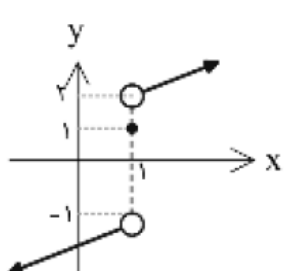
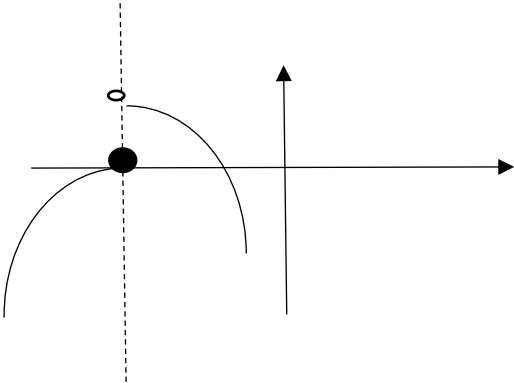
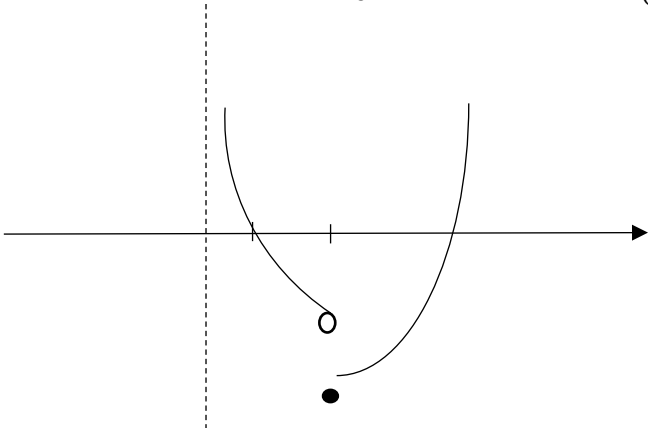
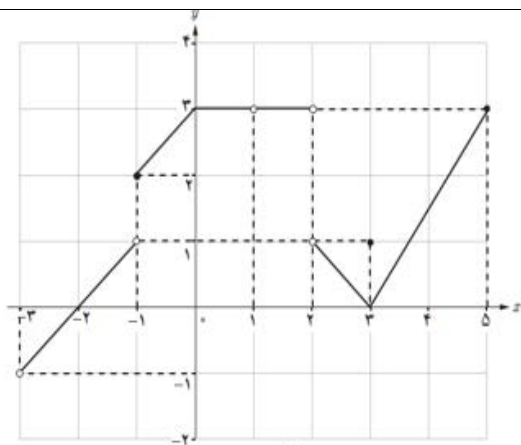


فصل پنجم		
منطقه	سؤال و پاسخ	ردیف
۱۳	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید</p> <p>الف) دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ یک همسایگی محذوف برای صفر است.</p> <p>ب) تابع $y = \sqrt{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) درست ب) درست</p>	۱
۱۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید:</p> <p>اگر $(a-1, 3a+1)$ یک همسایگی از $x=1$ باشد مقدار a کدام است؟</p> <p>(۱) $0 < a < 2$ (۲) $0 < a < 4$ (۳) $1 < a < 2$ (۴) $-2 < a < 0$</p> <p>پاسخ:</p> <p>گزینه ۱</p>	۲
۱۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید:</p> <p>همسایگی چه کدام نقطه در دامنه تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{[x]-2}$ قرار ندارد؟</p> <p>(۱) $x=1$ (۲) $x=2$ (۳) $x=3$ (۴) $x=4$</p> <p>پاسخ:</p> <p>گزینه ۳</p>	۳
۱۳	<p>نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است، مقدار $A = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1)$ را به دست آورید.</p> <p>پاسخ:</p>  <p>$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1) = 2 - (-1) + 1 = 4$</p>	۴

<p>۱۳</p>	<p>نمودار تابعی را رسم کنید که : در همسایگی محذوف $x=-3$ تعریف شده باشد و $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = 0$ باشد. پاسخ:</p> 	<p>۵</p>
<p>۱۲</p>	<p>نمودار $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + 2 & -2 < x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید سپس حاصل حدود زیر را بیابید. پاسخ:</p> <p>۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ۳) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$ ۴) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$</p>  <p>۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ناموجود ۴) ۰</p>	<p>۶</p>
<p>۱۲</p>	<p>۱۳- با توجه به نمودار تابع ، درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید .</p> <p>۱) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ ۲) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$ ۳) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد ۴) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(-1)$</p>	<p>۷</p>

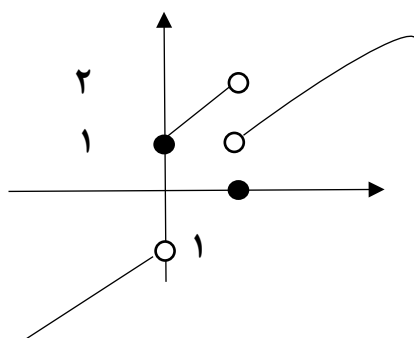


پاسخ:

(۱) درست (۲) نادرست (۳) درست (۴) نادرست

نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است مطلوب است :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1-x)$$



پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(1-x) = f(1-0^+) = f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

۱۲

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید .

