

نام و نام خانوادگی: .....

مقطع و رشته: یازدهم ریاضی

نام پدر: .....

شماره داوطلب: .....

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۱۲ تهران



نام درس: حسابان

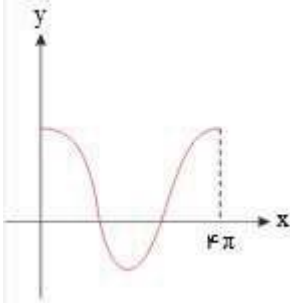
نام دبیر: آقای هاشمی

تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۰۳/۰۵

ساعت امتحان: ۸ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

ردیف	سؤالات	محل مهر یا امضاء مدیر	نمره
۱	در یک دنباله هندسی نزولی هر جمله ی آن، نصف مجموع تمام جملات بعدی است، قدر نسبت این دنباله را بیابید.		۱
۲	در یک دنباله هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.		۱
۳	دو تابع $f = \{(2,5), (6,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، $a$ را به دست آورید.		۱
۴	از دو معادله ی دو مجهولی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار $y$ را به دست آورید.		۱/۵
۵	مجموعه جواب نامعادله ی $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ را به دست آورید.		۱
۶	اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه ی تابع $g(f(x))$ را به دست آورید.		۱
۷	حاصل حدهای زیر را به دست آورید.		
۱/۲۵	A) $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$		
۱/۵	B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$		
۱/۲۵	C) $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right)$		
۱	D) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$		
۸	تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ ، به ازای چه مقدار $a$ در نقطه ای به طول $x = 0$ پیوسته است؟		۱
۹	از دو معادله ی $\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3$ و $\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0$ مقدار $xy$ را به دست آورید.		۱
۱۰	از دو معادله ی دو مجهولی $3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y}$ و $\log(x+2y) = 1 + \log y$ مقدار $x$ را به دست آورید؟		۱
۱۱	اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ ، عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر $x$ را به صورت بازه نمایش دهید؟		۱
۱/۵	اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان $\alpha$ در ربع چهارم باشد، مقدار $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ را به دست آورید.		۱/۵
۱/۵	اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه ی تعریف تابع $g \circ f$ ، را به دست آورید.		۱/۵

ردیف	محل مهر یا امضاء مدیر	ادامه ی سوالات	ردیف
۱/۵		<p>شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع <math>y = \frac{1}{3} + 2\cos mx</math> است. مقدار تابع را در نقطه‌ای به طول <math>x = \frac{16\pi}{3}</math> بدست آورید.</p> 	۱۴
صفحه ی ۲ از ۲			

موفق باشید. جمع بارم : ۲۰ نمره



ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \dots), \quad S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$ $a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a_2}{1-q} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a_1 q}{1-q} \rightarrow 1 = \frac{q}{2-2q} \rightarrow q = 2-2q \rightarrow 3q = 2 \rightarrow q = \frac{2}{3}$	
۲	$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$ $a_1, a_2, a_3, \dots \rightarrow a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots$ $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots \rightarrow a_1^2, a_1^2 q^2, a_1^2 q^4, \dots$ <p>مجموع مجذورات تمام جملات = <math>\frac{2}{3} \left( \text{مجموع مجذورات تمام جملات} \right) \rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{a_1}{1-q} \right)^2</math></p> $\frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{2}{3} \times \frac{a_1^2}{(1-q)^2} \rightarrow \frac{1}{1+q} = \frac{2}{3(1-q)} \rightarrow 3-3q = 2+2q \rightarrow q = \frac{1}{5}$	
۳	<p>می دانیم اگر <math>f(a) = b</math> باشد، آن گاه <math>f^{-1}(b) = a</math> است.</p> $f^{-1}(g(2a)) = f^{-1}(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a-3 = 2a \rightarrow a = \frac{3}{4}$	
۴	$2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7+2x+2y} = 1 \rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1$ $3x + 2y - 7 = 0$ $\log y = 2 \log 3 + \log x \rightarrow \log y = \log 9 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$ $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = 9x \end{cases} \rightarrow 3x + 18x = 7 \rightarrow 21x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3$	
۵	<p>نامعادله ی داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب های آن ها اشتراک می گیریم:</p> $\frac{3x-1}{x-3} > -1 \rightarrow \frac{3x-1}{x-3} + 1 > 0 \rightarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0$ $\frac{x}{\text{عبارت}} \quad \begin{array}{c cccc} -\infty & \frac{1}{4} & 3 & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ یا } x > 3 \quad (I)$ $\frac{3x-1}{x-3} < 3 \rightarrow \frac{3x-1}{x-3} - 3 < 0 \rightarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \rightarrow \frac{10}{x-3} < 0 \rightarrow x < 3 \quad (II)$ <p>از اشتراک I و II به جواب <math>x &lt; \frac{1}{4}</math> می رسیم.</p>	
۶	$g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$	
۷	<p>A) <math>\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \frac{0}{0} \Rightarrow HOP: \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{-2x-1}{2x-2} \right) = \frac{-4-1}{4-2} = -\frac{5}{2}</math></p> <p>B) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{2}x^2} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2} = -\frac{1}{4}</math></p>	

