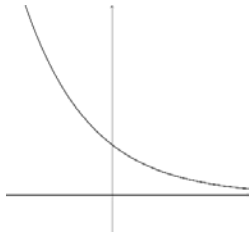
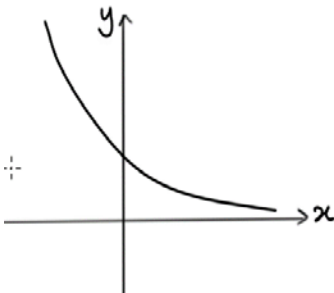
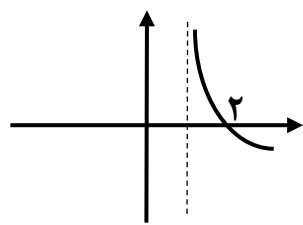


فصل سوم

منطقه	سؤال و پاسخ	ردیف
۶	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>الف) در تابع $f(x) = a^x$ اگر $a > 1$؛ با افزایش مقدار x، مقادیر f می‌یابد. (کاهش، افزایش)</p> <p>ب) نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، به ازای $x > 0$، از نمودار تابع $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ است. (بالتر، پایین‌تر)</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) افزایش</p> <p>ب) بالاتر</p>	۱
۱۰	<p>جاهای خالی را کامل کن.</p> <p>الف) در تابع $f(x) = a^x$ اگر $0 < a < 1$، با کاهش مقدار x مقادیر تابع می‌یابد.</p> <p>ب) برد تابع $y = 3^{-x}$ برابر است با:</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) افزایش</p> <p>ب) $(0, \infty)$</p>	۲
۶	<p>حدود m را چنان تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{m+2}{m-1}\right)^x$ به صورت</p>  <p>مقابل باشد.</p> <p>پاسخ</p> <p>با توجه به نمودار داده شده، پایه باید عدد مثبت کوچکتر از یک باشد پس:</p> $\left. \begin{aligned} 0 < \frac{m+2}{m-1} &\Rightarrow m < -2 \text{ or } m > 1 \\ \frac{m+2}{m-1} < 1 &\Rightarrow \frac{3}{m-1} < 0 \Rightarrow m < 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow m < -2$ 	۳

۶	<p>نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را با رسم مراحل انتقال، رسم کنید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> <p style="text-align: center;"> $y = 2^x$ \longrightarrow $y = 2^x - 1$ \longrightarrow $y = 2^x - 1$ </p>	۴
۱۰	<p>دامنه تابع $f(x) = 5^{-x} + \sqrt{x-2}$ را تعیین نمایید</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> <p>دامنه $y = 5^{-x}$ برابر است با \mathbb{R}</p> <p>دامنه $y = \sqrt{x-2}$ برابر است با $x \geq 2$</p> <p>بنابراین اشتراک دامنه ها: $[2, +\infty)$</p>	۵
۱۰	<p>برد تابع $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$ را تعیین کنید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> $3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x = y \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 3 - y \xrightarrow{\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0} 3 - y > 0 \rightarrow y < 3 \rightarrow (-\infty, 3]$	۶
۱۰	<p>معادله $8^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}$ را حل نمایید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> $8^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} \rightarrow (2^3)^{2x} = (2^{-2})^{2x-3} \rightarrow 2^6x = 2^{-4x+6} \rightarrow 10x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{5}$	۷
۱۰	<p>نیمه عمر عنصری شش سال است. جرم اولیه این نمونه ۵ گرم است در چه مدتی این جرم به مقدار 5×2^{-4} گرم خواهد بود؟</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> $m = \frac{m_0}{2^n} \rightarrow 5 \times 2^{-4} = \frac{5}{2^n} \rightarrow n = 4 ; \quad n = \frac{t}{T} \rightarrow t = 24$	۸
۱۳	<p>درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید</p> <p>الف) دامنه تابع $y = \log_5(2x-3)$ در بازه $(0, +\infty)$ است.</p>	۹

