

با سلام و صبح بخیر لطفاً به نکات زیر توجه داشته باشید:

- الف) پاسخ سؤالات را داخل برگه و سر جای خود خوش خط و خوانا بنویسید. (فقط با خودکار آبی پاسخ دهید)  
 ب) نوشتن توضیحات کافی، کامل و کلیه روابط و فرمول‌ها برای هر سؤال الزامی است. (از خلاصه نویسی اکیداً پرهیزید).  
 ج) مدیریت زمان را فراموش نکنید.

۱	به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید. (رسیدن به جواب آخر ارزش دارد).	بارم
الف	اگر $m$ و $n$ دو عدد صحیح فرد باشند آن گاه بزرگترین عددی که $m^2 - n^2$ حتماً بر آن بخش پذیر است چه عددی است؟ $m^2 - n^2 = 8K + 1 - 8K' + 1 = 8(K - K') = 8K''$	۰/۵
ب	معلم جبر کلاس الف در هفتمین جلسه از سال تحصیلی وقتی وارد کلاس می‌شود قبل از اینکه تکالیف دانش‌آموزان را ببیند به بابک می‌گوید: «حتماً امروز هم تکالیفت را نوشته‌ای!» به نظر شما معلم از چه استدلالی استفاده کرده است؟ استدلال استقرایی	۰/۲۵
۲	برای هر عدد $n \in \mathbb{N}$ موارد الف و ب را به روش استقرای ریاضی اثبات کنید:	
الف	$P(1): 2^2 + 4 - 1 = 9 = 9 \times 1 \quad \checkmark$ $P(k): 2^{2k} + 4k - 1 = 9m' \rightarrow 2^{2k} = 9m' - 4k + 1$ $P(k+1): 2^{2k+2} + 4k + 4 - 1 = 9m''$ $2^2(2^{2k}) + 4k + 5 = 2^2(9m' - 4k + 1) + 4k + 5 = 36m' - 24k + 4 + 4k + 5 = 36m' - 18k + 9 = 9(4m' - 2k + 1) = 9m''$	۱
ب	$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ $P(1): 1 < 2 \quad \checkmark \quad P(2): 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \quad \checkmark$ $P(k): 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$ $P(k+1): 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ $2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$ $2\sqrt{k} < 2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ $2\sqrt{k} < \frac{2(k+1) - 1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2k+1}{\sqrt{k+1}}$ $2\sqrt{k} < \sqrt{k+1}$ $4k < k+1 \rightarrow 3k < -1$	۱/۲۵

- الف ۱ آیا می‌توان از مجموعه‌ی  $A = \{1, 3, 5, \dots, 17\}$  پنج عدد پیدا کرد که مجموعشان ۳۲ شود؟ (دلیل خود را با استدلال ریاضی ذکر کنید.)  
 اعضای مجببی  $A$  همگی فرد هستند در نتیجه بر فرم  $2K+1$  توان نوشت:  
 $(2K_1+1) + (2K_2+1) + (2K_3+1) + (2K_4+1) + (2K_5+1) = 2(K_1+K_2+K_3+K_4+K_5) + 5$   
 حاصل پنج عدد از مجببی «بلا صوره» فرست پس هیچ عدد ۳۲ ساخته نمی‌شود.  
 $= 2K' + 5 = 2(K'+2) + 1 = 2K'' + 1$

- ب اگر «مجموع مکعبات اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک» برابر باشد با «مربع مجموع اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک»  
 حاصل عبارت روبرو را بیابید (با جواب آخر).  
 $1^3 + 12^3 + 14^3 + \dots + 28^3 = ?$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 14^3 = 2^3 \left[ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 14^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \right]$   
 $2^3 \left[ \left( \frac{14 \times 15}{2} \right)^2 - \left( \frac{4 \times 5}{2} \right)^2 \right] = 8 \times \left[ (105)^2 - (10)^2 \right] = 8 \times [(105+10)(105-10)]$   
 $= 8 \times 115 \times 95 = 87,400$   
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

