنگ است. (برهان خلف)

۱۵ - می‌دانیم $\sqrt{5}$ عدد گنگ است. ثابت کنید $(3 + \sqrt{5})$ گنگ است. (برهان خلف)

۱۶ - اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه نشان دهید که n نیز مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۱۷ - اگر عدد صحیح n بر ۳ بخش پذیر نباشد، نشان دهید n بر ۶ بخش پذیر نیست. (برهان خلف)

۱۸ - می‌دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است، ثابت کنید $1 + \sqrt{3}$ عددی گنگ است. (برهان خلف)

۱۹ - می دانیم $\sqrt{3}$ عدد گنگ است، ثابت کنید $7\sqrt{3}$ عددی گنگ است. (برهان خلف)

۲۰ - می دانیم $\sqrt{5}$ عدد گنگ است، ثابت کنید $2 + \sqrt{5}$ عددی گنگ است. (برهان خلف)

۲۱ - اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است. (برهان خلف)

۲۲ - می دانیم $\sqrt{5}$ عدد گنگ است، ثابت کنید $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ نیز گنگ است. (برهان خلف)

۲۳ - با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر n^2 مضربی از ۵ باشد، n نیز مضربی از ۵ است.

۲۴ - می‌دانیم $\sqrt{7}$ عدد گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ عددی گنگ است.

۲۵ - می‌دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند، نشان دهید عدد $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ نیز عددی گنگ است.

۲۶ - اگر n^3 مضرب ۵ باشد، نشان دهید، n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)

۲۷ - اگر $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ دو عدد گنگ باشند. ثابت کنید $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{7})$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)

۲۸ - با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ عددی گنگ است، $2 + \sqrt{\sqrt{3} + 2}$ نیز عددی گنگ است.

۲۹ - با استفاده از برهان خلف ، نشان دهید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

با استفاده از برهان خلف ، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n + 3)$ زوج باشد آنگاه n یک عدد فرد است.

اگر n عدد طبیعی و $(3n + 2)$ عددی فرد باشد ، با استدلال برهان خلف ، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.

با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $x \neq 1$ و $\frac{y}{2x} = 4$ آنگاه داریم : $y \neq 2$

اصل لانه کبوتری

۱ - اگر ۱۰ نقطه داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد انتخاب شده باشد، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از $\frac{۱}{۳}$ است.

۲ - پنج نقطه داخل یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با وتر ۴ در نظر گرفته‌ایم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از ۲ است.

۳ - درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از این ۱۰ نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

۴ - پنج نقطه داخل دایره ای به شعاع R مفروض است. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $R\sqrt{2}$ است.

۵ - نه نقطه درون دایره ای به شعاع واحد انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن ها فاصله ای کمتر از واحد را دارند.

۶ - هفت نقطه درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم، ثابت کنید فاصله دست کم دو تا از این نقطه ها از ۱ کمتر است.

۷ - هفت نقطه داخل مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ مفروض اند. ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این ۷ نقطه کمتر از $2\sqrt{2}$ است.

۸ - مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر می گیریم، نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله ی آن ها کمتر از ۱ است.

۹ - پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

۱۰ - دبیرستانی ۴۰۰ دانش آموز دارد. حداقل چند نفر وجود دارند که روز تولدشان در هفته یکسان است؟

۱۱ - اگر ۲۱۰ عدد طبیعی دلخواه و متمایز را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل چند عدد دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۲۰ هستند؟ چرا؟

۱۲ - شخصی برای مهمانی خود ۴۰ نفر را دعوت کرده است. دست کم چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است؟ چرا؟

۱۳ - هفتاد نفر در یک انجمن ریاضی حضور دارند. حداقل چند نفر باید به این انجمن اضافه شود تا دست کم ۱۲ نفر در یکی از ماه‌های سال متولد شده باشند؟

۱۴ - تعیین کنید حداقل باید چند نفر در یک مهمانی حضور داشته باشند که لااقل ۴ نفر آن‌ها در یک ماه از سال متولد شده باشند؟

۱۵ - هفتاد عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۷۰ عدد را بر ۳۰ تقسیم کنیم، حداقل چند عدد باقیمانده مساوی خواهند داشت؟

۱۶ - برای این که در یک مدرسه دست کم ۷ دانش‌آموز در یکی از روزهای سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟

۱۷ - یک مدرسه حداقل چند دانش‌آموز داشته باشد تا لااقل ۳۱ نفر از آن‌ها حرف اول نام خانوادگی یکسانی داشته باشند؟

۱۸ - از ۱۸۵ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه دخترانه حداقل چند نفر دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ چرا؟

۱۹ - اگر تعداد تارهای موی سر افراد حداکثر ۳۰۰۰۰۰ تار مو باشد، در شهری که ۳۰۰۰۰۱ نفر جمعیت دارد، ثابت کنید دو نفر هست که به یک تعداد تار موی سر دارند.

۲۰ - S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۳۰ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده اند.

۲۱ - از ۸۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه حداقل چند نفر دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال = ۳۶۵ روز)

۲۲ - بیست عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می کنیم، نشان دهید حداقل ۴ عدد آن ها باقیمانده ی مساوی دارند.

۲۳ - از ۳۷۰۰ نفر دانشجویان یک دانشگاه، حداقل چند دانشجو در یک روز سال متولد شده اند؟ چرا؟

۲۴ - صد عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۱۰۰ عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۱۵ هستند.

۲۵ - برای این که در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماه های سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد؟

۲۶ - شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آنها یک روز هفته است؟

۲۷ - گروه خونی دانش آموزان یک کلاس ۳۱ نفری ، A یا B یا O است ، حداقل چند نفر از دانش آموزان گروه خونی یکسانی را دارند و چرا ؟

۲۸ - شرکت کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر می باشند. حداقل چند شرکت کننده وجود دارد که حرف اول نام و نام خانوادگی آنها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

فصل ۲

مجموعه:

نمایش مجموعه ها:

مجموعه تهی:

گزاره نما:

هریک از مجموعه های زیر را با استفاده از یک گزاره نما بنویسید.

$$A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad \text{الف)}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \quad \text{ب)}$$

$$C = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} \quad \text{پ)}$$

$$D = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\} \quad \text{ت)}$$

دومجموعه مساوی:

کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساویند.

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = m\}$$

$$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{0, 1, 2\}$$

زیر مجموعه:

مجموعه مرجع:

ثابت کنید تهی زیر مجموعه تمامی مجموعه هاست.

آیا هر مجموعه دارای زیر مجموعه سره است.

قضیه ۱:

قضیه ۲:

قضیه ۳:

مجموعه توانی

نمایش هندسی مجموعه ها:

جبر مجموعه ها

اجتماع و اشتراک مجموعه ها:

ویژگی های اجتماع و اشتراک :

قضیه ۱:

قضیه ۲:

قضیه ۳ :

قضیه ۴ :

قضیه ۵ :

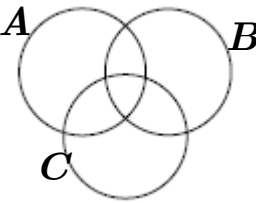
قضیه ۶ :

تفاضل دو مجموعه :

ویژگی های تفاضل مجموعه ها :

قوانین دمورگان :

تفاضل متقارن :

 <p>در شکل روبرو مجموعه $(A \Delta B) - C$ را سایه بزنید.</p>	۱
<p>اگر $A = \{-1, 1\}$ باشد، اولاً $P(A)$ را بنویسید. ثانیاً تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $P(A)$ را بدست آورید.</p>	۲
<p>اگر $A_i = [-i, 2i]$ و $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ در این صورت A_1, A_2, A_3, A_4 را حساب کنید. سپس $\bigcup_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ را مشخص کنید.</p>	۳
<p>اگر $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 5\}$ باشد، $A \Delta B$ را با اعضا مشخص کنید.</p>	۴

۵	اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2) = 0\}$ باشد، آنگاه $P(A)$ (مجموعه توانی A) را بنویسید.
۶	برای سه مجموعه A ، B و C ، اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آنگاه ثابت کنید $A \subseteq C$
۷	اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ای را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های سره‌ی آن مساوی 63 می‌شود. تعداد عضوهای مجموعه را تعیین کنید.
۸	اگر A و B دو مجموعه باشند، گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید. الف) در A عضوی هست که در B نیست. ب) B جزئی از C است.
۹	اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$ ، مجموعه‌ی توانی A را با اعضاء مشخص کنید.