	<p>(ب) برد تابع $y = \log_2 x$ مجموعه اعداد حقیقی است . پاسخ الف) نادرست ب) درست</p>	
۱۳	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید اگر $f(x) = \log_3 2x + 3$ مقدار $f^{-1}(2)$ برابر با است . پاسخ $\log_3 2x + 3 = 2 \rightarrow 9 = 2x + 3 \rightarrow x = 3 \rightarrow f^{-1}(2) = 3$</p>	۱۰
۱۳	<p>جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید الف) اگر $f(x) = 4 - \log_2 x$ مقدار $f(128)$ برابر با است . ب) حاصل $\log_{\frac{1}{2}} 256 + \log_3 27$ برابر با است . پاسخ الف) $f(128) = 4 - \log_2 128 = 4 - 7 = -3$ ب) $\log_{\frac{1}{2}} 256 + \log_3 27 = \log_{2^{-1}} 2^8 + \log_3 3^3 = -8 + 3 = -5$</p>	۱۱
۱۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید : الف) اگر $f(x) = 2^{5x-3}$ ضابطه تابع f^{-1} کدام است ؟ (۱) $y = \log_2 5x - 3$ (۲) $y = \log_2 5x$ (۳) $y = \frac{\log_2 5x + 3}{5}$ (۴) $y = \frac{(\log_2 x) + 3}{5}$ ب) اگر لگاریتم $4x$ در مبنای ۲ برابر ۵ باشد مقدار x کدام است ؟ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) ۸ (۳) $\frac{25}{4}$ (۴) $\frac{4}{25}$ پاسخ الف) گزینه ۴ ب) گزینه ۲</p>	۱۲
۱۳	<p>نمودار تابع $f(x) = -\log_2(x-1)$ را رسم کنید . پاسخ</p> 	۱۳
۱۳	<p>دامنه تابع $f(x) = \log_2 x - 4$ را بدست آورید . پاسخ</p>	۱۴

	$\left. \begin{array}{l} 4-x^2 > 0 \rightarrow -2 < x < 2 \\ 2x-1 \neq 1 \rightarrow x \neq 1 \\ 2x-1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{2} \end{array} \right\} \cap \left(\frac{1}{2}, 2 \right) - \{1\}$	
۱۳	<p>نمودار $y=3^x$ را ۲ واحد به چپ برده سپس ۱ واحد به پایین و در نهایت نسبت به خط $y=x$ قرینه می کنیم ضابطه تابع جدید کدام است ؟</p> <p>پاسخ</p> $y = 3^{x+2} - 1; y + 1 = 3^{x+2}$ $\log_3(y + 1) = x + 2 \rightarrow x = \log_3(y + 1) - 2 \rightarrow y = \log_3(x + 1) - 2$	۱۵
۱۳	<p>اگر لگاریتم عدد ۸ در مبنای x برابر $\frac{1}{5}$ باشد لگاریتم چه عددی در مبنای x^2 برابر ۲ است ؟</p> <p>پاسخ</p> $\log_x 8 = \frac{3}{2} \rightarrow 3 \log_x 2 = \frac{3}{2} \rightarrow \log_x 2 = \frac{1}{2} \rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow x = 4$ $\log_{16} a = 2 \rightarrow a = 256$	۱۶
۱۳	<p>وارون تابع $f(x) = 3^{-x+2} - 5$ به صورت $y = a \log_b(x-c) + d$ است حاصل $a-2b+c-d$ را بدست آورید.</p> <p>پاسخ</p> $y + 5 = 3^{-x+2} \rightarrow \log_3(y + 5) = -x + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \log_3(x + 5)$ $y = 2 - \log_3(x + 5) \rightarrow a = -1, b = 3, c = -5, d = 2$ $a - 2b + c - d = -14$	۱۷
۱۳	<p>تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ تابع وارونش را در نقطه $(2, 1)$ قطع می کند، a, b را بدست آورید</p> <p>پاسخ</p> $\begin{cases} f(2) = 1 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 2a + b = 1 \rightarrow 2a + b = \frac{1}{2} \\ f(1) = 2 \rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a + b = 2 \rightarrow a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{4}; b = 0$	۱۸
۱۲	<p>معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید :</p> <p>الف) $\log_{\frac{1}{5}}(3^{x-1}) = 1$</p> <p>ب) $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}-1} = 0$</p> <p>پاسخ</p>	۱۹

