

مدت امتحان : ۲۰ دقیقه	ساعت شروع : ۸/۰۰ صبح	نمونه آزمون احتمالی درس : جبر و احتمال
تاریخ آزمون: ۹۳/۰۲/۲۹		سال چهارم (۲۰ نمره ای)
www.mohsharbfmath.ir		دانش آموزان سال سوم متوسطه

۱	<p>درست یا نادرست بودن عبارتهای زیر را مشخص کنید</p> <p>هـ) اگر <math>A \in B</math> و <math>B \in C</math> آن گاه <math>A \in C</math></p> <p>و) اگر <math>x \notin (A \cap B)</math> آن گاه <math>x \in A'</math> یا <math>x \in B'</math></p> <p>ز) اگر <math>A \cap B = \emptyset</math> آنگاه <math>A \subset B'</math> و <math>B \subset A'</math></p> <p>ح) <math>n(A \cup B) = n(A) + n(B)</math></p> <p>ط) <math>y \in \{x, \{y\}, \{x, y\}\}</math></p>	۱
۱/۵	<p>الف) با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی <math>n</math>، ثابت کنید:</p> $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in N)$ <p>ب) با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید عبارت <math>2^{3n} + 6</math> به ازای هر عدد طبیعی <math>n</math> بر عدد ۷ بخش پذیر است. به بیان دیگر:</p> $2^{3n} + 6 = 7r$ <p>ج) با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی <math>n</math>، ثابت کنید:</p> $\frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$	۲
۱	<p>کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای عبارتهای نادرست مثال نقض بیاورید و عبارتهای درست را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر دو عدد به فرم <math>4k + 3</math>، به فرم <math>4k + 1</math> است. ب) <math>\emptyset \subseteq \{\emptyset\}</math></p> <p>ج) مربع هر عدد فرد بفرم مضرب ۸ بعلاوه ۱ است. د) قرینه هر عدد از خود عدد کوچکتر است.</p>	۳
۱	<p>الف) اگر <math>a</math> و <math>b</math> دو عدد حقیقی مخالف صفر باشند ثابت کنید:</p> $\left  \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right  \geq 2$ <p>ب) اگر <math>a</math> و <math>b</math> دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:</p> $a^2 + b^2 + 2ab \geq \frac{2ab}{5}$ <p>ج) اگر <math>a</math> و <math>b</math> دو عدد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید:</p> $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq 4$	۴

۵	<p>الف) اگر <math>n</math> عددی طبیعی و <math>n^2</math> مضرب ۵ باشد آن گاه <math>n</math> نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)</p> <p>ب) فرض کنید <math>AD</math> نیمساز زاویه <math>A</math> در مثلث <math>ABC</math> باشند، اگر <math>DB \neq CD</math> ثابت کنید <math>AB \neq AC</math>. (برهان خلف)</p> <p>ج) می دانیم <math>\sqrt{2}</math> گنگ است ثابت کنید <math>\sqrt{5} - \sqrt{2}</math> گنگ است. (برهان خلف)</p>	۱
۶	<p>الف) (تیپ ۱) ۴۱ عدد طبیعی متمایز در اختیار داریم حداقل چند در تقسیم بر ۱۳ باقی مانده های مساوی خواهند داشت؟</p> <p>ب) (تیپ ۲) ۵ نقطه در داخل دایره های به شعاع واحد قرار دارند ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از این ۵ نقطه فاصله کمتر از <math>\sqrt{2}</math> دارند.</p> <p>ج) (تیپ ۳) حداقل افرادی که باید در یک گروه حضور داشته باشند تا حداقل ۳ نفر از آنان در یک روز از هفته و در یک فصل از سال متولد شده باشند.</p>	۱
۷	<p>الف) با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید: <math>i) (A - C) - (B - C) = (A - B) - C</math></p> <p><math>ii) A \cup (A \cap B) = A</math></p> <p>ب) اگر <math>A \subset B</math> آن گاه <math>A \cup B = B</math> و بر عکس.</p> <p>ج) با عضوگیری ثابت کنید <math>(A')' = A</math>.</p> <p>د) اگر <math>A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A</math>.</p>	۱
۸	<p>الف) اگر <math>B \subset A</math> باشد، آن گاه <math>(B \cup A) \times (A' - B)</math> برابر است با:</p> <p><math>\emptyset</math> (۱) <math>A \times A'</math> (۲) <math>B \times B'</math> (۳) <math>A \times B</math> (۴)</p> <p>ب) اگر <math>A \subseteq B</math> و <math>A \neq B</math>، آنگاه <math>A</math> را ..... <math>B</math> می نامند.</p>	۱
۹	<p>الف) اگر <math>A_n = \left[ -1 + \frac{1}{n}, n \right]</math> آن گاه مجموعه های <math>\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n</math> و <math>\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n</math> را بیابید.</p> <p>ب) مجموعه های زیر را با گزاره نما بنویسید.</p> <p><math>i) A = \{-1, 0, 1, 8, 27, \dots\}</math></p> <p><math>ii) B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}</math></p>	۱
۱۰	<p>الف) مجموعه های <math>A = \{3^x \mid x \in N, x \leq 2\}</math> و <math>B = \{3x \mid x \in Z,  x  &lt; 2\}</math> داده شده است <math>B^c - B \times A</math> را با اعضا مشخص کنید.</p> <p>ب) اگر <math>A = \{1, 2, 5, 7\}</math> و <math>B = \{1, 3, 4, 7\}</math> مطلوبست:</p> <p><math>i) A \Delta B</math> <math>ii) A^c \cap B^c</math> <math>iii)  P(A) </math></p>	۱