اگر $A_i = [-i, 4-i]$ و $i \in \{1, 2, 3\}$ در این صورت $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ و $\bigcap_{i=1}^3 A_i$ را مشخص کنید.	۱۰
مجموعه مقابل را بصورت گزاره‌نما بنویسید. $A = \{0, 3, 8, 15, 24, \dots\}$	۱۱
قضیه دو شرطی زیر را ثابت کنید. $A \subseteq B$ و $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$	۱۲
اگر $A = \{x^2 - 1 \mid x \in N, x < 4\}$ باشد، مجموعه A و مجموعه توانی A را با نوشتن اعضا مشخص کنید.	۱۳
اگر $A_n = \{x \in Z \mid -n \leq x \leq n\}$ مطلوبست : $A_7 - (A_1 \cap A_3)$	۱۴

۱۵	اگر $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid n-1 < m < n+1\}$ باشد، آنگاه مجموعه A_1 و مجموعه توانی A_1 را با نوشتن عضوها مشخص کنید.
۱۶	مجموعه های $A = \{\emptyset, \mathfrak{z}\}$ و $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \mathfrak{z}\}\}$ مفروض است : الف) مجموعه $A \cap B$ را با اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه توانی A را با اعضا مشخص کنید.
۱۷	اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid -n < k, 2^k < 2\}$ باشد، آنگاه : الف) مجموعه های A_1, A_2 را با اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه $\bigcap_{i=1}^2 A_i$ را با اعضا مشخص کنید.

مسائل جبر مجموعه ها

۱	برای سه مجموعه دلخواه A, B و C با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید: $A - (B \cup C) = (A - B) - C$
---	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $A - (B - A) = A$	۲
<p>برای سه مجموعه دلخواه A، B و C با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $(C - A) \cup (C - B) \cup (C \cap B \cap A) = C$	۳
<p>برای سه مجموعه دلخواه A، B و C با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$	۴
<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $(A \cup B) - (B - A) = A$	۵

<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $[A - (B \cup C)] \cup [A - (A \cap B)] = A - B$	<p>۶</p>
<p>اگر A و B دو مجموعه باشند با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $A \cup (B' - A) = A \cup B'$	<p>۷</p>
<p>به کمک جبر مجموعه‌ها تساوی روبرو را ثابت کنید:</p> $A' \cap (A \cup B) = B - A$	<p>۸</p>
<p>اگر A و B دو مجموعه باشند با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$	<p>۹</p>
<p>تساوی مقابل را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $A - A' = A$	<p>۱۰</p>

$(A \Delta B)' = (A \cup B') \cap (A' \cup B)$	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۱۱
$A - (A \cap B) = A - B$	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۱۲
$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۱۳
$(A \cup B) \cap (C - A)' = (B - C) \cup A$	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۱۴

<p>الف) $A \cap (A \cup B) = A$</p> <p>ب) $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$</p>	<p>با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> <p>۱۵</p>
<p>الف) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup B') = A$</p> <p>ب) اگر $A \subset B$ آنگاه $B' \subset A'$</p>	<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> <p>۱۶</p>
<p>$(A \cup B) - B = A - B$</p>	<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> <p>۱۷</p>

<p>با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $(A \cap B) - (B \cap C) = (A - B') - C$	۱۸
<p>به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $A - (B \cap C \cap D) = (A - B) \cup (A - C) \cup (A - D)$	۱۹
<p>درستی تساوی زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:</p> $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$	۲۰

$(A - B') \cup B = B$	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۲۱
$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$	به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۲۲
$(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۲۳
$A - (B \cup C) = (A - C) - B$	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۲۴
$[A \cap (A - B')] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۲۵

تساوی دو زوج مرتب

اگر دو زوج مرتب $(2^{3x+3}, 25)$ و $(64, 5^{3y})$ مساوی باشند، x و y را تعیین کنید.	۱
x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(-2, -2x + y)$ و $(3x - y, 1)$ با هم برابر باشند.	۲
x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(128, 2^{2x-y})$ و $(2^{2x+y}, 27)$ با هم برابر باشند.	۳
مقدار x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(15, x - y)$ و $(x^2 - y^2, 3)$ با هم برابر باشند.	۴

۵	x و y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(x^2 - y^2, 8)$ و $(x + y, 16)$ مساوی باشند.
۶	x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(2^{3x+y}, 125)$ و $(64, 5^{3y})$ مساوی باشند.
۷	x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب زیر با هم مساوی باشند. الف) $(0, 3)$ و $((x-1)^2 + (y-1)^2, 3)$ ب) $(13, xy)$ و $(x^2 + y^2, 6)$

حاصل ضرب دکارتی

اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 3\}$ باشد، حاصل ضرب $A \times B$ را با عضوهایش مشخص و رسم کنید.

۱

مجموعه‌ی $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 2 \leq x < 5\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 4\}$ مفروض است، حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را نوشته و رسم کنید.

۲

مجموعه A دارای $m - n$ عضو و مجموعه B دارای n عضو می باشد، اگر $n(A \times B) = 14$ و $2n + m = 13$ باشد. تعداد اعضای A و B را بیابید.	۳
اگر $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y^2 \leq 3\}$ باشد، $A \times B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.	۴
اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4, 5\}$ باشد، مجموعه $A \times B - B^2$ را با عضوهایش مشخص کنید.	۵
اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, k\}$ باشد، حاصل ضرب $A^2 \times B$ را بدست آورید.	۶

اگر $A = \{1\}$ ، $B = \{1, 2\}$ و $C = \{2, 3\}$ ، نشان دهید دو مجموعه‌ی $A \times (B - C)$ و $(A \times B) - (A \times C)$ برابرند.	۷
اگر $A = \{2, x\}$ ، $B = \{2x + 1, 2y + 1\}$ و $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ باشد، x و y را بیابید.	۸
اگر $A = \{4^x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z}, y^2 \leq 3\}$ ، عضوهای مجموعه‌ی $A \times B - A^2$ مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.	۹
اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ، عضوهای مجموعه‌ی $A^2 - A \times B$ مشخص کنید.	۱۰

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 3\}$ و $B = \{y \mid y \in \mathbb{Z}, x \leq 1\}$ باشد، عضوهای مجموعه $(A \times B) - (B \times A)$ را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.	۱۱
اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4, 5\}$ باشد، مجموعه $A \times B - B^2$ را مشخص و رسم کنید.	۱۲
اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 2\}$ باشد، حاصل ضرب $A^2 - A \times B$ را با عضوهایش مشخص و نمودار آن را رسم کنید.	۱۳
اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ باشد، عضوهای مجموعه $A^2 - B^2$ را بدست آورید.	۱۴

<p>اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 7\}$ باشد، $A \times B$ را با رسم شکل نشان دهید.</p>	۱۵
<p>اگر $A = \{2^k \mid x \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 10\}$ باشد، الف عضوها $A^2 - B^2$ را مشخص کنید. ب) چند زیر مجموعه دارد؟</p>	۱۶
<p>اگر $A = \{-2, -1, 0\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ دو مجموعه باشند: الف $A \times B$ را مشخص کنید. ب) نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید.</p>	۱۷
<p>اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^3 < 10\}$ و $B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq 1\}$ دو مجموعه باشند: الف مجموعه‌های A و B را به صورت اعضاء مشخص کنید. ب) مجموعه‌ی $A \times B$ را مشخص کنید.</p>	۱۸

مجموعه‌های $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$ و $B = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$ داده شده است.
 الف) مجموعه‌های A و B را به صورت اعضاء مشخص کنید.
 ب) حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۹

اگر $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ دو مجموعه باشند:
 الف) مجموعه‌های A^2 و B^2 را به صورت اعضا بنویسید.
 ب) مجموعه‌ی $B^2 - A^2$ را تشکیل دهید.