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 2 = -1$$

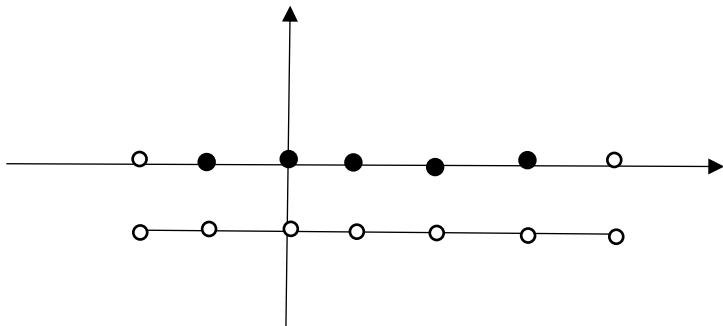
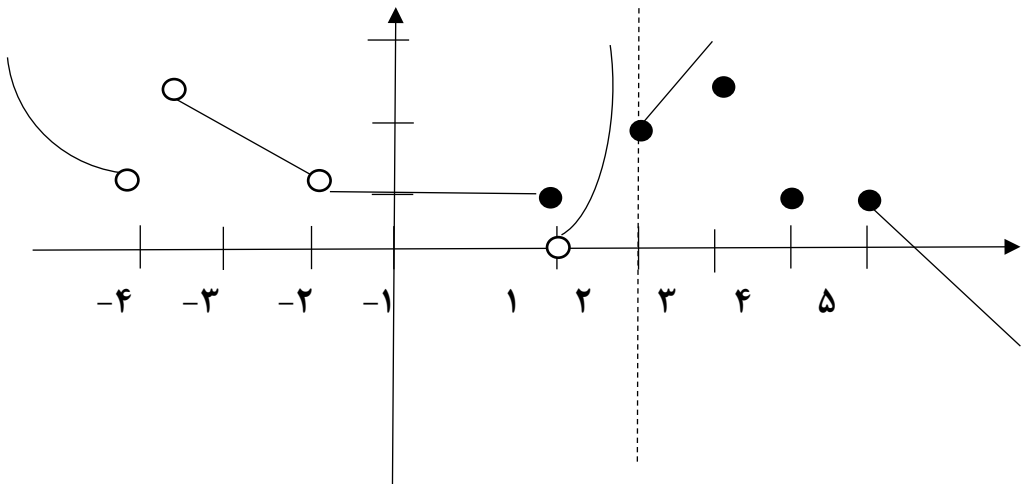
$$1 < x < 2 \rightarrow -2 < -x < -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 - 1 = -1$$

$$0 < x < 1 \rightarrow -1 < -x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

۱۲	<p>۹ - مقادیر a و b را چنان بیابید که $f(x)$ در 3 و -3 دارای حد باشد:</p> $f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$ <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> $\lim_{x \rightarrow 3^+} b - 5x = b - 15$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} ax + 2b = 3a + 2b$ $\rightarrow 3a + 2b = b - 15 \rightarrow 3a + b = -15$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} ax + 2b = -3a + 2b$ $\lim_{x \rightarrow -3^-} 2x - a = -6 - a$ $-3a + 2b = -6 - a \rightarrow -2a + 2b = -6$ $\rightarrow \begin{cases} 3a + b = -15 \\ -2a + 2b = -6 \end{cases} \rightarrow a = -3 \text{ و } b = -6$	۱۰
۱۲	<p>۱۵- آیا حد راست تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در $x = 2$ موجود است؟ چرا؟</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow D_f = (-\infty, 2]$ <p>خیر زیرا با توجه به دامنه همسایگی راست 2 در دامنه موجود نیست.</p>	۱۱
۱۳	<p>مقدار a را بدست $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ و $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ اگر آورید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) - \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = -1$ $1 + 2a - a + 1 = -1 \rightarrow a = -3$	۱۲

<p>۱۳</p>	<p>تابع $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار آن را در بازه $(-2, 4)$ رسم کنید. ب) با استفاده از نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$ را بدست آورید.</p>  <p>$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = -1$</p>	<p>۱۳</p>
<p>۱۳</p>	<p>نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. این تابع در چه نقطه ای حد ندارد؟</p>  <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> <p style="text-align: center;">$x = -4, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4, x = 5$</p>	<p>۱۴</p>

