

۱- (امیر شهرام فصیح زاده) ثابت کنید دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ مساویند.

$$D_f = R, D_g = R \Rightarrow D_f = D_g$$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] = 0 \Rightarrow f(x) = 0, g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$$

پاسخ:

۲- (امیر شهرام فصیح زاده) اگر $f(x - \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$ ، آنگاه $f(x)$ را محاسبه کنید.

$$x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 = (x - \frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

پاسخ:

۳- (مهدیه فرجاد) سنگی داخل آب یک دریاچه پرتاب می شود و باعث ایجاد موج هایی به شکل دایره هم مرکز می شود شعاع دایره ها موج های خارجی بوسیله $r(t) = 2t$ می باشد. t بر حسب ثانیه مدت زمانی است که از پرتاب سنگ می گذرد (مساحت دایره با تابع $A(r) = \pi r^2$ داده می شود $(A \circ r)(t)$ را بیابید و آن را تفسیر کنید.

پاسخ: $(A \circ r)(t)$ مساحت دایره ها را در زمان t نشان می دهد.

$$(A \circ r)(t) = A(r(t)) = a(2t) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$$

۴- (مهدیه فرجاد) نشان دهید مبدا مختصات، مرکز تقارن تابع $f(x) = \log \frac{x+1}{x-1}$ است.

پاسخ: واضح است که $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ شرط اول زوج یا فرد بودن تابع برقرار است از طرفی داریم.

$$f(-x) = \log \frac{-x+1}{-x-1} = \log \frac{1-x}{-x-1} = -\log \frac{x+1}{x-1} = -f(x)$$

۵- (مهدیه فرجاد) $f(x)$ تابعی معکوس پذیر و f^{-1} معکوس آن است. معکوس تابع $g(x) = 1 + 3f(2x - 4)$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$y = 1 + 3f(2x - 4) \Rightarrow \frac{y-1}{3} = f(2x - 4) \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{y-1}{3}\right) = 2x - 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(f^{-1}\left(\frac{y-1}{3}\right) + 4\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(f^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right) + 4\right)$$

۶- (فیروزه عبدالله نژاد) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 5 \\ 3x & x < 1 \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 1 \end{cases}$ باشد ضابطه $(f \circ g)(x)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} g^2(x) & g(x) > 5 \\ 3g(x) & g(x) < 1 \end{cases}$$

$$g(x) > 5 \Rightarrow \frac{x}{2} > 5 \Rightarrow x > 10 \Rightarrow x > 10 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x > 10 \\ 3x^2 + 9 & x < \sqrt{-2} \end{cases}$$

$$g(x) < 1 \Rightarrow x^2 + 3 < 1 \Rightarrow x^2 < -2 \Rightarrow x < \sqrt{-2}$$

۷- (زهرا کهنوجی) نامعادله $\left[2x + \frac{2}{5}\right] = -1$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید. پاسخ:

$$-1 \leq 2x + \frac{2}{5} < 0 \Rightarrow -\frac{7}{5} < 2x < -\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-7}{10} \leq x < -\frac{2}{10} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \left[-\frac{7}{10}, -\frac{1}{5}\right)$$

۸- (فیروزه عبدالله نژاد) زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $g(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$

ب) $f(x) = 2\sin^2 x + 2\cos x + 3$

(الف)

$$2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_g = R - \{0\}, g(-x) = \frac{2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} = \frac{\frac{1}{2^x} + 1}{\frac{1}{2^x} - 1} = \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x} = -\frac{2^x + 1}{2^x - 1} = -g(x)$$

ب) $D_f = R$ $f(-x) = 2\sin^2(-x) + 2\cos(-x) + 3 = 2(-\sin x)^2 + 2\cos x + 3 = 2\sin^2 x + 2\cos x + 3 = f(x)$ تابع زوج است

۹- (نیره فرامرز پور) برد تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ را بدست آورید.