۲۰

اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x = 8\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 4\}$ مفروض باشند، مجموعه
 $B \times A - A^2$ را مشخص کنید.

۲۱

اگر $A_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{2n-1}{n} \right]$ باشد، ابتدا A_1 و A_2 را مشخص کرده سپس نمودار $A_1 \times A_2$ را رسم کنید.

۲۲

حاصل ضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $B = (-2, 0]$ ، $A = [-3, 2]$

ب) $B = (-\infty, -2)$ ، $A = (3, \infty)$

پ) $B = [1, 2]$ ، $A = [-2, 2]$

۲۳

مجموعه‌های $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ مفروضند:

الف) A ، B را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) $A \Delta B$ را مشخص کنید.

ج) $(A \Delta B) \times A$ را مشخص کرده و نمودار آن را رسم کنید.

۲۴

اگر $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}, n < 4\}$ و $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 1\}$ دو مجموعه باشند:
الف) A, B را با نوشتن عضوها مشخص کنید و سپس اعضای $A \times B$ را بنویسید.

ب) اگر R یک رابطه از A در B به صورت زیر باشد:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y < 6\}$$

عضوهای رابطه ی R را مشخص کنید.

۲۵

مجموعه های $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{x-1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 0\}$ مفروضند:
الف) مجموعه های A, B را با نوشتن عضوها مشخص کنید.
ب) اعضای مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ را مشخص کنید.

۲۶

مجموعه های $A = \{1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ مفروضند:
الف) مجموعه B را با نوشتن عضوها مشخص کنید.
ب) اعضای مجموعه $A^2 - (B \times A)$ را مشخص کنید و نمودار آن را در صفحه مختصات رسم کنید.

۲۷

رابطه

افراز یک مجموعه

در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x > y\}$ تعریف شده است. رابطه R را به صورت زوج مرتب نشان دهید و نمودار آن را رسم کنید.

۱

نمودار رابطه‌ی $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2 \leq y \leq x + 1\}$ را رسم کنید.

۲

اگر در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ رابطه‌ی R به صورت $xRy \Leftrightarrow x^2 < 2y$ تعریف شود:
الف) رابطه R را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) نمودار رابطه R را رسم کنید.

۳

۴	در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ مفروض است، افرازی از A را بنویسید که ۳ عضو داشته باشد.
۵	رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq 3\}$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان دهید و سپس نمودار آن را رسم کنید.
۶	رابطه R در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، نمودار آن را رسم کنید. $R = \{(x, y) \mid x - y \leq 1\}$
۷	اگر رابطه‌ی R در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، تعریف شده باشد نمودار آن را رسم کنید. $aRb \Leftrightarrow a^2(b+1) \leq 10$
۸	در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \mid y\}$ تعریف شده است. R را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

نمودار رابطه‌ی $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2 \leq y \leq x + 1\}$ را رسم کنید.	۹
نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, y \leq 1\}$ را رسم کنید.	۱۰
نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$ را رسم کنید.	۱۱
رابطه‌ی R در مجموعه \mathbb{R} به صورت $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y\}$ تعریف شده است، نمودار آن را رسم کنید.	۱۲
تمام افرازهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.	۱۳
چهار افراز متفاوت برای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ بنویسید.	۱۴

نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x\}$ را رسم کنید.	۱۵
نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4, x - y \geq 1\}$ را رسم کنید.	۱۶
نمودار رابطه $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x \geq y^2, y \geq x^2\}$ را رسم کنید.	۱۷
<p>اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید .</p> <p>الف) $aRb \Leftrightarrow a(b+1) \leq 6$</p> <p>ب) $aRb \Leftrightarrow -1 \leq a + 5b \leq 1$</p>	۱۸

<p>نمودار رابطه ی زیر را رسم کنید .</p> $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x^2 \}$	۱۹
<p>اگر $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{2, 3, 5\}$ و R رابطه ای از A به روی B باشد که به صورت زیر تعریف شده است :</p> $R = \left\{ (x, y) \mid \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N} \right\}$ <p>ابتدا $A \times B$ را محاسبه کرده و سپس اعضای رابطه ی R را تعیین کنید.</p>	۲۰
<p>رابطه $R = \{(a, b) \mid a^2 \leq b\}$ روی مجموعه $A = \{1, 2, 5\}$ تعریف شده است، کدام یک از گزینه های زیر <u>نادرست</u> است؟</p> <p>الف) $2 \in R$ ب) $2 \notin R$ ج) $(5, 1) \notin R$ د) $(2, 1) \in R$</p>	۲۱

رابطه هم‌ارزی

کلاس هم‌ارزی

رابطه R در مجموعه‌ی اعداد صحیح به صورت زیر تعریف شده است .

$$aRb \Leftrightarrow a^3 + a = b^3 + b$$

اولاً: نشان دهید R رابطه‌ی هم‌ارزی است. ثانیاً: کلاس هم‌ارزی $[4]$ را تعیین کنید.

۱

رابطه R روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است.

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 - 5y = z^2 - 5t$$

۲

ثابت کنید R روی \mathbb{R}^2 یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. سپس کلاس $[(1, 2)]$ را تعیین کنید.

رابطه R روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 - d^2 = c^2 - b^2$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(2, 3)]$ را تعیین کنید.

رابطه R روی \mathbb{N}^2 به صورت $ab = cd \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$ زیر تعریف شده است، ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۴

رابطه R روی $(\mathbb{Z} - \{0\})^2$ به صورت $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Leftrightarrow (x, y)R(z, t)$ تعریف شده است. ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۵

رابطه R روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x - z = 2(y - t)$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(2, 3)]$ را تعیین کنید.

۶

رابطه R روی \mathbb{N}^2 به صورت $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ab = cd$ زیر تعریف شده است، ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۷

رابطه R روی \mathbb{Z}^2 به صورت $x^3 + n^3 = y^3 + m^3 \Leftrightarrow (x, y)R(m, n)$ تعریف شده است ثابت کنید R روی \mathbb{R}^2 یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۸

رابطه R در مجموعه‌ی اعداد صحیح به صورت $a^3 + 2b = b^3 + 2a \Leftrightarrow aRb$ تعریف شده است. الف: ثابت کنید R رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب: کلاس هم‌ارزی $[5]$ را مشخص کنید.