<p>۱۳</p>	<p>با توجه به نمودار مقابل حدود زیر را بدست آورید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> <p>۱) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>۲) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>۳) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$</p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> <p>۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۰</p> </div> <p style="text-align: right; color: red; font-weight: bold;">پاسخ:</p>	<p>۱۵</p>
<p>۱۲</p>	<p>حاصل حد زیر را بدست آورید.</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8}}{[x]}$ $= \frac{\sqrt{1+8}}{1} = 3$ <p style="text-align: right; color: red; font-weight: bold;">پاسخ:</p>	<p>۱۶</p>
<p>۱۳</p>	<p>حاصل حدهای زیر را بدست آورید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x - 6}$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{3}{11}$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{6}$</p> <p style="text-align: right; color: red; font-weight: bold;">پاسخ:</p>	<p>۱۷</p>
<p>۱۳</p>	<p>اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x - b} = a$ و $a \neq 0$ باشد، مقدار a و b را بدست آورید.</p>	<p>۱۸</p>

	<p>پاسخ:</p> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cdot}{\epsilon - b} \rightarrow b = \epsilon \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{5} = a$	
۱۲	<p>تابع $f(x) = \frac{ x-1 }{a+[x]}$ داده شده، مقدار a را از رابطه زیر بیابید.</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$ <p>پاسخ:</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{a-1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{a}$ $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$ $(a-1)a = 2 \rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -1$	۱۹
۱۳	<p>حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{ \cos \pi x }{1-\sqrt{2x}}$ را بدست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^\pm} -\frac{\cos \pi x}{1-\sqrt{2x}} \times \frac{1+\sqrt{2x}}{1+\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^\pm} \frac{-\cos \pi x (1+\sqrt{2x})}{1-2x} \rightarrow 2x-1=t$ $\rightarrow x = \frac{t+1}{2}$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}) (1+\sqrt{t+1})}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi t}{2}}{-t} \times \lim_{t \rightarrow 0} (1+\sqrt{t+1}) = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$	۲۰
۱۶	<p>پیوستگی تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x=3$ را بررسی کنید.</p> <p>پاسخ: ابتدا حد چپ، راست و مقدار تابع در این نقطه را بدست می‌آوریم.</p> $f(3) = [3] = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ <p>با توجه به اینکه $f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ نیست، پس پیوسته نیست.</p>	۲۱

<p>۱۳</p>	<p>در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است.</p> <p>حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x + 1) + \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$ را بدست آورید.</p> $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x + 1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x + 2) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$ $\rightarrow 1 + 0 = 1$	<p>۲۲</p>
<p>۱۶</p>	<p>نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. پیوستگی تابع f در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.</p> <p>پاسخ: با توجه به نمودار تابع، تابع در نقطه $x=1$ دارای حد چپ به مقدار ۱ و دارای حد راست به مقدار ۲ است. همچنین مقدار تابع f در این نقطه برابر ۲ است. پس نتیجه می‌شود تابع f در نقطه $x=1$ از سمت راست پیوسته است ولی تابع پیوسته نیست و در این نقطه ناپیوسته است.</p>	<p>۲۳</p>
<p>۱۶</p>	<p>به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ پیوسته است؟</p> <p>پاسخ: ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=2$ را حساب می‌کنیم.</p> $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ <p>از آنجا که تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد، پس تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته نیست و به ازای هر مقدار a تابع ناپیوسته است. یعنی هیچ مقداری برای a یافت نمی‌شود که تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.</p>	<p>۲۴</p>

۱۶	<p>به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \\ a & x = 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟</p> <p>پاسخ: ابتدا حد چپ و حد راست تابع f در نقطه $x=1$ را حساب می‌کنیم.</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{x}+1) = 2$ <p>با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ و $f(1) = a$، پس نتیجه می‌شود در صورتی که مقدار $a=2$ باشد تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است.</p>	۲۵
۱۶	<p>تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \frac{x-5}{x^2+5}$ را بدست آورید.</p> <p>پاسخ: با توجه به اینکه تابع گویا است و مخرج آن ریشه ندارد، پس تابع در \mathbb{R} پیوسته است. یعنی تعداد نقاط ناپیوستگی صفر است.</p>	۲۶
۱۳	<p>مقدار a را چنین تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax-1 & x \leq 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد.</p> <p>پاسخ:</p> <p>۱) $f(2) = 2a - 1 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$</p> <p>۲) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} \times \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = 4$</p> <p>۳) $2a - 1 = 4 \rightarrow a = \frac{5}{2}$</p>	۲۷
۱۳	<p>تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در تمام نقاط بازه $(1, 4)$ حد دارد. مقدار a و b را بدست آورید.</p> <p>پاسخ:</p> $y = x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{ریشه هستند } x=2 \text{ و } x=3} \begin{cases} 4 + 2a + b = 0 & \rightarrow a = -5 \\ 9 + 3a + b = 0 & \rightarrow b = +6 \end{cases}$	۲۸