<p>C) <math>\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2 - x^2 + x}{x^2 - 1} \right) = \frac{0}{0}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{3}{2}</math></p> <p>D) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x})^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}</math></p>	
<p>شرط اینکه تابع <math>f</math> در <math>x = a</math> پیوسته باشد، آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در <math>x = a</math> موجود و متناهی و با هم برابر باشند.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow HOP: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1(-1)}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2</math></p> <p><math>f(0) = a</math></p> <p>پس <math>a = 2</math> است.</p>	۸
<p><math>\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3 \rightarrow \ln \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = \ln 3 \rightarrow \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = 3</math></p> <p><math>2xy - 4x + y - 2 = 3y \rightarrow 2xy = 4x + 2y + 2(I)</math></p> <p><math>\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0 \rightarrow \ln(4y-6x) = 0 \Rightarrow (\ln 1 = 0) \Rightarrow 4y - 6x = 1 \Rightarrow y = \frac{1+6x}{4}</math></p> <p>با جایگذاری <math>y</math> در رابطه‌ی (I) داریم:</p> <p><math>2x \left( \frac{1+6x}{4} \right) = 4x + 2 \left( \frac{1+6x}{4} \right) + 2 \rightarrow \frac{x+x^2}{2} = 4x + \frac{1+6x}{2} + 2 \Rightarrow 6x^2 - 13x - 5 = 0</math></p> <p><math>\Delta = b^2 - 4ac = 169 + 120 = 289 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+17}{12} = \frac{5}{2} &amp; \text{ق.ق} \\ x_2 = \frac{13-17}{12} = -\frac{1}{3} &amp; \text{غ.ق.ق} \end{cases}</math></p> <p><math>y = \frac{1+6x}{4} \Rightarrow y = \frac{1+15}{4} = 4 \Rightarrow xy = \left( \frac{5}{2} \right) (4) = 10</math></p>	۹
<p><math>3^{2x+y} = 9 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^2 \times 3^{x-y} \rightarrow 3^{2x+y} = 3^{2+x-y} \Rightarrow x = 2 - 2y</math></p> <p><math>\log(x+2y) = 1 + \log y \rightarrow \log(x+2y) = \log 10 + \log y \rightarrow \log(x+2y) = \log 10y</math></p> <p><math>x+2y = 10y \rightarrow x = 8y \Rightarrow (x = 2 - 2y) \Rightarrow 2 - 2y = 8y \rightarrow 10y = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{10} \\ x = 8y \Rightarrow x = \frac{16}{10} \end{cases}</math></p>	۱۰
<p>چون یک چندجمله‌ای در زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد قرار دارد، بنابراین رادیکال با فرجه‌ی فرد به ازای تمام مقادیر <math>x</math> تعریف شده است و فقط باید عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.</p> <p><math>-\frac{9}{2} \geq 0 \rightarrow \frac{4-9x^2}{2x^2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \text{صورت} = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \rightarrow x = \pm \frac{2}{3} \\ \text{مخرج} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}</math></p>	۱۱
<p><math>\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha - (\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha)</math></p> <p><math>\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = 2\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha</math></p>	۱۲

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{در ربع چهارم } \sin \text{ منفی} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\Rightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{2}{3}$	
<p>ابتدا دامنه تعریف دو تابع <math>f</math> و <math>g</math> را به دست می آوریم.</p> $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ $g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow D_g: x-x^2 \geq 0 \rightarrow x(1-x) \geq 0 \rightarrow \text{تعیین علامت} \rightarrow 0 \leq x \leq 1$ $g \circ f = \left\{ x \in D_f, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \neq 1, x \neq -1, 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \right\} \quad (I)$ $\frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \rightarrow 1-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \quad (II)$ $\frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2} \leq 0 \rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \quad (III)$ <p>از اشتراک I, II و III به جواب <math>x = 0</math> می رسیم.</p>	۱۳
<p>از روی شکل مشخص است که دوره تناوب برابر با <math>4\pi</math> است.</p> $T = \frac{2\pi}{ b } \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{ m } \rightarrow 2 = \frac{1}{ m } \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$ <p>چون <math>\cos(-\alpha) = \cos \alpha</math> است فرقی نمی کند که <math>m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}</math> باشد.</p> $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$ $y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$	۱۴
<p>امضاء:</p>	<p>نام و نام خانوادگی مصحح: علی هاشمی</p> <p>جمع بارم: ۲۰</p>