	<p>الف) $\Delta^1 = 3x - 1 \rightarrow x = 2$</p> <p>ب) $2^0 = \log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}-1} \rightarrow 1 = \log_{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}-1}$ $3^1 = x^{\frac{1}{3}-1} \rightarrow x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm 2$</p>	
۱۲	<p>حاصل عبارت مقابل را بیابید :</p> <p>$\Delta^{2+\log_{\Delta} 2}$</p> <p>$\Delta^2 \times \Delta^{\log_{\Delta} 2} = 25 \times 2 = 50$</p>	۲۰ پاسخ
۱۲	<p>ثابت کنید :</p> <p>$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$</p> <p>$\log_b a = x \rightarrow b^x = a \rightarrow b = (a)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \log_a b = \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_b a}$</p>	۲۱ پاسخ
۱۲	<p>معادله زیر را حل کنید :</p> <p>$x^{\log_{\Delta} x} = 625$</p> <p>$\log_x \Delta^4 = \log_{\Delta} x \rightarrow 4(\log_x \Delta) = \frac{1}{\log_x \Delta} \rightarrow (\log_x \Delta)^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \log_x \Delta = \pm \frac{1}{2}$</p> <p>$\rightarrow \begin{cases} \log_x \Delta = \frac{1}{2} \rightarrow \Delta = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow x = 25 \\ \log_x \Delta = -\frac{1}{2} \rightarrow \Delta = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\Delta} \rightarrow \\ x = \frac{1}{25} \end{cases}$</p>	۲۲ پاسخ
۱۲	<p>معادله زیر را حل کنید :</p> <p>$\log_a 2 = \frac{1}{\log_{\frac{1}{6}} a} - \frac{1}{6}$</p> <p>$\log_a 2 = (\log_a 6) - \frac{1}{6} \rightarrow \log_a 2 = 2(\log_a 2) - \frac{1}{6} \rightarrow \log_a 2 = \frac{1}{6} \rightarrow a^{\frac{1}{6}} = 2$ $\rightarrow a = 2^6 = 64$</p>	۲۳ پاسخ
۱۲	<p>نمودار $f(x) = \log_a x$ رسم شده است ، مقدار $f^{-1}(2)$ را محاسبه کنید .</p>	۲۴