- ۴ اگر  $x, y$  دو عدد حقیقی باشند به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:  
 $x^2 + y^2 \geq x^2y + xy^2$   
 $\Leftrightarrow x^2 - x^2y + y^2 - xy^2 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x^2(x-y) + y^2(y-x) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y^2) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (x-y)(x-y)(x+y) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0$   
 با توجه به اینکه همه‌ی عملیات‌های فوق درست می‌باشند در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

- ۵ آیا  $P(n) = 3^n + 4$  همواره عدد اول تولید می‌کند؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 $P(1) = 3^1 + 4 = 7$   
 $P(2) = 3^2 + 4 = 13$   
 $P(3) = 3^3 + 4 = 29$   
 عدد مرکب

- ۶ عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید: (به صورت اگر ... آن گاه ... بنویسید).  
 اگر حلوانسازای سبزه‌نگردی!  
 گر صبر کنی ز غوره حلوانسازای!



بارم	به روش برهان خلف ثابت کنید:	۷
۱	<p>فرض خلف <math>(a, a+1) = m</math></p> <p><math>\rightarrow a = mb</math> <math>\rightarrow a+1 = mb'</math></p> <p><math>\Rightarrow 1 = mb' - mb \rightarrow 1 = m(b' - b)</math></p> <p>یعنی عدد یک عامل اول دارد که این غلط است.</p> <p>لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی (عدد طبیعی متوالی عامل اول مشترک ندارند).</p>	الف
۱	<p><math>Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a, b) = 1 \right\}</math> (می دانیم <math>\sqrt{3}</math> یا <math>\sqrt{7}</math> اعدادی گنگ هستند.)</p> <p>فرض خلف: <math>\sqrt{3} - \sqrt{7} = \frac{a}{b} \rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{7} = \frac{a^3}{b^3} \rightarrow (\sqrt{3})^2 = \left( \frac{a^3}{b^3} + \sqrt{7} \right)^2</math></p> <p><math>\rightarrow 3 = \frac{a^4}{b^4} + 7 + \frac{2a^3\sqrt{7}}{b^3} \rightarrow -4 - \frac{a^4}{b^4} = \frac{2a^3\sqrt{7}}{b^3} \rightarrow \sqrt{7} = \frac{-4 - \frac{a^4}{b^4}}{\frac{2a^3}{b^3}}</math></p> <p>در نتیجه عدد مورد نظر گنگ است فرض خلف باطل است.</p>	ب
	مسائل زیر را با استفاده از اصل لانه کبوتر حل کنید: (به طور کامل توضیح دهید و راه حل بنویسید.)	۸
۱	<p>حداقل چند نقطه درون یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۵ سانتی متر انتخاب کنیم، تا مطمئن شویم که دست کم فاصله‌ی دو تا از آن نقاط از یک سانتی متر کمتر است. (رسم شکل کامل الزامی است.)</p> <p>از آنجایی که بیشترین فاصله در مثلث متساوی الاضلاع برای دو نقطه از گوشه‌ها ضلع کمتر است پس برای اینکه فاصله دو نقطه از یک سانتی متر کمتر باشد باید مثلث بزرگ را به مثلث‌های ۱۵ ضلع یک سانتی متر تقسیم کرد.</p> <p><math>(1 \times 25) + 1 = 26</math></p> <p>پس اصل لانه کبوتر حداقل ۲۶ نقطه باید انتخاب کرد تا در مثلث به ضلع ۵ سانتی متر دست کم دو نقطه فاصله شان از هم کمتر از یک سانتی متر باشد.</p> <p>۲۵ = مثلث‌های متساوی الاضلاع لانه‌ها ۱۵ = به ضلع یک سانتی متر نقاط = کبوترها ۲ = جواب</p>	الف