۹

ثابت کنید رابطه «هم‌مساحت بودن» در مجموعه‌ی چندضلعی‌های داخل صفحه یک رابطه هم‌ارزی است.	۱۰
رابطه R در \mathbb{Z} بصورت $xRy \Leftrightarrow 5 \mid x - y$ تعریف شده است. ثابت کنید R یک رابطه هم‌ارزی است.	۱۱
ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 7\}$	۱۲

رابطه‌ی هم‌ارزی R به صورت $xRy \Leftrightarrow 5 \mid x - y$ تعریف شده است. رابطه R مجموعه‌ی \mathbb{Z} را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟ این کلاس‌های هم‌ارزی را مشخص کنید.

۱۳

رابطه R روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^3 - t^2 = z^3 - y^2$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.
ب) کلاس $[(-2, 3)]$ را تعیین کنید.

۱۴

رابطه R در \mathbb{Z} به صورت $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 5 \mid x - y\}$ تعریف شده است.
الف: ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب: کلاس هم‌ارزی $[3]$ را تعیین کنید.

۱۵

رابطه R روی \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده است.

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 + t = z^2 + y$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(1, 0)]$ را تعیین کنید.

۱۶

رابطه R روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به صورت $a^3 - d^3 = c^3 - b^3 \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$ تعریف شده است.
الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(2, 3)]$ را تعیین کنید.

۱۷

رابطه R روی $(\mathbb{Z} - \{\circ\})^2$ به صورت $\frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2} \Leftrightarrow (x, y)R(z, t)$ تعریف شده است.
الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(3, 2)]$ را تعیین کنید.

۱۸

رابطه R روی $\mathbb{Z}^2 - \{(\circ, \circ)\}$ به صورت $x^2 t = z^2 y$ $\Leftrightarrow (x, y)R(z, t)$ تعریف شده است.
الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(1, 5)]$ را تعیین کنید.

۱۹

رابطه R در $\mathbb{Z}^2 - \{(\circ, \circ)\}$ به صورت $\frac{a}{b^3} = \frac{c}{d^3} \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$ تعریف شده است.
الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس هم‌ارزی $[(3, -1)]$ را تعیین کنید.

۲۰

رابطه R روی \mathbb{R}^2 به صورت $b - d = 2(a - c) \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$ تعریف شده است،
الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس هم‌ارزی $[(1, 2)]$ را تعیین کنید.

۲۱

رابطه R در مجموعه‌ی \mathbb{R} به صورت $\sqrt[3]{x} + y = \sqrt[3]{y} + x \Leftrightarrow xRy$ تعریف شده است، ثابت کنید R یک
رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲۲

رابطه R در مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \{0\}$ به صورت $xy > 0 \Leftrightarrow xRy$ تعریف شده است،
 الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس هم‌ارزی $[(-2)]$ را مشخص کنید.

۲۳

رابطه R در \mathbb{Z}^2 به صورت $x^2 - y = z^2 - t \Leftrightarrow (x, y)R(z, t)$ تعریف شده است:
 الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(1, 2)]$ را تعیین کنید.

۲۴

<p>فرض کنیم $A = \{1, 2, 3\}$ و رابطه‌ی R در A^2 به صورت زیر تعریف شده باشد:</p> $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ <p>الف) ثابت کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس $[(3, 1)]$ را بیابید.</p>	۲۵
<p>رابطه R در \mathbb{Z} بصورت $xRy \Leftrightarrow 4 \mid x - y$ تعریف شده است.</p> <p>الف) ثابت کنید R یک رابطه هم‌ارزی است. ب) کلاس‌های هم‌ارزی آن را مشخص کنید.</p>	۲۶

فصل سوم

فضاهای نمونه و پیشامدهای تصادفی

یک سکه سالم و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. مطلوب است تعیین:
الف: فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی

ب: پیشامد A ، آنکه سکه پشت و تاس مضرب ۳ بیاید.

پ: پیشامد B آنکه سکه رو یا تاس مضرب ۳ بیاید.

ت: پیشامد $A \cap B$

۱

هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچکتر یا مساوی ۲۰ را روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور
قرعه بر می‌داریم. مطلوب است تعیین:
الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت کوچکتر از ۶ باشد.

ت) پیشامد $A \cap B$ و $A \cap B'$

۲

۳	<p>یک سکه سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A آنکه اقلاً دو بار رو بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B آنکه فقط ۲ بار پشت بیاید.</p> <p>د) پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید.</p>
۴	<p>یک سکه سالم و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. مطلوب است: الف: فضای نمونه‌ای مناسب این آزمایش تصادفی.</p> <p>ب: پیشامد A، آنکه سکه پشت و تاس بزرگتر از ۴ باشد.</p> <p>پ: پیشامد B آنکه (سکه رو و تاس عدد اول) یا (سکه رو و تاس عددزوج) باشد.</p>
۵	<p>یک سکه سالم را ۲ بار می‌اندازیم مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن هر دو بار رو یا هر دو بار پشت بیاید.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن فقط ۱ بار رو بیاید.</p>
۶	<p>اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامدهای زیر را به صورت عبارتهای مجموعه‌ای بیان کنید و با استفاده از نمودار ون، آن‌ها را نشان دهید.</p> <p>الف) A اتفاق بیافتد ولی B اتفاق نیافتد.</p> <p>ب) پیشامد A و B اتفاق بیافتد.</p>

۷	<p>دو تاس را با هم می‌اندازیم . مطلوب است: الف) پیشامد A که مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد.</p> <p>ب) پیشامد B که عدد دو تاس زوج باشد.</p> <p>ج) پیشامد C که مجموع اعداد دو تاس کمتر از ۷ باشد.</p>
۸	<p>دو سکه را با هم می‌اندازیم . مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A آن که اقلایک بار پشت بیاید.</p>
۹	<p>خانواده‌ای دارای دو فرزند است. الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟</p> <p>ب) پیشامد A که در آن فقط یک فرزند پسر باشد را مشخص کنید.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند دختر باشد را مشخص کنید.</p> <p>ت) پیشامد $A \cup B'$ را مشخص کنید.</p>
۱۰	<p>یک سکه سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A آنکه اقلایک دو بار «رو» بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B آنکه فقط ۲ بار «پشت» بیاید.</p> <p>د) پیشامد $A \cap B$ را مشخص کنید.</p>

<p>هر یک از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۸ را روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B'$</p>	<p>یک سکه سالم را ۲ بار می‌اندازیم مطلوب است: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن هر دو بار رو یا هر دو بار پشت بیاید.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن فقط ۱ بار رو بیاید.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B'$</p>	<p>یک سکه سالم و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. مطلوب است: الف: فضای نمونه‌ای مناسب این آزمایش تصادفی.</p> <p>ب: پیشامد A، آنکه سکه پشت و تاس بزرگتر از ۴ باشد.</p> <p>پ: پیشامد B آنکه (سکه رو و تاس عدد اول) یا (سکه رو و تاس عددزوج) باشد.</p>	<p>سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، اگر رو بیاید آنگاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی</p> <p>ب) پیشامد A، که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید.</p> <p>پ) پیشامد B به طوری که حداقل دو بار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B'$</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

۱۵	<p>هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۱۶ را روی کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه بر می‌داریم. مطلوب است تعیین:</p> <p>الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت یک رقمی باشد.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B$</p>
۱۶	<p>هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توان نوشت را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوب است تعیین:</p> <p>الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد.</p> <p>پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B'$</p>
۱۷	<p>یک سکه سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است:</p> <p>الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A آن که حداقل دو بار «رو» بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B آن که فقط ۲ بار «پشت» بیاید.</p> <p>د) پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید.</p>