	<p style="text-align: right;">پاسخ</p> $f(x) = \log_3 x \rightarrow f^{-1}(x) = 3^x \rightarrow$ $\rightarrow f^{-1}(2) = 3^2 = 9$	
۱۲	<p>لگاریتم عددی در پایه ۹ از لگاریتم عکس مجذور آن عدد در پایه ۹ به اندازه ۴/۵ واحد بیشتر است ، آن عدد را بیابید .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $\log_9 x = \log_9 \left(\frac{1}{x^2} \right) + 4.5 \rightarrow \log_9 x = -2 \log_9 x + 4.5 \rightarrow 3 \log_9 x = 4.5$ $\rightarrow \log_9 x = \frac{3}{2} \rightarrow (9)^{\frac{3}{2}} = x \rightarrow x = 27$	۲۵
۱۲	<p>اگر $\log(x^2 - x + 1) + \log(x + 1) = 1$ باشد ، $\log_3 x$ را به دست آورید .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $\log x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 + 1 = 10 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt[3]{9} \rightarrow \log_3(\sqrt[3]{9}) = \frac{2}{3}$	۲۶
۱۴	<p>معادله ی $1 + \log_x(2x - 1) = \log_x(x + 2)$ را حل کنید.</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $D = x > -2, \quad x > \frac{1}{2}, \quad x > 0, \quad x \neq 1 \Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}, +\infty \right) - \{1\}$ $\log_x(x + 2) - \log_x(2x - 1) = 1 \Rightarrow \log_x \frac{x + 2}{2x - 1} = 1 \Rightarrow \frac{x + 2}{2x - 1} = x$ $\Rightarrow 2x^2 - x = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ق ق}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ غ ق ق}$	۲۷
۱۴	<p>دستگاه معادلات : $\begin{cases} \log x^2 = 10^{1-\log 5} \\ 3 \log_y x - \log_x y = 2 \end{cases}$ را حل کنید .</p> <p style="text-align: right;">پاسخ</p> $\log x^2 = 10^{1-\log 5} \Rightarrow 2 \log x = 10^{\log 2} \Rightarrow 2 \log x = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow$ $x = 10$	۲۸

	$x = 10 \Rightarrow 3 \log_y 10 - \log_{10} y = 2 \Rightarrow 3 \log_y 10 - \frac{1}{\log_y 10} = 2, \log_y 10 = a$ $\Rightarrow 3a - \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow$ $3a^2 - 2a - 1 = 0.$ $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \text{یا} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \log_y 10 = 1 \Rightarrow y = 10 \\ \log_y 10 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y^{-\frac{1}{3}} = 10 \Rightarrow y = 10^{-3} = 0.001 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x = 10 \\ y = 0.001 \end{cases}$	
۱۴	<p>هر گاه داشته باشیم $\log_{0.5} \sqrt{x+1} = \log_{11} 10 \times \log_{12} 11 \times \log_{13} 12 \times \dots \times \log_{99} 98$ حاصل $\log_{\sqrt[3]{4}} x^2$ چقدر است.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> $\log_{0.5} \sqrt{x+1} = \log_{10} 10 \Rightarrow \log_{0.5} \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = (0.5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x+1 = 0.5$ $\Rightarrow x = -0.5$ $x = -0.5 \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{4}} x^2 = \log_{\sqrt[3]{4}} (-0.5)^2 = \log_{\sqrt[3]{4}} 0.25 = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} 4^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = -3$	۲۹
۱۴	<p>نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_3 \sqrt{ax+b}$، محور عرضها را در نقطه ای به عرض یک و طولها را نیز در نقطه ای به طول -۲ قطع می کند، جواب معادله ی $f(x) = \frac{3}{2}$ را حساب کنید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p> $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{b} = 1 \\ \log_3 \sqrt{-2a+b} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9 \\ \sqrt{-2a+b} = 1 \Rightarrow -2a+9 = 1 \Rightarrow a = 4 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x) = \log_3 \sqrt{4x+9}$ $f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 \sqrt{4x+9} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{4x+9} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4x+9 = 27 \Rightarrow$ $4x = 18 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4.5$	۳۰
۱۴	<p>دامنه ی تابع لگاریتمی $y = \log(9-x^2) + \log x$ را بیابید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ</p>	۳۱