ب	از بازه‌ی $[1, 1393]$ حداقل چند عدد حقیقی باید انتخاب کرد تا حتماً در میان آن‌ها چهار عدد مانند $x$ و $y$ و $z$ و $t$ یافت شوند که رابطه $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}] = [\sqrt{z}] = [\sqrt{t}]$ برقرار باشد. ( $[\ ]$ علامت جزء صحیح یا برکت می‌باشد).
۱	بر آنکه برکت اعداد چند عدد نخواهد بام مساوی شود، باید این چند عدد بین دو مربع کامل متوالی باشند پس با این منطق بازه‌ی بالا را به بازه‌های کوچکتر تقسیم می‌کنیم: $4 = \text{جواب} \quad \text{اعداد انتخابی} = \text{کبوترها}$ $m = (3 \times 37) + 1 = 112$ $[1393, 1394] = [(37)^2, 1393]$ <p>طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۱۱۲ عدد باید انتخاب کرد تا ۴ عدد در این میان حتماً برکت اعداد یکسان برابر شود.</p>

۹	مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید:
۲/۲۵	$A = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{8}{6}, \frac{11}{10}, \dots \right\} = \left\{ \frac{3n+2}{4n-2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $B = \{-1, 4, -9, 16, \dots, 144\} = \{(-1)^n (n)^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 12\}$ $C = \left\{ \frac{\sqrt{13}+7}{3}, \frac{7-\sqrt{13}}{3} \right\} = \left\{ x \mid x^2 - \frac{14}{3}x + 4 = 0 \right\}$
۱۰	اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ برقرار باشد را بیابید. $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ $A \cap B = \{2, 3, 4\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ $X = \{2, 3, 4, \dots, 10\}$ $2^7 = 128$

۱۱	اگر مجموعه‌ی $A_i = [-i^2, 2i]$ مفروض باشد، حاصل موارد زیر را بیابید: (راه حل کوتاه)
۱	$\bigcap_{i=1}^{1000} A_i = A_{1000} = [-1000^2, 2000]$ $A_{11} = [-121, 22]$ $A_{12} = [-144, 24] \dots A_{1000} = [-1000^2, 2000]$ $\bigcup_{i=2}^{11} A_i = A_2 = [-4, 4]$ $A_4 = [-16, 8]$ $A_{11} = [-121, 22]$