<p>یک سکه سالم و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای این تجربه‌ی تصادفی</p> <p>ب) پیشامد A، که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.</p> <p>د) پیشامد $A' \cup B'$.</p>	۱۸
<p>یک سکه سالم را ۳ بار می‌اندازیم مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن لااقل دو بار «رو» بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن هر سه بار سکه به یک طرف ظاهر شود.</p> <p>د) پیشامد $A \Delta B$ را مشخص کنید.</p>	۱۹
<p>هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها ۱ به طور قرعه‌کارتی را بر می‌داریم. مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت مجذور کامل باشد.</p> <p>د) پیشامد $A - B$</p>	۲۰
<p>دو مکعب سالم را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین: الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده ۸ باشد.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن حاصلضرب اعداد رو شده، مضرب ۱۵ شود.</p> <p>د) پیشامد $A - B$.</p>	۲۱

<p>ارقام ۹، ۰، ۳ و ۵ را در نظر بگیرید، مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه‌ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.</p> <p>ب) پیشامد A آن که اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشد.</p> <p>پ) پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.</p> <p>ت) پیشامد $A \cap B'$</p>	۲۲
<p>یک تاس سالم را دو بار می‌اندازیم . مطلوب است تعیین: الف: پیشامد A آن که عدد ظاهر شده در پرتاب اول ۳ باشد.</p> <p>ب) پیشامد B آن که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب عددی اول باشد.</p> <p>ج) پیشامد C آن که عدد ظاهر شده در هر دو پرتاب یکسان باشد.</p> <p>د) پیشامد آن که C رخ دهد ولی B رخ ندهد.</p>	۲۳
<p>چهار سکه را با هم پرتاب می‌کنیم، مطلوب است: الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن حداقل سه بار رو بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید.</p> <p>د) پیشامد $A - B$ را بیاید.</p>	۲۴

۲۵	<p>فرض کنید A، B و C سه پیشامد باشند. برای هر کدام از پیشامدهای زیر یک عبارت مجموعه‌ای پیدا کرده و آن را با استفاده از نمودار ون نشان دهید :</p> <p>الف) پیشامد A و پیشامد B اتفاق بیفتند اما پیشامد C اتفاق نیفتد.</p> <p>ب) فقط پیشامد A اتفاق بیفتد.</p>
۲۶	<p>در قسمت های "الف" و "ب" داده شده ی زیر ، با عبارت مناسب جای خالی را تکمیل کنید و در قسمت "ج" با استفاده از واژه داده شده گزاره ها را کامل کنید.</p> <p>الف) هر..... ، یک زیر مجموعه از فضای نمونه ای است.</p> <p>ب) در فضای نمونه ای پرتاب یک سکه و یک تاس سالم با یکدیگر ، تعداد زیر مجموعه های فضای نمونه ای آن برابر است.</p> <p>ج) انتخاب یک نقطه از سطح یک دایره، آزمایشی از فضای نمونه ای و انتخاب تعداد محصولات معیوب یک کارخانه ، آزمایشی از فضای نمونه ای است. (گسسته - پیوسته)</p>
۲۷	<p>اگر A و B دو پیشامد معین باشند ، پیشامد "تنها یکی از دو پیشامد A و B اتفاق بیفتد" را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید.</p>
۲۸	<p>کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است ؟</p> <p>الف) تعداد اتومبیل هایی که در ساعت مشخص از مقابل مدرسه می گذرند.</p> <p>ب) افتادن سیب از درخت</p>
۲۹	<p>یک سکه سالم و یک تاس مخصوص داریم که به جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو را با هم می اندازیم، مطلوب است تعیین :</p> <p>الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی.</p> <p>ب) پیشامد A که در آن تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.</p> <p>ج) پیشامد B که در آن تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.</p>

<p>سکه ای را یک بار پرتاب می کنیم. اگر سکه رو ظاهر شد، آن گاه تاس را می ریزیم. در غیر این صورت یک بار دیگر سکه را می اندازیم.</p> <p>الف) فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟</p> <p>ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا بنویسید.</p>	۳۰
<p>اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد "تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد." را نمایش دهید.</p>	۳۱

فصل ۴

احتمال اندازه گیری شانس

احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو سیب سالم باشند.	۱
هرگاه خانواده‌ای ۴ فرزند داشته باشد. احتمال اینکه حداقل یک پسر در این خانواده وجود داشته باشد چقدر است؟	۲
دو تاس را با هم می‌اندازیم مطلوب است احتمال اینکه مجموع شماره‌های دو تاس پس از پرتاب فرد و کمتر از ۸ باشد.	۳

۴	<p>۳ لامپ از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آن‌ها معیوب می‌باشند به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید احتمال اینکه:</p> <p>(الف) هیچ کدام معیوب نباشد.</p> <p>(ب) فقط یکی از لامپ‌ها معیوب باشد.</p>
۵	<p>از جعبه‌ای که ۵ کارت به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ در آن است، دو کارت به تصادف با هم بیرون می‌آوریم احتمال اینکه مجموع شماره‌های دو کارت بزرگتر از ۵ باشد را حساب کنید.</p>
۶	<p>در یک کلاس ۳۲ نفر دانش‌آموز در ۴ ردیف روی نیمکت نشسته‌اند، به طور تصادفی ۲ نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:</p> <p>(الف) هر دو از ردیف اول باشند.</p> <p>(ب) یکی از ردیف اول و یکی از ردیف دوم باشد.</p>
۷	<p>اعداد ۱ تا ۱۵ را روی کارت نوشته و پیش از مخلوط کردن کارت‌ها ۳ کارت به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است احتمال آنکه عدد روی هر یک از کارت‌ها مضرب ۳ یا اول باشد.</p>

۸	۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوب است احتمال اینکه اقلای یکی از سکه‌ها رو بیاید.
۹	یک عدد از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخاب شده کمتر از ۷ یا زوج باشد را تعیین کنید.
۱۰	با ارقام $0, 1, 2, 3, 4$ و عددی سه رقمی به تصادف (بدون تکرار ارقام) ساخته‌ایم. احتمال آنکه این عدد زوج باشد چیست؟
۱۱	از بین ۱۲ نفر که ۵ نفرشان دانش آموز کلاس اول و بقیه کلاس دوم هستند، ۳ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه: الف) هیچ کدام کلاس اولی نباشد. ب) فقط یکی کلاس اولی باشد. ج) اقلای یکی کلاس اولی باشد.
۱۲	یک عدد به تصادف از میان اولین ۱۰ عدد زوج مثبت انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آنکه عدد انتخاب شده مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد.

۱۳	دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال اینکه عدد هر دو تاس مضرب ۳ باشد را مشخص کنید.
۱۴	۴ نفر در یک اتاق قرار دارند، احتمال آنکه روز تولد هیچ کدام در سال با یکدیگر یکی نباشد چقدر است؟
۱۵	در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است، از این کیسه دو مهره به تصادف و بدون جاگذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه: الف) هر دو مهره هم‌رنگ نباشند. ب) اقلاً یکی از مهره‌ها سفید باشد.
۱۶	اگر ۵ معلّم و ۳ دانش‌آموز به تصادف کنار هم قرار گیرند. احتمال اینکه: الف) معلّمین کنار هم و دانش‌آموزان کنار هم باشند چقدر است؟ ب) معلّمین کنار هم باشند، چقدر است؟
۱۷	از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به طور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو سیب سالم باشند.