۱	الف) اگر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $k + ۱$ عضو $۳۶$ واحد از $۴$ برابر تعداد زیر مجموعه های سره یک مجموعه $k - ۲$ عضو بیشتر باشد، مقدار $k$ را بیابید. ب) در نمودار ون عبارت $(A \Delta B) - C$ را هاشور بزنید.
۱	الف) نمودار رابطه روبرو را رسم کنید. $R = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq ۴,  x  \geq ۱\}$ ب) اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$ ، رابطه زیر را با زوج مرتب هایش مشخص کنید. $a, b \in A \quad aRb \Leftrightarrow a(b + ۲) \leq ۸$
۱	$X$ و $Y$ را طوری تعیین کنید که دو زوج مرتب روبرو با هم مساوی باشند: $(2^{x-y}, -۱۲)$ و $(۱۲۸, xy)$
۱	الف) تمامی زیر مجموعه های $۳$ عضو مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ را بنویسید. ب) تمام افراز های سه عضو $A$ را بنویسید.
۱	رابطه $R$ روی مجموعه $Z$ به صورت روبرو تعریف شده است : $aRb \Leftrightarrow ۳ \mid a - b$ الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه ی هم ارزی است. ب) این رابطه هم ارزی مجموعه $Z$ را به چند کلاس هم ارزی افراز می کند؟
۱	$i$ ) دو مکعب سالم را پرتاب می کنیم ، مطلوب بست تعیین : الف) <u>تعداد</u> اعضای فضای نمونه ای ب) پیشامد $A$ که در آن مجموع اعداد روشده ، $۱۰$ باشد. ج) پیشامد $B$ که در آن حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب $۱۲$ شود . د) $A - B$ $ii$ ) در یک آزمایش تصادفی می خواهیم طول عمر لامپ های کارخانه در ا بر حسب ساعت اندازه بگیریم. مطلوب بست تعیین الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی. ب) فضای نمونه ای چند برآمد دارد؟ ج) پیشامد $A$ اینکه این لامپ خراب باشد. د) پیشامد $B$ اینکه حداقل عمر لامپ $۱۰۰$ و حداکثر $۱۰۰۰$ ساعت باشد.
۱	الف) در کیسه ای $۵$ مهره سفید و $۶$ مهره ی سیاه و $۴$ مهره ی سبز وجود دارد . از این کیسه $۳$ مهره به تصادف خارج می کنیم مطلوب ب است احتمال آن که : الف) مهره ها هم رنگ نباشد. ب) حداقل $۲$ مهره سفید باشد. ب) با ارقام $۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ ، عددی سه رقمی به تصادف $۰$ بدون تکرار ارقام ساخته ایم . احتمال اینکه این عدد زوج باشد چیست؟
۱	الف) در $۱۰$ بار پرتاب یک تاس سالم احتمال آن را حساب کنید که <u>حداکثر</u> $۳$ بار عددی اول باشد.

	(ب) احتمال این که از میان ۳ نفر، لااقل ۲ نفر در یک فصل از سال متولد شده باشند چقدر است؟	
۱۹	الف) تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. اگر در یک پرتاب این تاس $A$ پیشامد وقوع عدی برگتر از ۲ باشد، $p(A)$ را بیا بید. ب) سه دانش آموز $A$ ، $B$ و $C$ با هم مسابقه می دهند $A$ و $B$ دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آنها سه برابر $C$ است احتمال اینکه $B$ یا $C$ ببرد را تعیین کنید و احتمال باخت $A$ چقدر است؟	۱
۲۰	الف) نقطه ی $(x, y)$ را به طور تصادفی درون مثلث با رئوس $(0,0)$ ، $(2,2)$ ، $(4,0)$ انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال اینکه: $x^2 + y^2 \geq 1$ . ب) اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی از بازه $[-2,2]$ باشند، احتمال آن را بیابید که $ x - y  \leq 1$ . ج) نقطه ای به تصادف در داخل مستطیلی به اضلاع ۴ و ۲ انتخاب می کنیم احتمال آنکه فاصله این نقطه از مرکز مستطیل بیشتر از ۱ باشد.	۱
۲۱	عددی به تصادف از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می کنیم احتمال این که: الف) عدد انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد، اما بر ۵ بخش پذیر نباشد. چه قدر است؟ ب) عدد انتخاب شده نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چه قدر است؟	۱
۲۲	i) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود $\frac{1}{2}$ و احتمال اینکه در امتحان رانندگی قبول شود $\frac{3}{5}$ و احتمال اینکه هم در کنکور و هم در امتحان رانندگی $\frac{3}{10}$ است مطلوبست احتمال اینکه: الف) در کنکور قبول شود ولی در امتحان رانندگی قبول نشود. ب) حداقل در یکی قبول شود. ii) اگر $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{3}$ و $p(A \cap B) = \frac{1}{5}$ باشد مقدار $p(A' \cap B)$ چیست؟	۱
۲۳	الف) فرض می کنیم دو قطعه چوب داریم که طول های آنها به ترتیب ۱ و $\frac{5}{10}$ می باشد قطعه بزرگتر را با اره دو قسمت می کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می شود. احتمال اینکه سه قطعه چوب تشکیل مثلث را بدهند چقدر است؟ ب) اتوبوس های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می کنند و هر ۱۵ دقیقه به ایستگاه می رسند شخصی به تصادف بین ساعت ۸ تا ۸/۳۰ به ایستگاه وارد می شود احتمال اینکه بیش از ۵ دقیقه و کمتر ۱۰ معطل بماند چقدر است؟	۱