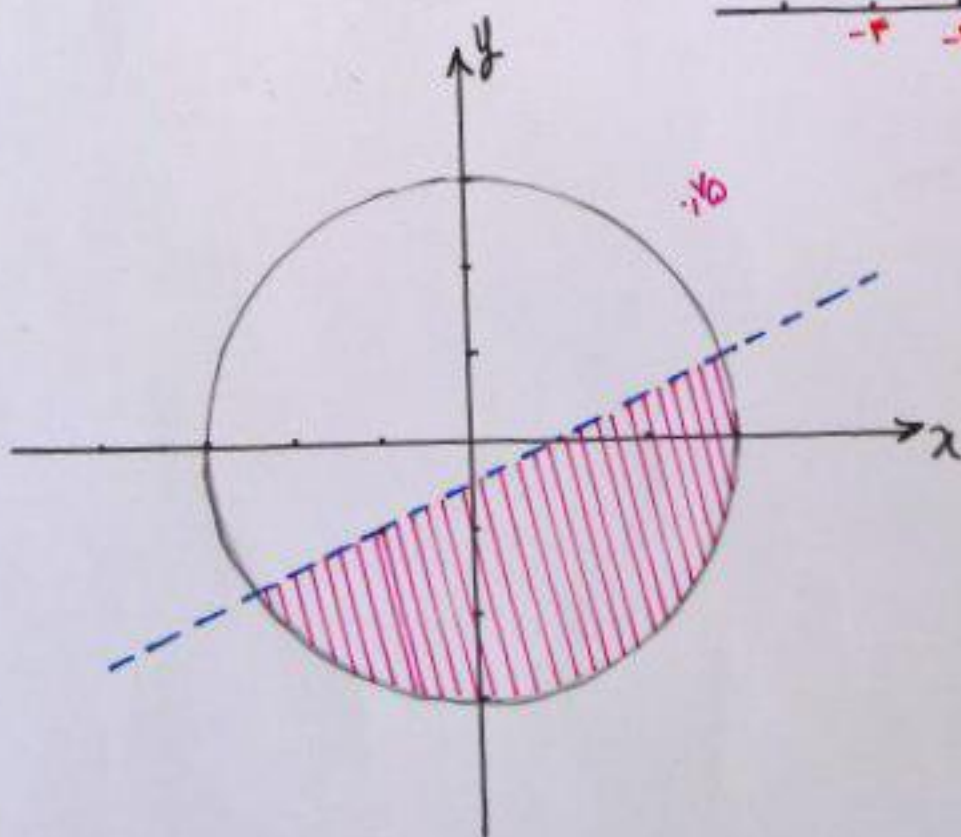
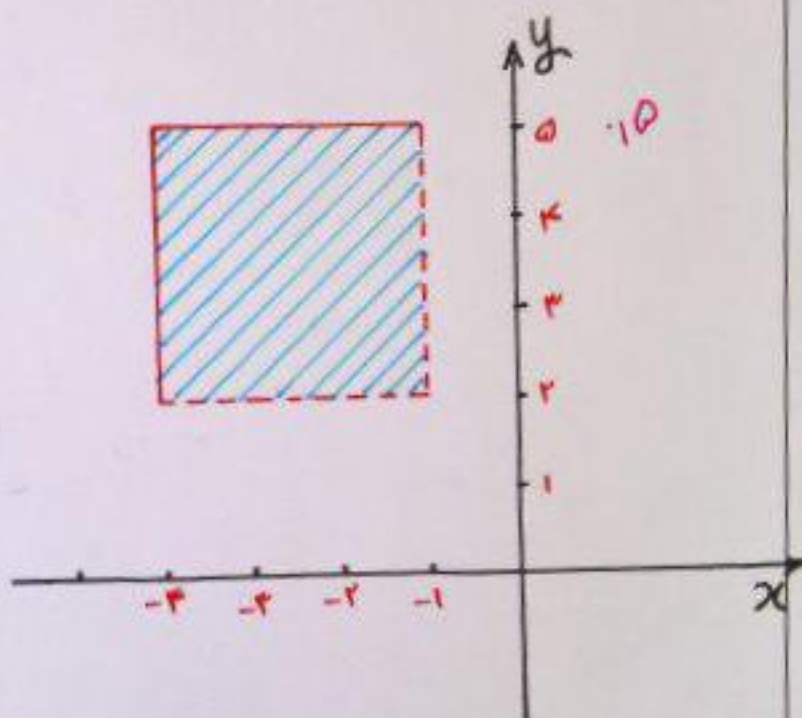
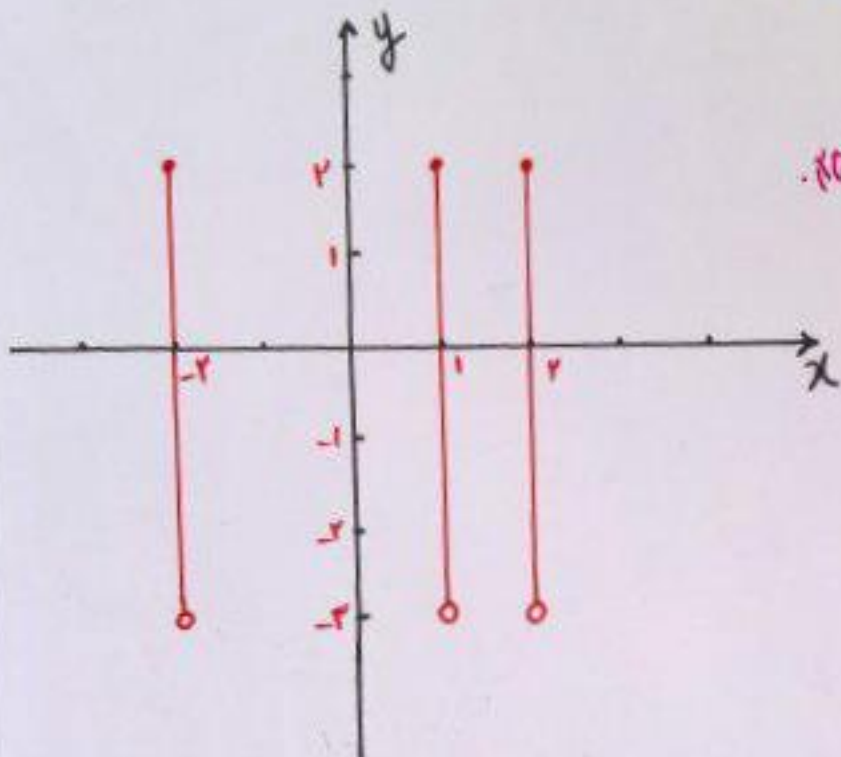
۰/۷۵	۱۲	<p>اگر مجموعه <math>A</math> اعداد دو رقمی و <math>B = \{vk   k \in A\}</math> آن گاه <math>P(A \cap B)</math> چند زیر مجموعه دارد؟</p> <p><math>A = \{10, 11, 12, 13, \dots, 99\}</math>  <math>B = \{70, 77, 84, \dots\}</math>  <math>A \cap B = \{70, 77, 84, 91, 98\}</math>  <math>n(P(A \cap B)) = 2^5 = 32 \rightarrow \text{زیر مجموعه ها} = 2</math></p>
	۱۳	<p>موارد الف و ب را با قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید: (فقط از قوانین مطرح شده بهره بگیرید و خلاصه نویسی ممنوع!)</p>
۱	الف	<p><math>[A \cap (A - B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B</math></p> <p><math>[A \cap (A \cap B)'] \cup [B \cap (A' \cup B')] = [A \cap (A' \cup B)] \cup [(B \cap A') \cup (B \cap B)']</math>  <math>= [(A \cap A') \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \phi] = [\phi \cup (A \cap B)] \cup [(B \cap A') \cup \phi]</math>  <math>= (B \cap A) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap U = B</math></p>