پاسخ: در تابع $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ چون می دانیم $\sqrt{x} \geq 0$ پس \sqrt{x} را بر حسب y می نویسیم.

$$y\sqrt{x} + y = \sqrt{x} \Rightarrow y\sqrt{x} - \sqrt{x} = -y \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = -y \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y}{1 - y}$$

y	0	1
y	-	+
$1 - y$	+	-
$\frac{y}{1 - y}$	-	+

$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{1 - y} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow R_f = [0, 1)$

۱۰- (فیروزه عبدالله نژاد) دامنه و برد $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x} - 1}$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \sqrt{1 - \sqrt{x} - 1} \Rightarrow 1 - \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = [1, 2]$$

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - \sqrt{x} - 1} \leq 1 \Rightarrow R_f = [0, 1]$$

۱۱- (مریم میرامادی) اگر تابع $f = \{(1, 2), (-1, a), (0, b)\}$ فرد باشد $4a - b$ حاصل را بیابید. پاسخ:

شرایط تابع فرد

$$f(a) = -f(-a) \quad f(0) = 0$$

$$f(1) = -f(-1) = -a \Rightarrow 2 = -a \Rightarrow a = -2$$

$$f(0) = b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 4a - b = 4 \times (-2) - 0 = -8$$

۱۲- (مریم میرامادی) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ در هر نقطه دامنه اش همانی باشد. a, b, c را بیابید.

پاسخ: تابع همانی $f(x) = x$ است یعنی باید صورت بر مخرج بخشپذیر باشد.

$$ax^2 + bx + c = x(x - 2) = x^2 - 2x \Rightarrow a = 1, b = -2, c = 0$$

۱۳- (مریم عسکری) اگر در مثلث قائم الزاویه تفاضل اضلاع قائمه برابر ۳ باشد مساحت مثلث را بر حسب تابعی از ضلع قائمه بزرگتر بنویسید؟

$$S = \frac{x \cdot y}{2} \quad x - y = 3 \rightarrow y = x + 3 \rightarrow S = \frac{x(x + 3)}{2} \rightarrow S_{(x)} = \frac{x^2}{2}$$

۱۴- (زهرا خواجویی) تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به گونه ای بیابید که $f(f(x-1)) = 3x + 5$. پاسخ:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b \Rightarrow f(f(x-1)) =$$

$$f(ax - a + b) = a(ax - a + b) + b = a^2x - a^2 + ab + b$$

از طرفی داریم $f(f(x-1)) = 3x + 5$ پس داریم

$$a^2x - a^2 + ab + b = 3x + 5 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \\ a^2 + ab + b = 5 \end{cases} \quad \begin{aligned} -3 + b\sqrt{3} + b = 5 &\Rightarrow b = \frac{8}{1+\sqrt{3}} & a = \sqrt{3} \\ -3 - b\sqrt{3} + b = 5 &\Rightarrow b = \frac{8}{1-\sqrt{3}} & a = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۵- (زهرا خواجویی) ثابت کنید تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آنرا به دست آورید.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{1-x_1^2} = 1 + \sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \Rightarrow 1-x_1^2 = 1-x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

چون هر دو مثبت هستند بنابراین f یک به یک است.

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y-1 = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow (y-1)^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-(y-1)^2$$

$$x = \sqrt{1-(y-1)^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

۱۶- (مهديه اقبالی) آیا رابطه زیر در اعداد حقیقی یک تابع است؟
پاسخ: بله

۱۷- (زهرا خواجویی) تابع f با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[1, 3]$ داده شده است و تابع g به صورت زیر تعریف میشود.

$$g(x) = \frac{1}{3}f(3x) = 5$$

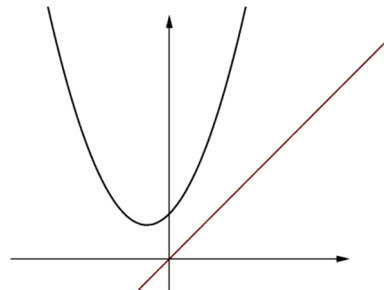
پاسخ: چون دامنه f مجموعه $[-1, 1]$ است برای تعریف $f(3x)$ باید $-1 \leq 3x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$ پس دامنه g

$$D_g = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \quad \text{چون برد } f \text{ مجموعه } [1, 3] \text{ یعنی } 1 \leq f(t) \leq 3 \text{ پس}$$

$$R_g = \left[\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right] \quad \text{یعنی } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}f(t) \leq \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} + 5 \leq \frac{1}{3}f(t) + 5 \leq \frac{3}{3} + 5 \Rightarrow \frac{11}{3} \leq g(x) \leq \frac{13}{3}$$