<p>از جعبه‌ای که محتوی ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۵ مهره آبی است، ۲ مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند.</p>	۱۸
<p>از بین ۲۲ دانش‌آموز، قرار است به طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آنکه ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.</p>	۱۹
<p>در یک جعبه ۵ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۷ مهره آبی وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از داخل جعبه بر می‌داریم. مطلوب است احتمال اینکه :</p> <p>الف) از هر رنگ یک مهره خارج شده باشد.</p> <p>ب) دو مهره قرمز و یکی سفید باشد.</p>	۲۰
<p>در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است، از این کیسه سه مهره به تصادف و بدون جاگذاری خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:</p> <p>الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.</p> <p>ب) یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد.</p>	۲۱

<p>در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۲ مهره سبز وجود دارد. ۳ مهره با هم و به تصادف از کیسه بر می‌داریم. مطلوب است احتمال اینکه :</p> <p>الف) مهره‌ها هم‌رنگ نباشند.</p> <p>ب) دو مهره سفید و یک مهره قرمز باشد.</p>	۲۲
<p>عددی به تصادف از فضای نمونه‌ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است، احتمال آنکه عدد انتخاب شده فرد یا کمتر از ۶ باشد.</p>	۲۳
<p>از بین ۵ دانش‌آموز سال اول و ۷ دانش‌آموز سال دوم به تصادف یک تیم چهار نفره انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این که لااقل ۳ نفر آن‌ها سال دوم باشد.</p>	۲۴
<p>۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند، با این حال امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آن‌ها وجود دارد. مطلوب است محاسبه احتمال این که:</p> <p>الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.</p> <p>ب) ۵ زن انتخاب شوند.</p>	۲۵

۲۶	<p>از بین ۴ کارمند، ۲ تکنسین و ۳ کارگر، کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل می‌دهیم. مطلوب است احتمال آنکه:</p> <p>الف) در کمیته کارگری وجود نداشته باشد.</p> <p>ب) در کمیته حداکثر یک کارمند وجود داشته باشد.</p>
۲۷	<p>از بین ۱۲ دانشجو می‌خواهیم به طور تصادفی ۴ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دانشگاه انتخاب کنیم. اگر ۷ نفر از این دانشجویان در رشته فیزیک و ۵ نفر در رشته شیمی مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آنکه در این تیم:</p> <p>الف) فقط یک دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشد.</p> <p>ب) حداقل ۳ نفر از آن‌ها دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشند.</p>
۲۸	<p>از یک سبد محتوی ۳ سیب فاسد و ۵ سیب سالم به تصادف ۲ سیب بیرون می‌آوریم. احتمال آن را بیابید که:</p> <p>الف) هر دو سیب سالم باشند.</p> <p>ب) هر دو سیب از یک نوع نباشند.</p>
۲۹	<p>۵ دانش‌آموز در نظر می‌گیریم. احتمال این که روز تولد دو نفری از آن‌ها یک روز هفته نباشد را مشخص کنید.</p>
۳۰	<p>دوازده نقطه مطابق شکل روی دو خط موازی قرار دارند. از این نقطه‌ها سه نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این که این سه نقطه رأس‌های یک مثلث باشند را به دست آورید.</p> <p style="text-align: center;"> $\begin{matrix} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$ </p>

از میان ۵ پیچ و ۷ مهره که درون جعبه‌ای قرار دارند، ۴ تای آنها را به تصادف خارج کرده‌ایم، احتمال آن را بیابید که دو جفت پیچ و مهره داشته باشیم.	۳۱
یک جعبه محتوی ۱۰ لیوان می‌باشد که ۴ عدد آنها معیوب است، از این جعبه ۵ لیوان به تصادف بر می‌داریم. مطلوب است احتمال اینکه: الف) ۲ لیوان معیوب باشد. ب) تمام لیوان‌ها سالم باشند.	۳۲
می‌خواهیم یک تیم سه نفری از ۱۰ دانش‌آموز رشته تجربی و ۶ دانش‌آموز در رشته ریاضی انتخاب کنیم، مطلوب است احتمال آن که: الف) هر سه نفر رشته ریاضی باشند. ب) دو نفر رشته تجربی و یک نفر رشته ریاضی باشند.	۳۳
در یک خانواده با دو فرزند احتمال اینکه بچه‌ها از دو جنس مخالف و یا هر دو دختر باشند را پیدا کنید.	۳۴
۱۰ نفر را در نظر می‌گیریم، احتمال اینکه روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز نباشد را مشخص کنید. (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)	۳۵

۳۶	<p>نمودار درختی مربوط به حالات ممکن جنسیت فرزندان یک خانواده با دو فرزند را بنویسید. سپس جاهای خالی را با توجه به آن کامل کنید. (فرض می کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{1}{4}$ باشد).</p> <p>تعداد پسرها : ۰ ۱ ۲</p> <p>تعداد حالات: ۱ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p> <p>احتمال: $\frac{1}{4}$ <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/></p>
----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

احتمال دو جمله‌ای

۱	<p>سکه‌ای را ۷ بار می‌اندازیم. مطلوب است احتمال اینکه: الف) دقیقاً ۲ بار پشت بیاید. ب) دقیقاً ۲ بار پشت نیاید.</p>
۲	<p>سکه سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه ۷ بار رو بیاید.</p>
۳	<p>تاسی را ۵ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که سه بار عدد زوج بیاید چقدر است؟</p>
۴	<p>خانواده‌ای ۶ فرزند دارد. احتمال آن را بیابید که دو فرزند خانواده پسر باشد.</p>

در یک آزمون ۱۵ سؤالی که سؤالات دارای پاسخ (بلی - خیر) می باشند، مطلوب است احتمال آن که فردی به سه سؤال، پاسخ (بلی) داده باشد.	۵
تاس سالمی را ۸ بار می اندازیم، احتمال آن را حساب کنید که حداقل ۶ بار عددی فرد آمده باشد.	۶

احتمال غیر هم‌شانسی در فضاهای گسسته و احتمال یک پیشامد اختیاری

تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید.	۱
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

<p>۳ نفر A، B و C در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. احتمال برد A دو برابر احتمال برد B و احتمال برد C، $\frac{1}{3}$ احتمال برد A است.</p> <p>الف) احتمال برد A چقدر است؟</p> <p>ب) احتمال باخت C چقدر است؟</p>	۲
<p>فرض کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم: $P(c) = \frac{1}{4}$، $P(d) = \frac{1}{8}$ و $P(a) = 3P(b)$ مطلوبست $P(a)$ و $P(b')$.</p>	۳
<p>سه دونه A، B و C در یک مسابقه شرکت کرده‌اند، شانس بردن A، سه برابر شانس بردن C، شانس بردن C نصف شانس بردن B است، شانس بردن هر یک را تعیین کنید.</p>	۴
<p>فرض کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم: $P(c) = 2P(d)$، $P(b) = 2P(c)$ و $P(a) = 2P(b)$ مقدار $P(a)$ را محاسبه کنید.</p>	۵

۶	<p>تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال آنکه عدد تاس کوچکتر از ۴ باشد چقدر است؟</p>
۷	<p>علی، حسن و حسین برای استخدام شدن در شغلی کاندید هستند، اگر شانس علی و حسن برابر باشد ولی شانس حسین دو برابر شانس هر کدام از آنها باشد احتمال آن را بدست آورید که:</p> <p>الف) حسین استخدام شود.</p> <p>ب) علی استخدام شود.</p>
۸	<p>تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد، دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عدد اول باشد $P(A)$ را بیابید.</p>