۱/۲۵	ب	<p><math>(A \cup B) \Delta C = (A - C) \cup (B - C) \cup [(C - B) - A]</math></p> <p><math>(A \cap C') \cup (B \cap C') \cup [(C \cap B') \cap A']</math>  <math>= [C' \cap (A \cup B)] \cup [C \cap (B' \cap A')] = [(A \cup B) \cap C'] \cup [C - (B' \cap A)']</math>  <math>= [(A \cup B) - C] \cup [C - (A \cup B)] = D \Delta C = (A \cup B) \Delta C</math></p>
۰/۷۵	۱۴	<p>درستی تساوی زیر را با استفاده از نمودار ون بررسی کنید. (اشکال را مرحله به مرحله رسم کنید).</p> <p><math>A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C</math></p> <p>مرحله اول: <math>A \Delta (B \Delta C)</math> (مرحله دوم: <math>(A \Delta B) \Delta C</math>)</p> <p>تساوی با توجه به نمودارها نوری درست است.</p>

۱)  $\{-2, 1, 2\} \times (-3, 2]$

۲)  $[-4, -1) \times (2, 5]$

۳)  $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9, x - 2y > 1\}$

دایره ای به مرکز مبدأ  
و به شعاع ۳



$$x - 2y = 1$$

$x$	$y$	$1$	$-1$
$1$	$0$	$1$	$-1$