۱۸- (اعظم ره انجام) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند

الف: وارون پذیر نباشد ب: برای هر $c \in X$ $f(x) > x$ ج: $f(1) > 0$



۱۹- (مریم انجم شعاع) در تابع $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2} & x < 1 \\ 2x - \sqrt{2} & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(3-\sqrt{2}) + f(3-2\sqrt{2})$ را بدست آورید.

$$3-\sqrt{2} > 1, \quad 3-2\sqrt{2} < 1 \Rightarrow f(3-\sqrt{2}) + f(3-2\sqrt{2}) = 2((3-\sqrt{2}) - \sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})\sqrt{2} = 2$$

پاسخ:

۲۰- (مریم انجم شعاع) داخل زمین یک سوراخ به شکل مخروط قائم با ارتفاع و قطر قاعده ی ۳ متر کنده شده است می خواهیم این سوراخ پر کنیمالف: ارتفاع خاک مخروط را به صورت تابعی بر حسب حجم آن بیان کنید.ب: اگر حجم خاک داخل مخروط را با رابطه ای $V(t) = 0.008(t+3)$ بیان شود ارتفاع خاک را به صورت تابعی بر حسب زمان بیان کنید.
پاسخ: الف: خاک همواره به شکل مخروطی جمع می شود که ارتفاع آن دو برابر شعاع قاعده آن است.

$$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 (2r) = \frac{2}{3} \pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{3}{2\pi} V$$

$$r(V) = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi} V} \Rightarrow h(V) = 2\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi} V}$$

ب: کافی است تابع $h \circ V$ را بنویسیم $h \circ V(t) = h(V(t))$ بر حسب t بیان شده است.

$$h(t) = h(V(t)) = 2\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi} \times \frac{8}{1000}(t+3)} = \frac{4}{10}\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}(t+3)}$$

۲۱- (طیبه آذرشین) اگر $f = \{(1, 7), (3, 4), (5, 8)\}$ و $g(x) = x^2 - 4x + 3$ باشند، ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

$$D_f = \{1, 3, 5\} \quad D_g = R \quad g(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{1, 3, 5\} - \{1, 3\} = \{5\}$$

پاسخ:

$$\frac{f}{g}(5) = \frac{f(5)}{g(5)} = \frac{8}{5^2 - 4(5) + 3} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow \frac{f}{g} = \{(5, 1)\}$$

۲۲- (طیبه آذرشین) دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{\log[x]}$ را بدست آورید. پاسخ:

$$\log[x] \neq 0 \Rightarrow [x] > 1 \Rightarrow 2 \leq x \Rightarrow D_f = [2, \infty)$$

۲۳- (طاهره تقی زاده) اگر دامنه $f(x) = \frac{x+2}{x^2+ax+b}$ برابر با $IR - \{-1\}$ باشد $a+b$ چقدر است؟

$$x^2 + ax + b = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow a+b = 3$$

پاسخ:

۲۴- (طاهره تقی زاده) برد تابع $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ را بدست آورید.

پاسخ: $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1 \geq -1$ بنابراین حداقل مقدار این عبارت ۱- است.

$$\sqrt{x^2 - 6x + 8} \geq -1 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow R_f = [-1, +\infty]$$

۲۵- (عفت سراج زاده) دامنه و برد تابع با ضابطه ای $f(x) = \frac{x^4+2}{\sqrt{x^4+1}}$ را تعیین کنید.

پاسخ: چون $x^4+1 > 0$ داریم: $D_f = R$

$$y = \frac{x^4+1+1}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^4+1}{\sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$$

اگر K عددی مثبت باشد همواره داریم $K + \frac{1}{K} \geq 2$ و تساوی وقتی برقرار است که $K = 1$ باشد. بنابراین

$$y = \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \geq 2 \Rightarrow R_f = [2, \infty)$$