۹	<p>تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. مطلوب است احتمال اینکه عدد برآمده در پرتاب تاس، زوج یا مضرب ۳ باشد.</p>
۱۰	<p>اگر در پرتاب یک سکه احتمال آمدن «رو» ثلث احتمال آمدن «پشت» باشد، احتمال آنکه در پرتاب این سکه رو بیاید چقدر است؟</p>
۱۱	<p>در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c\}$ اگر $P(b) = \frac{1}{3}$ و $P(c) = \frac{1}{4}$ مطلوب است: $P(a)$</p>
۱۲	<p>تاسی به گونه‌ای تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد غیر اول دو برابر احتمال آمدن هر عدد اول است. اگر $A = \{2, 3, 5\}$ باشد $P(A)$ را محاسبه کنید.</p>

در فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c\}$ ، اگر $P(a) = 2P(b)$ و $P(c) = \frac{1}{4}$ ، $P(a)$ را محاسبه کنید.	۱۳
تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد فرد ۵ برابر احتمال آمدن هر عدد زوج است. احتمال آمدن از اعداد را حساب کنید.	۱۴
فرض کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم، $P(d) = \frac{3}{8}$ و $P(a) = P(b) = 2P(c)$ ، مقدار $P(b)$ را محاسبه کنید.	۱۵
چهار دنده A_1, A_2, A_3, A_4 در یک مسابقه شرکت کرده‌اند، اگر شانس برنده شدن دنده‌های A_2 و A_3 ، دو برابر شانس برنده شدن دنده A_1 باشد و A_1 و A_4 هم‌شانس باشند احتمال آنکه دنده A_2 یا A_4 برنده شود چقدر است؟	۱۶

<p>سه دانش آموز A، B و C با هم مسابقه دو میدانی می دهند. احتمال برنده شدن A و C یکسان ولی احتمال برنده شدن هر کدام سه برابر احتمال برنده شدن B است. احتمال آن که C یا B برنده شوند چقدر است؟</p>	۱۷
<p>فرض کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ یک فضای نمونه ای باشد مطلوب است محاسبه ی $P(a')$ و $P(b')$ در صورتی که داشته باشیم، $P(a) = 2P(b)$ و $P(c) = \frac{1}{4}$.</p>	۱۸
<p>تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب تاس احتمال آنکه عدد تاس کوچک تر از ۴ باشد چقدر است؟</p>	۱۹
<p>اگر $S = \{a, b, c, d\}$ و $P\{a, b, c\} = \frac{1}{4}$ و $P\{a, b, d\} = \frac{2}{3}$ آنگاه $P\{a, b\}$ را بدست آورید.</p>	۲۰

<p>در یک شهرستان ۴ نفر کاندیدای انتخاب شهردار هستند. اگر بدانیم شانس انتخاب شدن A_1 دو برابر شانس انتخاب شدن A_2 و شانس انتخاب شدن A_3 دو برابر شانس انتخاب شدن A_4 است و A_2 و A_3 هم شانس باشند. احتمال اینکه A_1 انتخاب شود، چقدر است؟</p>	۲۱
<p>سه دونه a، b و c مسابقه می دهند، اگر شانس برنده شدن a سه برابر شانس برنده شدن b و شانس برنده شدن b نصف شانس برنده شدن c باشد، احتمال این که a برنده نشود چقدر است؟</p>	۲۲

<p>چهار دونده a, b, c و d در یک مسابقه شرکت می کنند، فرض کنیم احتمال برنده شدن a سه برابر احتمال برنده شدن b و احتمال برنده شدن b نصف احتمال برنده شدن c و دونده های c و d هم شانس باشند. احتمال برنده شدن این که a یا d را به دست آورید.</p>	۲۳
<p>در فضای نمونه ای $S = \{a, b, c, d\}$ و $P\{a, d\} = \frac{5}{7}$ و $P\{a, b, c\} = \frac{17}{35}$ و b و c هم شانس هستند، احتمال هر یک را بیابید.</p>	۲۴
<p>در یک کلاس احمد، علی و بهرام داوطلب انتخاب نمایندگی کلاس می باشند، اگر احتمال انتخاب علی دو برابر احمد و احتمال انتخاب بهرام سه برابر علی باشد، احتمال انتخاب هر یک را بیابید.</p>	۲۵

تاسی به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد اول، سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است، اگر در پرتاب این تاس A پیشامد وقوع عدد کوچکتر از ۴ باشد، احتمال وقوع پیشامد A را محاسبه کنید.

۲۶

احتمال در فضاهای پیوسته

دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شود. مطلوب است احتمال آنکه:

الف: مجموع دو عدد کمتر از ۲ باشد.

ب: مجموع دو عدد بیشتر از ۱ باشد.

۱

از بین اعداد حقیقی ۱ و ۵ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه این عدد کوچکتر از ۲ یا بزرگتر از ۴ باشد.	۲
دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۴ انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آنکه مجموع دو عدد بین ۲ و ۴ باشد.	۳
دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آنکه مجموع این دو عدد دو عدد بین ۱ و ۳ باشد.	۴
دو عدد حقیقی x و y به تصادف در فاصله $[0, 2]$ انتخاب می‌کنیم با فرض اینکه پیشامد A به صورت $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 2, x - y \geq 1\}$ باشد مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.	۵

نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر می‌گیریم مطلوب است احتمال اینکه فاصله این نقطه از هر رأس بزرگتر از ۱ باشد.	۶
نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۴ انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه فاصله‌ی این نقطه از هر رأس مربع بزرگتر از ۱ باشد چیست؟	۷
دو عدد حقیقی به طور تصادفی در فاصله $[-2, 2]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع مربعات دو عدد بزرگتر یا مساوی ۴ باشد را تعیین کنید.	۸
اگر x و y دو عدد حقیقی از بازه‌ی $[-2, 2]$ باشند، احتمال آن را بیابید که $ x + y \leq 1$.	۹

۱۰	<p>تیراندازی به صفحه‌ی هدف به شکل دایره‌های متحدالمرکز تیراندازی می‌کند. شعاع صفحه‌ی هدف 20 سانتی‌متر و شعاع دایره‌ی کوچکتر 10 سانتی‌متر است. فرض کنیم تیر حتماً به صفحه‌ی هدف برخورد می‌کند، احتمال برخورد تیر به دایره‌ی کوچکتر را محاسبه کنید.</p>
۱۱	<p>نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع 2 انتخاب می‌شود. احتمال اینکه این نقطه به فاصله‌ی $5/0$ از یکی از رئوس مربع باشد چقدر است؟</p>
۱۲	<p>دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین 0 و 3 انتخاب می‌شود. مطلوب است احتمال آنکه:</p> <p>الف: مجموع دو عدد کمتر از 1 باشد.</p> <p>ب: مجموع دو عدد بیشتر از 2 باشد.</p>

۱۳	<p>نقطه‌ای به تصادف داخل مستطیلی به طول ۷ و به عرض ۴ در نظر می‌گیریم. مطلوب است احتمال اینکه فاصله‌ی این نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد باشد.</p>
۱۴	<p>نقطه (x, y) را به طور تصادفی درون یک مستطیل به رأس‌های $(0, 0)$، $(0, 1)$، $(2, 0)$، و $(2, 1)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه $x > 2y$ باشد.</p>
۱۵	<p>نقطه (x, y) را درون دایره $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه نقطه‌ی مورد نظر در $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد را تعیین کنید.</p>

۱۶	دو عدد حقیقی به طور تصادفی در فاصله $[-2, 2]$ انتخاب می کنیم. احتمال آنکه مجموع مربعات دو عدد کمتر از $\frac{1}{4}$ را تعیین کنید.
۱۷	دو عدد حقیقی x و y را در فاصله $[0, 2]$ به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه $ x - y < 1$ را پیدا کنید.
۱۸	نقطه‌ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر می گیریم. مطلوب است احتمال این که فاصله‌ی این نقطه از هر رأس مربع کوچکتر از $\frac{1}{4}$ باشد.