	$\begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ \text{و} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ \text{و} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 3 \Rightarrow D = (0, 3)$	
۱۴	<p>اگر $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x}$ باشد، مقدار $f(\log_2 2) + f(\log_2 \frac{1}{2})$ را بدست آورید.</p> <p>پاسخ</p> $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x} = \frac{(2^2)^x - 1}{2^x} = \frac{(2^x)^2 - 1}{2^x} = \frac{(2^x)^2}{2^x} - \frac{1}{2^x} = 2^x - \frac{1}{2^x} = 2^x - 2^{-x}$ $f(\log_2 2) + f(\log_2 \frac{1}{2}) = 2^{\log_2 2} - 2^{-\log_2 2} + 2^{\log_2 \frac{1}{2}} - 2^{-\log_2 \frac{1}{2}}$ $= 2^{\log_2 2} - 2^{-\log_2 2} + 2^{\log_2 2^{-1}} - 2^{-\log_2 2^{-1}} =$ $2^{\log_2 2} - 2^{-\log_2 2} + 2^{-\log_2 2} - 2^{\log_2 2} = 0$	۳۲
۱۴	<p>حاصل $\log_{\sqrt{x\sqrt{x}}} x\sqrt{x\sqrt{x}}$ را بدست آورید. ($x \neq 0, x > 0$)</p> <p>پاسخ</p> $\log_{\sqrt{x\sqrt{x}}} x\sqrt{x\sqrt{x}} = y \Rightarrow \left(\sqrt{x\sqrt{x}}\right)^y = x\sqrt{x\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt{x^3}}\right)^y = x\sqrt{\sqrt{x^3}}$ $\Rightarrow (\sqrt[4]{x^3})^y = x\sqrt[4]{x^3}$ $\Rightarrow (\sqrt{x})^y = \sqrt[4]{x^7} \Rightarrow x^{\frac{y}{2}} = x^{\frac{7}{4}} \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow 4y = 14 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$	۳۳
۱۳	<p>درستی یا نادرستی عبارت "تابع $f(x) = \log_3 x$ تابعی یک به یک است." را مشخص کنید.</p> <p>پاسخ: درست است</p>	۳۴
۱۳	<p>جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) اگر $\log 4 = 0/6$ و $\log 3 = 0/48$ مقدار $\log 0/15$ برابر با است.</p> <p>پاسخ</p> <p>الف) $0/82$</p>	۳۵
۱۳	<p>اگر تابع $f(x) = \left(\frac{r-k}{k+r}\right)^{x+1}$ تابع نمائی باشد، حدود k را بدست آورید.</p> <p>پاسخ</p> $\frac{r-k}{k+r} > 0 \rightarrow -r < k < r$	۳۶
۱۳	<p>نمودار توابع زیر را رسم کنید.</p> <p>الف) $y = 2^{ x }$</p> <p>ب) $y = \log_3(x-1) - 2$</p> <p>پاسخ</p>	۳۷

	(الف)	(ب)	
۱۳	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5x+6} \geq 1$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-5x+6} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \rightarrow x \Rightarrow (2, 3)$	معادله زیر را حل کنید.	۳۸
۱۳	<p>الف) $f(x) = \sqrt{2^4 x - x^2} - 8$</p> <p>ب) $g(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$</p> <p>الف) $2^4 x - x^2 > 2^2 \rightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \rightarrow 1 < x < 3$</p> <p>ب) $\log_{10}(x^2 - 3x) < \log_{10} 10 \rightarrow \frac{x^2 - 3x - 10}{(x-5)(x+2)} < 0 \rightarrow -2 < x < 5$</p>	دامنه توابع زیر را بدست آورید.	۳۹
۱۳	<p>الف) $\log_{(\sqrt{2}-1)}(3 + 2\sqrt{2})$</p> <p>ب) $2 \times 10 \cdot \frac{1}{2} (\log 9 - \log 2)$</p> <p>پ) $(a^{\log_4 3})^{\log_a 4}$</p> <p>الف) $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 \log_{(\sqrt{2}+1)^{-1}} \sqrt{2} + 1 = -2$</p> <p>ب) $2 \times (10^2)^{\frac{1}{2}(\log \frac{9}{2})} = 2 \times 10 \cdot \log_{10} \frac{9}{2} = 2 \times \frac{9}{2} = 9$</p> <p>پ) $(a)^{\frac{\log 3}{\log 4} \times \frac{\log 4}{\log a}} = a^{\log_a 3} = 3$</p>	حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.	۴۰