۲۶- (بتول سعیدی) یک به یک بودن تابع $f(x) = \sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}$ بررسی کنید پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x} + 1 - 1 = \sqrt{(\sqrt{1+x} + 1)^2 - 1}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{1+x_1} + 1)^2 - 1} = \sqrt{(\sqrt{1+x_2} + 1)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+x_1} + 1)^2 - 1 = (\sqrt{1+x_2} + 1)^2 - 1 \Rightarrow (\sqrt{1+x_1} + 1)^2 = (\sqrt{1+x_2} + 1)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x_1} + 1 = \sqrt{1+x_2} + 1 \Rightarrow \sqrt{1+x_1} = \sqrt{1+x_2} \Rightarrow 1+x_1 = 1+x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ یک به یک است.}$$

۲۷- (ساره رزاقیان) زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$ را مشخص کنید؟ پاسخ:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{5-(-x)^2} = -x\sqrt{5-x^2} = -f(x) \quad \text{فرد}$$

$$5-x^2 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x^2 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_f = [-5, 5]$$

۲۸- (مریم صمصی) اگر $f(x) = 3^x$ باشد. مقدار $f(x+2) - 2f(x+1)$ را بدست آورید. پاسخ:

$$f(x+2) - 2f(x+1) = 3^{x+2} - 2(3^{x+1}) = (3^x \cdot 3^2) - 2(3^x \cdot 3) = 9(3^x) - 6(3^x) = 3f(x)$$

۲۹- (مریم صمصی) تابع $f(x) = x^2 + (a-2)x + 1$ نسبت به محورهای y متقارن است. a را بدست آورید.

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ زوج}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (a-2)(-x) + 1 = x^2 + (2-a)x + 1$$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow x^2 + (a-2)x + 1 = x^2 + (2-a)x + 1 \Rightarrow a-2 = 2-a \Rightarrow a = 2$$

۳۰- (حکیمه حیدری فرسنگی) در هر حالت باتوجه به ضابطه زوج و فرد بودن آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+|x|} \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = x^3 \sin x + x^4 \cos x \quad \text{ب)}$$

پاسخ: الف: f یک تابع زوج است. چون $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. پس دامنه f متقارن است برای بررسی شرط دوم باید $f(-x)$ را حساب کنیم.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2+|-x|} = \frac{x^2+1}{x^2+|x|} = f(x)$$

ب: g یک تابع زوج است. زیرا $D_g = \mathbb{R}$ دامنه متقارن است.

$$g(-x) = (-x)^3 \sin(-x) + (-x)^4 \cos(-x) = -x^3(-\sin x) + x^4 \cos x = x^3 \sin x + x^4 \cos x = g(x)$$

۳۱- تابع f برای هر عدد x و y حقیقی در رابطه $f(f(x)+f(y)) = x+y-1384$ صدق می کند. نشان دهید یک به یک است. (حکیمه حیدری فرسنگی)

پاسخ: فرض کنیم $f(x_1) = f(x_2)$ برای یک به یک بودن باید نشان دهیم $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) + f(x_1) = f(x_1) + f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1) + f(x_1)) = f(f(x_1) + f(x_2))$$

$$f(f(x_1) + f(x_1)) = x_1 + x_1 - 1384, \quad f(f(x_1) + f(x_2)) = x_1 + x_2 - 1384$$

$$\Rightarrow x_1 + x_1 - 1384 = x_1 + x_2 - 1384 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ یک به یک است}$$

۳۲- (مریم پور میرزائی) اگر $[4x] = [2x^2 + 2]$ باشد آنگاه حاصل $[(x+1)^2]$ را بدست آورید. پاسخ:

$$[4x] = [2x^2 + 2] = n$$

$$[4x] = n \rightarrow n \leq 4x < n+1, \quad [2x^2 + 2] = n \rightarrow n \leq 2x^2 + 2 < n+1 \Rightarrow 2n \leq 2x^2 + 4x + 2 < 2(n+1)$$

$$\Rightarrow 2n \leq 2(x+1)^2 < 2(n+1) \Rightarrow n \leq (x+1)^2 < (n+1) \Rightarrow [(x+1)^2] = n$$