<p>نقطه (x, y) را درون فضای نمونه‌ای $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه نقطه‌ی مورد نظر در $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x + 1\}$ باشد را تعیین کنید.</p>	۱۹
<p>فرض کنیم دو قطعه چوب داریم که طول آن‌ها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر باشد. قطعه بزرگ‌تر را با اره دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث بدهند چقدر است؟</p>	۲۰
<p>دو عدد حقیقی x و y به تصادف در فاصله $[0, 2]$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه مجموع این دو عدد دو عدد بین ۱ و ۲ باشد.</p>	۲۱

۲۲	سکه‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر را داخل مربعی به ضلع ۵ سانتی‌متر می‌اندازیم. احتمال آن را بیابید که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد.
۲۳	نقطه‌ای به تصادف درون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی که طول هر ساق آن ۳ سانتی‌متر است انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن که فاصله‌ی این نقطه از هر رأس مثلث بیشتر از ۱ سانتی‌متر باشد.
۲۴	نقطه‌ای به تصادف درون متوازی‌الاضلاعی به رئوس $A(0, 3)$ ، $B(1, 5)$ ، $C(5, 5)$ و $D(4, 3)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که داشته باشیم: $x < 1$ یا $x > 3/5$.

۲۵	<p>نقطه‌ای به تصادف از فضای نمونه‌ای $S = \{(x, y) x, y \in \mathbb{R}, 1 \leq x + y \leq 3\}$ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که $x \leq 1$ و $y \leq 1$ باشد.</p>
۲۶	<p>اگر x و y دو عدد تصادفی از بازه حقیقی $[0, 2]$ باشند، احتمال آن را بیابید که داشته باشیم: $2 \leq y + 2x \leq 2$</p>
۲۷	<p>یک نقطه (x, y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رأس‌های $(0, 0)$، $(4, 0)$ و $(3, 2)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست؟</p> <p>الف) $x < 2$ ب) $x < 2y$</p>

قوانین احتمال

قضیه :

قضیه :

اگر $P(A) = \frac{3}{8}$ ، $P(B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ باشد، در این صورت $P(A \cap B')$ را تعیین کنید.	۱
اگر $P(A) = \frac{5}{6}$ ، $P(B') = \frac{6}{7}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{6}$ باشد، مقدار $P(A \cap B')$ را محاسبه کنید.	۲
اگر $P(A) = \frac{4}{8}$ ، $P(B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ باشد، در این صورت $P(A \cap B')$ را تعیین کنید.	۳
اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ باشد، مقدار $P(A' \cup B)$ را تعیین کنید.	۴

۵	<p>احتمال آنکه علی در درس جبر قبول شود ۲۳٪ و احتمال آنکه حسن در درس جبر قبول شود ۲۷٪ است، احتمال آنکه هر دو قبول شوند ۱۵٪ است. مطلوب است احتمال آنکه دست کم یکی از آن‌ها قبول شوند.</p>
۶	<p>اگر $P(A) = \frac{7}{10}$، $P(A \cap B) = \frac{7}{15}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ باشد، مطلوب است محاسبه: الف) $P(A)$ و $P(B)$ ب) $P(B - A)$</p>
۷	<p>اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشد، $P(B)$ را تعیین کنید.</p>
۸	<p>احتمال آن که درخانه‌ای یخچال باشد برابر ۰/۸۵ و احتمال آن که هم یخچال و هم تلویزیون باشد ۰/۴ و احتمال آن که حداقل یکی از دو وسیله یخچال و تلویزیون باشد ۰/۹۶ می‌باشد، احتمال آن را بیابید که در این خانه: الف) تلویزیون باشد. ب) فقط یخچال باشد.</p>

اگر A و B دو پیشامد داشته باشیم $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ ، مطلوب است محاسبه:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

۹

اگر $P(A') = \frac{2}{5}$ ، $P(B) = 2P(A \cup B)$ و $P(A' \cup B') = \frac{1}{4}$ باشد، مطلوب است محاسبه $P(B)$

۱۰

اگر A ، B و C سه پیشامد دوجزا باشند و $P(A) = \frac{3}{5}$ ، $P(B) = \frac{5}{5}$ و $P(C) = \frac{2}{5}$ باشد، در این صورت $P(A' \cap (B \cup C))$ را تعیین کنید.

۱۱

<p>از بین اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ...، ۸۰۰ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۳ یا ۴ یا بر هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟</p>	۱۲
<p>اگر $P(A) = \frac{3}{5}$، $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ و $P(B - A) = \frac{1}{5}$ باشد، مطلوب است: الف) $P(A - B)$ ب) $P(B)$</p>	۱۳
<p>اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشند مطلوب است: الف) $P(B)$ ب) $P(B - A)$</p>	۱۴

<p>از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 150\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۴ یا بر ۵ یا بر هر دو بخش پذیر باشد چقدر است؟</p>	۱۵
<p>اگر $P(A) = \frac{2}{5}$، $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ و $P(B \cup A) = \frac{4}{5}$ باشد، مطلوب است:</p> <p>الف) $P(A \cap B)$ ب) $P(A \cap B')$</p>	۱۶
<p>اگر $P(A) = \frac{3}{7}$، $P(B) = \frac{4}{7}$ و $P(A \cup B) = \frac{6}{7}$ باشد، مطلوب است $P(A' \cap B')$.</p>	۱۷

۱۸	<p>احتمال این که دانش آموزی در درس جبر و احتمال قبول شود ۳۴٪ و در درس حسابان قبول شود ۲۳٪ است و احتمال این که دست کم در یکی از این دو درس قبول شود ۳۸٪ است. احتمال این که این دانش آموز در هر دو درس قبول شود، چقدر است؟</p>
۱۹	<p>اگر نسبت احتمال قبول شدن علی به قبول نشدن علی $\frac{2}{3}$ باشد، آنگاه احتمال قبول شدن علی را تعیین کنید.</p>
۲۰	<p>عددی به تصادف از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ انتخاب می کنیم. احتمال این که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ بخش پذیر نباشد را بیابید.</p>
۲۱	<p>فرض می کنیم ۲۵٪ مردم یک شهر روزنامه «الف» و ۲۰٪ روزنامه «ب» و ۸٪ هر دو روزنامه را می خوانند. اگر شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود، احتمال این که هیچ یک از این روزنامه ها را نخواند، چقدر است؟</p>

فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند، احتمال این که از عالی قاپو بازدید کند $0/74$ ، احتمال این که از بازار اصفهان بازدید کند $0/70$ ، احتمال این که از مسجد جامع بازدید کند $0/64$ ، احتمال این که از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند $0/46$ ، احتمال این که بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند $0/44$ و احتمال این که از عالی قاپو و مسجد جامع دیدن کند $0/72$ است. احتمال این که به بازدید هر سه مکان برود $0/34$ است. احتمال این که این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۲۲

ثابت کنید

$$P(A \cap B \cap C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

۲۳

نشان دهید که :

$$P(A) \geq P(A \cap B) \quad \text{الف)}$$

$$P(A) \leq P(A \cup B) \quad \text{ب)}$$

۲۴

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، ثابت کنید :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

۲۵

اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ آنگاه ثابت کنید:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

۲۶

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

۲۷

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید:

$$P(A' \cap B') - P(A') + P(B) = P(A \cap B)$$

۲۸

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

۲۹

اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

$$P(A \cup B \cup C) \geq P(A) + P(B) + P(C)$$

۳۰

برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

۳۱