۳۳- (مریم پور میرزائی) دامنه تعریف و برد تابع $(x \geq 0, y \geq 0)$ $4x^2 + y^2 = 16$ را بدست آورید. و تابع معکوس آن را تعیین کنید. پاسخ:

$$y^2 = 16 - 4x^2 \Rightarrow 16 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 - 4x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 4x^2 \Rightarrow x^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [0, 2]$$

$$4x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow 16 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 16 \geq y^2 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4 \Rightarrow R_f = [0, 4]$$

$$4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow 4x^2 = 16 - y^2 \Rightarrow 2x = \pm \sqrt{16 - y^2} \\ \Rightarrow 2x = \sqrt{16 - y^2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \sqrt{16 - y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{16 - x^2}$$

۳۴- (الهام فلاحت نژاد) وارون تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بیاضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را بدست آورید. پاسخ:

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$$

$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 1 < 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

$$\begin{cases} y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} & y \geq 1 \\ y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y + 1) & y < 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x + 1) & x < 1 \end{cases}$$

۳۵- (الهام فلاحت نژاد) برد تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{[x]} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$ را بدست آورید. پاسخ:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow [x] \leq x, x < 0 \Rightarrow \frac{[x]}{[x]} \geq \frac{x}{[x]} \Rightarrow \frac{x}{[x]} \leq 1$$

$$x < 0 \Rightarrow [x] < 0 \Rightarrow \frac{x}{[x]} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{[x]} \leq 1 \Rightarrow 0 < f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow R_f = [0, 1]$$

۳۶- (مریم پور میرزائی) دوره تناوب تابع $f(x) = (-1)^{[x]}(x - [x])$ را به دست آورید. پاسخ:

$$\begin{cases} x \in D_f = \mathbb{R} \\ T \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow T + x \in \mathbb{R} = D_f$$

$$f(x) = f(x + T) \Rightarrow (-1)^{[x]}(x - [x]) = (-1)^{[x+T]}(x + T - [x + T])$$

$$T \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-1)^{[x]}(x - [x]) = -1^{[x]+T}(x + T - [x] - T) \Rightarrow (-1)^{[x]} = (-1)^{[x]+T} \Rightarrow (-1)^T = 1 \Rightarrow T = 2$$

۳۷- (صفا رحیمی) a را چنان بدست آورید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 1 \\ x + a & x > 1 \end{cases}$ یک به یک باشد. پاسخ:

$$x \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow 2x + 1 \leq 3 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow (-\infty, 3]$$

$$x > 1 \Rightarrow x + a > 1 + a \Rightarrow y > 1 + a \Rightarrow (1 + a, +\infty)$$

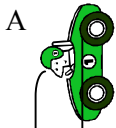
$$(-\infty, 3] \cap (1 + a, +\infty) = \emptyset \Rightarrow 1 + a \geq 3 \Rightarrow a \geq 2$$

۳۸- (محسن زینلی) اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از $(a, 0), (0, a)$ باشد ضابطه $(f \circ f)(x)$ کدام است. پاسخ:

$$y - 0 = \frac{a - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow y = -x + a = f(x)$$

$$(f \circ f)(x) = f(-x + a) = -(-x + a) + a = x \Rightarrow (f \circ f)(x) = x$$

۳۹- (صدیقه فارسی نژاد) دو ماشین A و B به سمت محل تلاقی دو جاده مطابق شکل در حرکت اند فاصله ای ماشین A از محل تقاطع ۶۰ کیلومتر و فاصله ماشین B از محل تلاقی ۷۰ کیلومتر است هر دو ماشین با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در حرکت اند. الف: پس ۳۰ دقیقه فاصله ی بین دو ماشین چقدر است؟



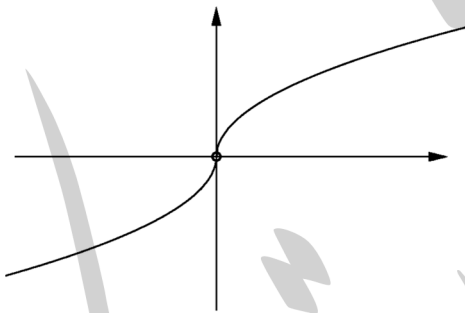
ب: فاصله بین دو ماشین را بر حسب کیلومتر

به عنوان تابعی از زمان بدست آورید.

پاسخ:

پس از ۳۰ دقیقه A در فاصله $60 - 60 \cdot \left(\frac{30}{60}\right) = 30$ کیلومتری تقاطع و ماشین B در فاصله ی $70 - 60 \cdot \left(\frac{30}{60}\right) = 40$ کیلومتری محل تقاطع هستند، فاصله ی دو ماشین برابر است با: $AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km}$

ب: در زمان t دقیقه، A در فاصله ای $60 - 60 \cdot \left(\frac{t}{60}\right) = 60 - t$ و B در فاصله ی $70 - t$ از محل تقاطع قرار دارد. فاصله A و B از یکدیگر برابر است با: $s(t) = \sqrt{(60-t)^2 + (70-t)^2}$



۴۰- (صدیقه فارسی نژاد) نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{|x|} \sqrt{|x|}$ را رسم کنید

پاسخ:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow f(x) = \sqrt{x} \\ x < 0 &\Rightarrow f(x) = -\sqrt{-x} \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

الف: $y = \frac{x}{[-x] + [x]}$

۴۱- (مریم بهره مند) زوج یافرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.
ب: $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} \quad 1 \neq a > 0$

پاسخ:

الف: $[-x] + [x] = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ تابع فرد است $f(-x) = \frac{-x}{[-x] + [x]} = -f(x)$

ب: $(a^x - 1 \neq 0, 1 \neq a > 0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

دامنه متقارن است

تابع فرد است $f(-x) = \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = \frac{\frac{1}{a^x} + 1}{\frac{1}{a^x} - 1} = \frac{1 + a^x}{1 - a^x} = -\frac{1 + a^x}{a^x - 1} = -f(x)$

۴۲- (مریم بهره مند) دوره تناوب تابع $f(x) = mx - [mx]$ را بدست آورید. ($m \in \mathbb{N}$)

پاسخ: فرض کنید T دوره تناوب تابع باشد.

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow m(x+T) - [m(x+T)] = mx - [mx] \Rightarrow [mx + mT] - mT = [mx]$$

بدیهی است که mT باید عدد صحیح باشد برای تعیین دوره تناوب باید mT را کوچکترین عدد صحیح مثبت بگیریم پس:

$$mT = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{m}$$

۴۳- (فاطمه علی رشیدی) آیا ممکن حاصل ضرب دو تابع وارون پذیر بادامنه یکسان وارون پذیر نباشد. پاسخ: بله فرض کنید $f(x) = x$, $g(x) = -x$ هر دو دارای دامنه یکسان و وارون پذیرند ولی مشاهده می شود که تابعی است یک به یک نمی باشد بنابراین نمی تواند وارون پذیر باشد. $(f \circ g)(x) = -x^2$

۴۴- (فاطمه علی رشیدی) فرض کنید دامنه تابع f مجموعه $(0, 1]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = f\left(\frac{[x]}{x}\right)$

پاسخ: فرض کنید $h(x) = \frac{[x]}{x}$ واضح است که $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$ بنابراین $g = f \circ h$ پس

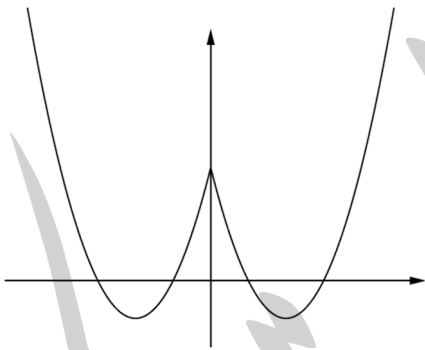
$$Dg = \left\{x \in D_h \mid h(x) \in D_f\right\} = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}, 0 < \frac{[x]}{x} \leq 1\right\}$$

حال توجه کنید: اگر $x \geq 1$ آنگاه $0 < [x] \leq x$ که $0 < \frac{[x]}{x} \leq 1$ اگر $0 < x < 1$ آنگاه $[x] = 0$ پس $\frac{[x]}{x} = 0$ که نباید در دامنه باشد. اگر $x < 0$ آنگاه $x \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $[x] < x$ پس $\frac{[x]}{x} > 1$ ولی اگر $x < 0$ آنگاه $\frac{[x]}{x} = 1$ با توجه به مطالب گفته شده پس $Dg = [1, +\infty) \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

۴۵- (فاطمه علی رشیدی) نمودار تابع $y = x^2 - 4|x| + 3$ را رسم کنید.

پاسخ: با توجه به ضابطه ی گفته شده داریم

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

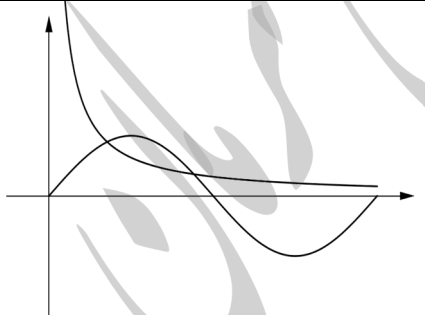


۴۶- (صغری احمدی) نقطه ی مینیمم تابع با ضابطه $y = x^2 + ax + 2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد a را بیابید.

پاسخ:

$$\left. \begin{matrix} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \frac{-\Delta}{4a} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = 2b \Rightarrow a^2 - 4a = 2a \Rightarrow a^2 - 6a = 0 \Rightarrow (a-6)(a-0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 0 \end{cases}$$

۴۷- (صغری احمدی) معادله $x \sin x - 1 = 0$ چند ریشه دارد. پاسخ:



$$x \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{x} \\ y_2 = \sin x \end{cases}$$

دو ریشه دارد

۴۸- (علیرضا عسکری) دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{|x| - x}$ را بدست آورید.

پاسخ: چون برای هر $x \in \mathbb{R}$, $x \leq |x|$ و $|x| - x \geq 0$ در نتیجه $D_f = \mathbb{R}$

۴۹- (عصمت میرزایی) از دایره ای را رنگ می کنیم در هر سه مرحله بعد $\frac{1}{3}$ مقدار باقیمانده از مرحله قبل را رنگ می کنیم بعد از چند مرحله بیش از ۸۵ درصد دایره رنگ شده است. پاسخ:

$$1 \times \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \quad \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81} \quad \frac{16}{81} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{16}{243} = \frac{211}{243} > 0.85$$

مرحله پنجم

۵۰- (فاطمه ایرانپور) تابع به معادله $f(x) = \begin{cases} 6x - 5 & x \geq 2 \\ 2x + 3 & x < 2 \end{cases}$ مفروض است معادله این تابع را با یک ضابطه بنویسید.

پاسخ: چون ضابطه تابع از درجه اول است و در عدد ۲ به دو ضابطه تقسیم شده است باید معادله $f(x)$ به صورت $f(x) = ax + b + k|x - 2|$ باشد.

$$f(x) = ax + b + k|x - 2|$$

$$x \geq 2 \Rightarrow f(x) = ax + b + kx - 2k = (a+k)x + (b-2k) = 6x - 5 \Rightarrow \begin{cases} a+k=6 \\ b-2k=-5 \end{cases}$$

$$x < 2 \Rightarrow f(x) = ax + b - kx + 2k = (a-k)x + (b+2k) = 2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a-k=2 \\ b+2k=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=4, b=-1, k=2 \Rightarrow f(x) = 4x - 1 + 2|x - 2|$$

۵۱- (فاطمه ایرانپور) ثابت کنید تابع به معادله $f(x) = \left[\frac{4}{1-x} \right] + \left[\frac{2x+7}{1+x} \right]$ تابعی زوج است.

پاسخ:

$$\left[\frac{2x+7}{1+x} \right] = \left[\frac{2(x+1)+5}{1+x} \right] = \left[2 + \frac{5}{1+x} \right] = 2 + \left[\frac{5}{1+x} \right]$$

$$f(x) = \left[\frac{4}{1-x} \right] + \left[\frac{5}{1+x} \right] + 2 \Rightarrow f(-x) = \left[\frac{4}{1+x} \right] + \left[\frac{5}{1-x} \right] + 2 = f(x)$$

۵۲- (مهری توانا سرشت) زوج و فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \in Q \\ 3 & x \notin Q \end{cases} \quad \text{ب)} \quad f(x) = \log \frac{1-x}{1+x} \quad \text{الف)}$$

$$f(-x) = \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-1} = -\log \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -f(x) \quad \text{پاسخ: الف) تابع فرد است چون}$$

ب) تابع زوج است چون اگر $x \in Q$ آنگاه $-x \in Q$ و اگر $x \notin Q$ آنگاه $-x \notin Q$

۵۳- (مهری توانا سرشت) اگر $f = \{(2,1), (3,5), (5,6)\}$ و $g(x) = x^2 - 5x + 6$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

پاسخ:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\} = \{2, 3, 5\} - \{2, 3\} = \{5\} \rightarrow \frac{f}{g} = \{(5, 6)\}$$

۵۴- (نجمه مومنی) آیا تابع $xy - 2x + y + 5 = 0$ یک به یک است؟

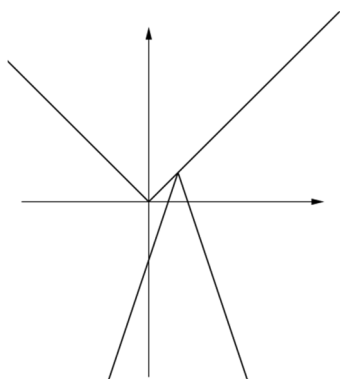
پاسخ: این تابع و یک به یک می باشد.

$$y(x+1) = 2x - 5 \Rightarrow y = \frac{(2x-5)}{(x+1)}$$

۵۵- (نجمه مومنی) ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار

$$f(x) = -3|x-1| + 2$$

پاسخ:



۵۶- (نرگس ذره صفت) اگر g تابعی وارون پذیر باشد و $f(x) = \sqrt[3]{2+g^{-1}(x^5)}$ و $g^{-1}(32) = 6$ باشد $f^{-1}(2)$ را بدست

آورید. پاسخ:

$$f^{-1}(2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2$$

$$f(\alpha) = \sqrt[3]{2+g^{-1}(\alpha^5)} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2+g^{-1}(\alpha^5)} = 2 \Rightarrow 2+g^{-1}(\alpha^5) = 8 \Rightarrow \begin{cases} g^{-1}(\alpha^5) = 6 \\ g^{-1}(32) = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$g^{-1}(\alpha^5) = g^{-1}(32) \Rightarrow \alpha^5 = 32 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 2$$

۵۷- (مهديه رئوفی) m, n را چنان بیابید که تابع $f(x) = \frac{(3m+6)x + m - n + 1}{1+x^4}$ هم زوج و هم فرد باشد. پاسخ:

$$\begin{cases} 3m+6=0 \\ m-n+1=0 \end{cases} \Rightarrow m=-2, n=-1 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ چون } f(x) \text{ هم زوج و هم فرد است بنابراین}$$

۵۸- (فاطمه رجائی) اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $(f \circ g)(x) = 2x$ آن گاه $g(x)$ را تعیین کنید. پاسخ:

$$f(g(x)) = 2x, f(x) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-2} \Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-2} = 2x$$

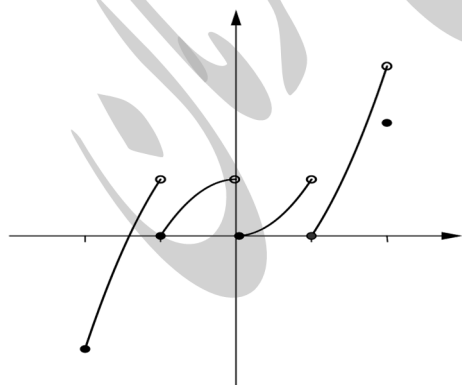
$$g(x) = 2x(g(x)-2) \Rightarrow g(x) = 2xg(x) - 4x \Rightarrow g(x) - 2xg(x) = -4x \Rightarrow g(x)(1-2x) = -4x \Rightarrow g(x) = -\frac{4x}{1-2x}$$

۵۹- (فاطمه دریجانی) اگر $\frac{3x^2-1}{x} = 9x^2 + \frac{1}{x}$ باشد. مطلوب است محاسبه $f(x)$. پاسخ:

$$t = \frac{3x^2-1}{x} = 3x - \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = 9x^2 - 6 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 9x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 6 \Rightarrow f(t) = t^2 + 6, f(x) = x^2 + 6$$

۶۰- (صغری احمدی) نمودار $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x|x| - [x]$ را رسم کنید.

پاسخ:



$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & -2 \leq x < -1 \\ -x^2+1 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ x^2-1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا

WWW.RIAZISARA.IR